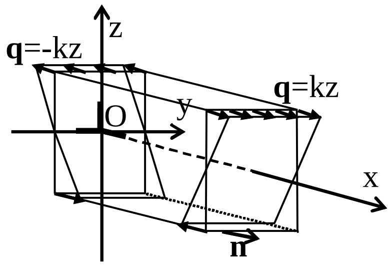
Zginanie

definicja, zapis zagadnienia brzegowego i jego rozwiązanie, twierdzenie o płaskich przekrojach, zginanie proste, projektowanie, przykłady, zginanie ukośne, zadania

Sformułowanie problemu



Pręt prosty, utwierdzony w punkcie O będącym środkiem ciężkości ścianki poprzecznej, obciążony jest na ściankach poprzecznych (denkach) liniowo zmiennym obciążeniem powierzchniowym.

Przyjmujemy początek układu w p. O, przy czym oś x pokrywa się z osią pręta, a osie y i z są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego.

Podobnie jak dla rozciągania, poszukiwać będziemy stanu naprężenia i odkształcenia oraz pola przemieszczeń, pomijając siły masowe.

Zapis zagadnienia brzegowego

Statyczne warunki brzegowe dla równań Naviera:

na pobocznicy $\mathbf{n}(0, n_y, n_z)$ jest $q_i = 0$,

na ściankach poprzecznych $\mathbf{n}(\pm 1, 0, 0)$ jest $\mathbf{q}(\pm kz, 0, 0)$,

Kinematyczne warunki brzegowe dla równań Cauchy'ego w punkcie O(0, 0, 0) są identyczne jak dla rozciągania.

Rozwiązanie podejściem statycznym

Na podstawie statycznych warunków brzegowych, przypuszczamy macierz naprężenia w postaci spełniającej równania równowagi wewnętrznej Naviera oraz statyczne warunki brzegowe. Z równań Hooke'a obliczamy macierz odkształcenia (spełniającą równania nierozdzielności) i podstawiamy do równań geometrycznych Cauchy'ego, otrzymując:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} kz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{kz}{E} & 0 & 0 \\ & -\nu\frac{kz}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\frac{kz}{E} \end{pmatrix}, \; \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{kz}{E}, & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu\frac{kz}{E}, & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial z} = -\nu\frac{kz}{E}, & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Całka ogólna jest sumą całki ogólnej układu jednorodnego i całki szczególnej układu niejednorodnego. Całka jednorodnego układu równań ma postać identyczną jak dla rozciągania. Całkę szczególną znajdujemy metodą przewidywania, otrzymując:

$$u^s = \frac{kz}{E}x, \quad v^s = -\nu\frac{kz}{E}y, \quad w^s = \frac{k}{2E}\left(-x^2 + \nu y^2 - \nu z^2\right).$$

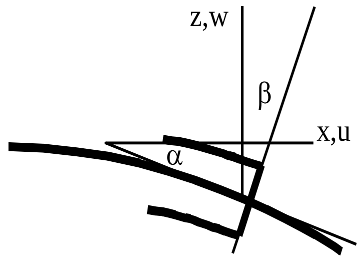
Dwa pierwsze człony w^s wynikają z konieczności spełnienia 5. i 6. równania. Podobnie jak dla rozciągania, wobec jednorodnych warunków brzegowych stałe całkowania zerują się i całka ogólna dla układu niejednorodnego równa jest całce szczególnej: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^S$.

Otrzymaliśmy więc ścisłe rozwiązanie zagadnienia, które nazywać będziemy *czystym zginaniem.*

> *Stan naprężenia dla czystego zginania jest jednoosiowy i niejednorodny. Stan odkształcenia jest niejednorodny i trójosiowy. Macierz odkształceń jest diagonalna.*

Twierdzenie o płaskich przekrojach Bernoulliego

Deformacja osi pręta, dla $y = z = 0$ wynosi $u = v = 0$, $w = - kx^2/2E$. Przywołując znany z matematyki wzór na promień krzywizny, mamy:



$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{|w''(x)|}{\left[1 + w'^2(x)\right]^{3/2}} \approx |w''(x)| = \frac{k}{E}.$$

Wybierzmy jeden z przekrojów pręta, $x = x_0$. Kąt nachylenia osi pręta do współrzędnej x wynosi w tym przekroju:

$$w'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha = -kx_0/E.$$

Z drugiej strony, przemieszczenie punktów tego przekroju po odkształceniu będzie się wyrażało:

$$u(x_0, y, z) = kzx_0/E, \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = kx_0/E = \mathrm{tg}\beta.$$

Stała wartość pochodnej oznacza, że przekrój poprzeczny pozostaje płaszczyzną. Ponieważ również wartości kątów α i β są sobie równe, z rysunku odczytujemy, że płaszczyzna przekroju jest prostopadła do stycznej do osi pręta po odkształceniu

> *Przekrój poprzeczny, płaski i prostopadły do osi pręta przed odkształceniem, pozostaje płaski i prostopadły do odkształconej osi pręta.*

Kształt przekroju natomiast ulega zmianie, jak łatwo się przekonać wykonując obliczenia np. dla przekroju prostokątnego.

Proste zginanie

Każde obciążenie, redukujące się do momentu zginającego względem osi y, jest obciążeniem statycznie równoważnym do rozpatrywanego powyżej:

$$M_y = \iint_F kz^2 dF = kJ_y, \qquad \text{skąd:} \quad k = M_y / J_y$$

Z zasady de Saint-Venanta, rozwiązanie dla takiego obciążenia różni się niewiele od rozwiązania dla czystego zginania. W odróżnieniu od ścisłego rozwiązania matematycznego obciążenie momentem skupionym będziemy nazywać *prostym zginaniem*. Rozkład naprężeń normalnych jest liniowy po wysokości przekroju a krzywizna ugiętej osi belki zależy od *sztywności na zginanie*, EJ_y:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z, \quad \frac{1}{\rho(x)} = \kappa(x) = \left| \frac{M_y}{EJ_y} \right|.$$

Z umowy o znakowaniu naprężeń wynika, że dodatnie są naprężenia rozciągające. Prowadzi to do konwencji znakowania momentów zginających:

> *Moment powodujący rozciąganie włókien o dodatnich współrzędnych uważamy za dodatni.*

To, które włókna są rozciągane, odczytujemy z wykresu momentów zginających.

Podobne związki można otrzymać dla obciążenia momentem zginającym względem osi z, poprzez zamianę indeksów *y* i z:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{J_z} y, \quad \frac{1}{\rho(x)} = \kappa(x) = \left| \frac{M_z}{EJ_z} \right|.$$

Zmiana znaku we wzorze na naprężenia normalne wynika stąd, że dodatni moment M_z (w układzie osi *y, z*) powoduje ściskanie włókien o dodatnich współrzędnych *y*.

M.g.p. w których naprężenia normalne zerują się nazwiemy *osią obojętną* zginania.

> *Dla zginania prostego oś obojętna pokrywa się z główną centralną osią bezwładności, względem której działa moment zginający. Największe co do bezwzględnej wartości naprężenia normalne występują w punktach najbardziej oddalonych od osi obojętnej.*

Projektowanie

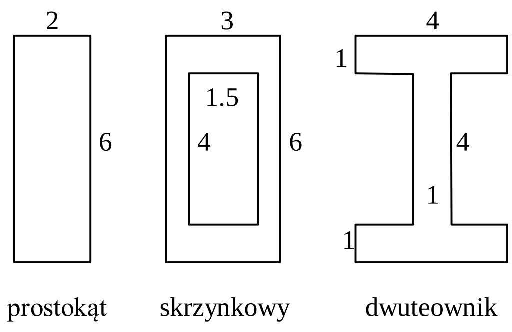
Naprężenia normalne nie mogą przekraczać wytrzymałości obliczeniowej *R*. Stąd:

$$\max|\sigma_x| = \frac{|M_y|}{J_y}\max|z| \quad \Rightarrow \quad \max|\sigma_x| = \frac{|M_y|}{W_y} \le R, \quad W_y \equiv \frac{J_y}{\max|z|},$$

gdzie W_y jest wskaźnikiem wytrzymałości na zginanie.

Projektowanie z warunku wytrzymałościowego polega więc albo na doborze odpowiedniego wskaźnika wytrzymałości na zginanie przekroju (projektowaniu geometrii przekroju) albo na określeniu maksymalnego momentu zginającego dla przekroju o zadanej geometrii. Znacznie mniejsze możliwości daje dobór materiału zginanej belki (czyli *R*).

A) Wskaźniki wytrzymałości na zginanie dla 3 teoretycznych przekrojów o tej samej powierzchni 12 cm^2 i tej samej wysokości 6 cm, wynoszą:



przekrój prostokątny: W_y = 12 cm^3, 100 %

przekrój skrzynkowy: $W_y = 15.33\ \mathrm{cm}^3$, 128 %

przekrój dwuteowy: $W_y = 18.67\ \mathrm{cm}^3$, 156 %

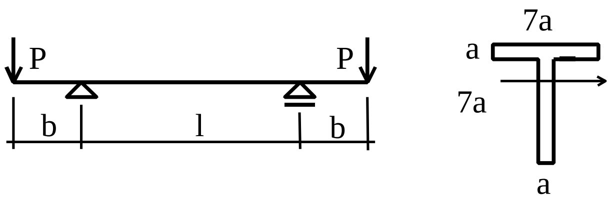
Jak widać najlepsze wykorzystanie materiału belki uzyskuje się dla przekroju dwuteowego.

B) Jeśli porównamy wskaźniki wytrzymałości na zginanie dla kwadratu zginanego względem osi równoległej do jego boków, ze zginaniem względem osi przechodzącej przez przeciwległe naroża, to w 1. przypadku $W_y = 0.167\ a^3$, a w 2. przypadku $W_y = 0.118\ a^3$. Jak więc widać, w tym drugim ustawieniu maksymalne naprężenia normalne będą większe o ok. 40 %, z czego wnosimy, że jest to ustawienie niekorzystne.

C) Ogólnie wskaźnik wytrzymałości zależy liniowo od szerokości i od kwadratu wysokości przekroju.

Przykład

Zaprojektować przekrój podanej belki, jeśli P = 140 kN, l = 2 m, b = 0.2 m, R = 150 MPa.



Rozwiązanie:

- maksymalny moment występuje w przęśle belki i wynosi $M_y = P\,b = 28$ kNm,

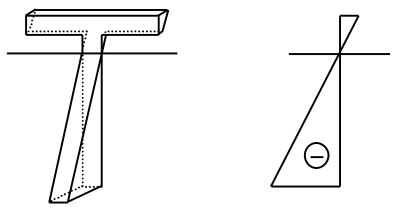
- przekrój: $y_0 = 5.5a$, $I_{y0} = 85.17\ a^4$ (gł.centr.m.bezwł.), $W_{y0} = 85.17\ a^3 / 5.5\ a = 15.48\ a^3$

- naprężenia normalne: $\sigma_{max} = M_{max} / W_{y0} \le R \quad \Rightarrow \quad 28\ 10^3 / 15.48\ a^3 = 150\ 10^6$

- parametr przekroju $a = 0.0229 \cong 2.3$ cm, $I_{y0} = 2380\ \mathrm{cm}^4$, $W_{y0} = 188\ \mathrm{cm}^3$

ostatecznie: $\sigma_{max} = 149\ \mathrm{MPa} < R = 150\ \mathrm{MPa}$.

Naprężenia normalne w przekroju możemy przedstawić na dwa sposoby: za pomocą *bryły naprężeń* albo *rozkładu naprężeń*.



bryła naprężeń rozkład naprężeń

Zginanie ukośne

Jest to zginanie, dla którego kierunek wypadkowego wektora momentu gnącego nie jest równoległy do głównej centralnej osi bezwładności. Możliwe są dwa przypadki szczególne:

- działają dwa momenty względem osi głównych centralnych osi bezwładności
- wypadkowy moment zginający działa względem osi nie będącej główną osią bezwładności przekroju.

Drugi z tych przypadków sprowadza się do pierwszego: moment zginający rozkładamy na dwa składowe momenty zginające, działające równolegle do głównych centralnych osi bezwładności. Naprężenia normalne będą superpozycją rozwiązania dla dwu prostych przypadków zginania:

$$M_y = M\cos\alpha,\ M_z = M\sin\alpha,\ \sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y\,.$$

Znaki momentów M_y i M_z w powyższym wzorze wynikają z konwencji znakowania naprężenia.

Naprężenia normalne są dane równaniem płaszczyzny. Tzw. *bryła naprężenia* jest ograniczona dwiema płaszczyznami: płaszczyzną przekroju poprzecznego i płaszczyzną, na której leżą końce wektorów naprężenia normalnego. Rozkład naprężenia najlepiej rysować na osi prostopadłej do osi obojętnej.

Oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości przekroju:

$$\sigma_x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{M_z}{M_y}\frac{J_y}{J_z} y = tg\alpha \frac{J_y}{J_z} y$$

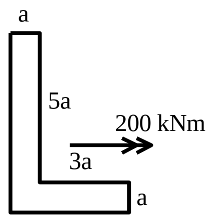
i jej kierunek pokrywa się z kierunkiem działania wektora momentu jedynie gdy $J_y = J_z$. Jednak dla dwóch wartości własnych równych sobie każda oś centralna jest jednocześnie osią główną, a wobec tego kierunek wypadkowego momentu zginającego pokrywa się z kierunkiem głównym, i tak naprawdę jest to zawsze tylko proste zginanie.

Największe co do bezwzględnej wartości naprężenia normalne wystąpią w punkcie przekroju najbardziej oddalonym od osi obojętnej.

Projektowanie z warunku nośności polega na spełnieniu warunku: max(σ_x) $\le R$.

<u>Przykład</u>

Zaprojektować przekrój, przyjmując R = 300 MPa:



Rozwiązanie:

położenie środka ciężkości: $y_c = 1.17$ a, $z_c = 2.17$ a

centralne momenty bezwł.: $J_y = 30.75\ a^4$, $J_z = 10.75\ a^4$, $J_{yz} = -10\ a^4$

wartości własne: $J_1 = 34.89\ a^4$, $J_2 = 6.61\ a^4$, kierunki główne: $\alpha = 22.49°$

momenty zginające: $M_1 = M\cos\alpha = 185$ kNm, $M_2 = M\sin\alpha = 76.5$ kNm

rozkład naprężeń normalnych: $\sigma_x = \frac{M_1}{J_1} x_2 - \frac{M_2}{J_2} x_1 = \frac{5.30 x_2 + 11.57 x_1}{a^4} 10^3$

położenie osi obojętnej: $x_2 = -2.19\ x_1$

współrzędne naroży przekroju w układzie głównym ze wzoru transformacyjnego

$x_1 = y\cos\alpha + z\sin\alpha$, $x_2 = -y\sin\alpha + z\cos\alpha$

Punktem, w którym wystąpią maksymalne naprężenia normalne jest punkt najbardziej oddalony od osi obojętnej.

pkt	y	z	x1	x2	odl. od osi oboj.	σ [MPa]
A	-1.17 a	-2.17 a	-1.91 a	-1.56 a	2.39 a	-243
B	2.83 a	-2.17 a	1.78 a	-3.09 a	0.34 a	35
C	2.83 a	-1.17 a	2.17 a	-2.16 a	1.07 a	109
D	-0.17 a	3.83 a	1.31 a	3.60 a	2.69 a $\rightarrow$ maks.	274
E	-1.17 a	3.83 a	0.38 a	3.99 a	2.01 a	205

projektowanie przekroju: $\sigma_x(1.31\ a, 3.60\ a) \le R \quad \Rightarrow \quad a \ge 0.0485$ m ≈ 0.05 m

naprężenia dla przyjętego a w tabeli, bryła naprężeń i rozkład naprężenia: