Mimośrodowe rozciąganie

sformułowanie problemu i rozwiązanie, stan naprężenia i położenie osi obojętnej, rdzeń przekroju, przykłady rozwiązań

Zginanie ukośne z rozciąganiem

Kolejnym, bardziej złożonym, przypadkiem obciążenia pręta jest jednoczesne działanie siły osiowej oraz momentów zginających. Z superpozycji rozwiązań dla prostych obciążeń składowych wnioskujemy, że stan naprężenia nadal będzie jednoosiowy. Naprężenia normalne w ogólnym przypadku zapiszą się:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y \,.$$

Ekstremalne naprężenia normalne wystąpią, z uwagi na liniowość równania, we włóknach najbardziej oddalonych od osi obojętnej.

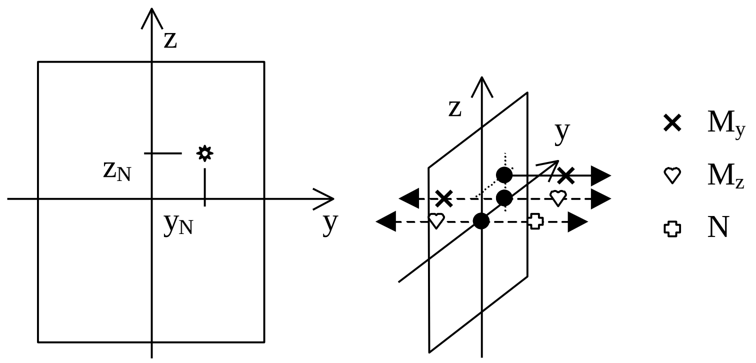
Znaki sił przekrojowych występujących we wzorze określamy, podobnie jak poprzednio, korzystając z konwencji znakowania naprężeń normalnych.

Mimośrodowe rozciąganie

Definicja

Szczególnym przypadkiem jest *mimośrodowe rozciąganie* — obciążenie pręta siłą rozciągającą, przyłożoną poza jego środkiem ciężkości (mimośrodowo).

Takie obciążenie jest statycznie równoważne obciążeniu osiową siłą rozciągającą N oraz 2 momentami zginającymi: $M_y = N\, z_N$, $M_z = N\, y_N$, gdzie y_N i z_N są mimośrodami działania siły.



Stan naprężenia

Stosując zasadę superpozycji określamy naprężenia normalne:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{N z_N}{J_y} z + \frac{N y_N}{J_z} y$$

Jak widać, rozkład naprężenia jest liniowy i — podobnie jak poprzednio — bryła naprężenia jest ograniczona płaszczyzną przekroju poprzecznego i płaszczyzną naprężeń. Ekstremalne naprężenia normalne wystąpią w punkcie najbardziej oddalonym od osi obojętnej. Naprężenia w środku ciężkości przekroju są równe naprężeniom od prostego rozciągania.

Położenie osi obojętnej

Równanie osi obojętnej otrzymamy przyrównując naprężenia normalne do zera:

$$\sigma_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{F}\left(1 + \frac{z_N}{i_y^2} z + \frac{y_N}{i_z^2} y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{y_N}{i_z^2} y - \frac{z_N}{i_y^2} z = 1,$$

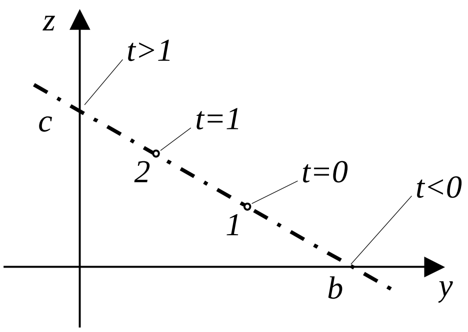
podstawiając:

$$b \equiv -\frac{i_z^2}{y_N}, \quad c \equiv -\frac{i_y^2}{z_N},$$

otrzymujemy równanie osi obojętnej w postaci odcinkowej:

$$\boxed{\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

gdzie *b* określa przecięcie osi obojętnej z osią *y* a *c* — z osią *z:*



Jak widać, położenie osi obojętnej nie zależy od wartości siły, zależy natomiast od geometrii przekroju i względnej wartości mimośrodów.

Równanie osi obojętnej przechodzącej przez punkty 1 i 2 możemy zapisać parametrycznie:

$$\begin{aligned} y &= (y_2 - y_1)t + y_1 \\ z &= (z_2 - z_1)t + z_1 \end{aligned},$$

skąd dla $z = 0$, $y = b$ oraz $y = 0$, $z = c$, otrzymujemy odpowiednio:

$$b = \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{z_2 - z_1}, \quad c = \frac{y_2 z_1 - y_1 z_2}{y_2 - y_1}.$$

Odległość punktu P(y_P, z_P) od osi obojętnej danej równaniem odcinkowym wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|b z_P + c y_P - bc|}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Oś obojętna może:

1. przechodzić przez przekrój poprzeczny dzieląc go na dwa obszary o różnych znakach naprężenia - taki przypadek ma miejsce dla stosunkowo dużych wartości mimośrodów,
2. być styczna do konturu przekroju poprzecznego - naprężenia normalne są w całym przekroju jednego znaku lub zero,

3. leżeć w całości poza przekrojem - w skrajnym przypadku zerowych mimośrodów (proste rozciąganie) oś obojętna leży w nieskończoności.

Rozróżnienie powyższe jest istotne ze względu na jednokierunkowość pracy konstrukcyjnych materiałów ceramicznych (beton, cegła), nie posiadających praktycznie wytrzymałości na rozciąganie. W rozciąganej strefie przekroju poprzecznego takie materiały będą ulegały zarysowaniu nie przenosząc naprężeń. Dlatego, mówiąc o mimośrodowym rozciąganiu, mamy na myśli w podtekście przypadek przeciwny, mimośrodowego ściskania.

Rdzeń przekroju

Z uwagi na wspomnianą jednokierunkowość pracy wielu materiałów konstrukcyjnych jesteśmy zainteresowani uzyskaniem naprężeń normalnych jednego znaku w całym przekroju poprzecznym.

> Rdzeniem przekroju *nazywamy m.g.p. przekroju, w których przyłożona siła osiowa powoduje powstanie w całym przekroju naprężeń jednego znaku.*

Rdzeń przekroju jest ograniczony od zewnątrz wypukłą krzywą, zwaną *krzywą rdzeniową*. Krzywą rdzeniową otrzymujemy „obtaczając” kontur zewnętrzny przekroju prostymi, odpowiadającymi kolejnym położeniom osi obojętnej.

Konstrukcja krzywej rdzeniowej wynika bezpośrednio ze wzorów na położenie osi obojętnej dla mimośrodowego rozciągania:

$$1+\frac{z_N z}{i_y^2}+\frac{y_N y}{i_z^2}=0$$

Wzór ten może być czytany dwojako:

1. jako zależność y-z dla zadanego punktu przyłożenia siły (y_N, z_N), punktowi rdzenia odpowiada więc równanie prostej będącej osią obojętną,
2. jako zależność położenia siły y_N-z_N dla zadanego punktu położenia osi obojętnej (y, z), punktowi przez który przechodzi pęk prostych będących osiami obojętnymi odpowiada więc prosta pokrywająca się z odcinkiem krzywej rdzeniowej.

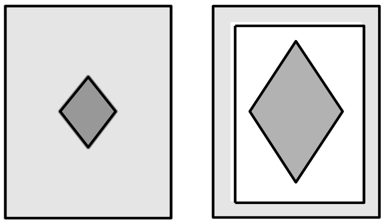
Wynika stąd, że jeśli:

położenie siły	**oś obojętna**
w środku ciężkości	w nieskończoności
w rdzeniu	poza przekrojem
na krzywej rdzeniowej	styczna do obrysu konturu
w przekroju, poza rdzeniem	przecina przekrój, poza rdzeniem
na obrysie konturu	styczna do rdzenia
poza przekrojem	przecina rdzeń
w nieskończoności	przechodzi przez środek ciężkości

Tok postępowania przy konstruowaniu krzywej rdzeniowej jest następujący:

1. Robimy obrys konturu zewnętrznego przekroju poprzecznego, „obtaczając” przekrój prostymi (tak aby "wnętrze" przekroju było cały czas po jednej stronie prostych),

2. Odcinkowi obrysu odpowiada naroże krzywej rdzeniowej, narożu obrysu - odcinek krzywej rdzeniowej.

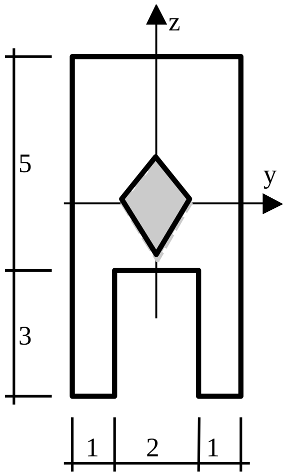


Dla przekroju prostokątnego a×h, promienie bezwładności wynoszą $i_y^2 = h^2/12$, $i_z^2 = a^2/12$, skąd współrzędne naroży krzywej rdzeniowej wynoszą (a/6, 0), (0, h/6).

Dla przekroju skrzynkowego a×h i ściankach grubości h/10 i a/10, promienie bezwładności wynoszą odpowiednio $i_y^2 = 0.164\,h^2$, $i_z^2 = 0.164\,a^2$, skąd współrzędne krzywej rdzeniowej wynoszą (0.328 a, 0.328 h) a rdzeń przekroju będzie prawie dwukrotnie większy.

<u>Przykład</u>

1. Położenie środka ciężkości, osie główne centralne



$$z_0 = \frac{8\cdot 4\cdot 4 - 2\cdot 3\cdot 1.5}{8\cdot 4 - 2\cdot 3} = 4.58, \quad y_0 = 0$$

2. Główne centralne momenty bezwładności

$$J_y = \frac{4\cdot 8^3}{12} + 4\cdot 8\cdot 0.58^2 - \frac{2\cdot 27}{12} - 6(4.58-1.5)^2 =$$
$$= 170.7 + 10.7 - 4.5 - 56.8 = 120\text{cm}^4$$

$$J_z = \frac{8\cdot 64}{12} - \frac{3\cdot 8}{12} = 42.7 - 2 = 40.7\text{cm}^4$$

3. Promienie bezwładności

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = 4.62, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{A} = 1.56$$

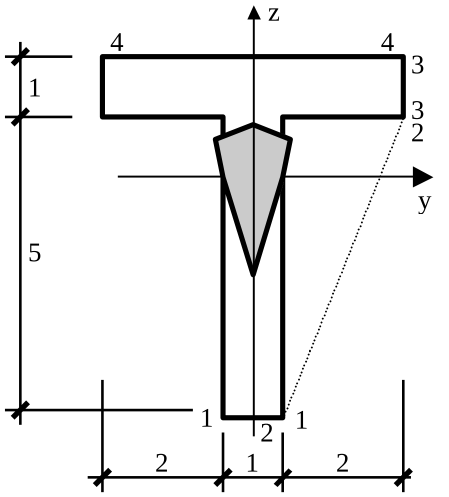
4. Krzywa rdzeniowa:

1-1: $b = \pm\infty, \quad c = 3.42 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0, \quad z_0 = -1.35$

2-2: $b = -2, \quad c = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0.782, \quad z_0 = 0$

3-3: $b = \pm\infty, \quad c = -4.58 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 1.01$

Przykład



1. Położenie środka ciężkości, osie główne centralne

$$z_0 = \frac{5 \cdot 1 \cdot 2.5 + 5 \cdot 1 \cdot 5.5}{5 + 5} = 4.0, \quad y_0 = 0$$

2. Główne centralne momenty bezwładności

$$J_y = \frac{1 \cdot 5^3}{12} + 5 \cdot (4 - 2.5)^2 + \frac{5 \cdot 1}{12} + 5 \cdot (5.5 - 4)^2 =$$

$$= 10.42 + 11.25 + 0.42 + 11.25 = 33.33 \text{cm}^4$$

$$J_z = \frac{1 \cdot 125}{12} + \frac{5 \cdot 1}{12} = 10.42 + 0.42 = 10.83 \text{cm}^4$$

3. Promienie bezwładności

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = 3.33, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{A} = 1.08$$

4. Krzywa rdzeniowa:

1-1: $b = \pm\infty, \quad c = -4 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0.833$

2-2: $b = 2.1, \quad c = -5.25 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -0.516, \quad z_0 = 0.635$

3-3: $b = 2, \quad c = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad y_0 = -0.433, \quad z_0 = 0$

4-4: $b = \pm\infty, \quad c = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0, \quad z_0 = -1.67$

Przykład

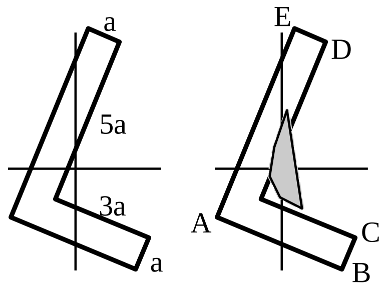
Określić rdzeń przekroju dla kątownika z rysunku.

Rozwiązanie:

Korzystamy z obliczeń wykonanych wcześniej dla zginania ukośnego:

$J_1 = 34.98\ a^4$, $J_2 = 6.61a^4$, $\alpha = 22.5°$

Współrzędne naroży przekroju w układzie własnym - jak poprzednio.

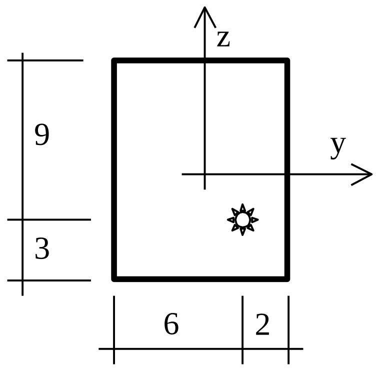


Wyniki obliczeń dla krzywej rdzeniowej przedstawia tabelka:

Prosta	**b**	**c**	$\mathbf{y_N}$	$\mathbf{z_N}$
AB	-5.67 a	-2.35 a	0.13 a	1.65 a
BC	3.08 a	-7.33 a	-0.24 a	0.53 a
CD	1.85 a	12.37 a	-0.40 a	0.31 a
DE	9.89 a	4.15 a	-0.07 a	-0.94 a
AE	-1.27 a	3.07 a	0.58 a	-1.27 a

Przykład

Określić maksymalne naprężenie w przekroju rozciąganym siłą N = 150 kN (wymiary przekroju w cm):



Rozwiązanie:

1. Siły przekrojowe: N = 150 kN, M_y = -150×0.03 = -4.5 kNm, M_z = 150×0.02 = 3 kNm
2. Charakterystyki geometryczne przekroju: F = 96 cm^2, J_y = 1152 cm^4, J_z = 512 cm^4
3. Rozkład naprężeń normalnych:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y = \frac{150 \cdot 10^3}{96 \cdot 10^{-4}} - \frac{4.5 \cdot 10^3}{1152 \cdot 10^{-8}} z + \frac{3 \cdot 10^3}{512 \cdot 10^{-8}} y = 15.7 - 391z + 586y \text{ MPa}$$

4. Równanie osi obojętnej:

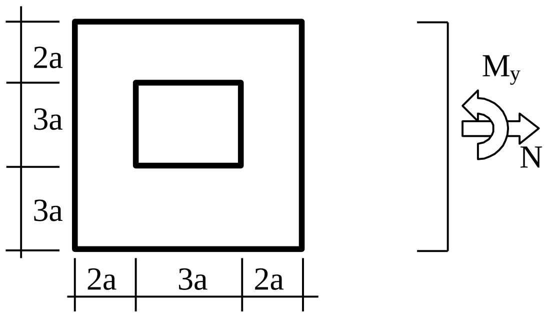
$$z = 1.5y + 0.04$$

5. Największe naprężenia normalne wystąpią w prawym dolnym narożu:

$$\max \sigma_x = 15.7 - 391 \cdot (-0.06) + 586 \cdot 0.04 = 62.6 \text{ MPa}$$

Przykład

Zaprojektować parametr a przekroju pręta rozciąganego siłą osiową N = 150 kN i zginanego momentem M_y = 75 kNm, jeśli R = 250 MPa.



Rozwiązanie:

1. Charakterystyki przekroju: F = (56-9) a^2 = 47 a^2, z_c = 3.9 a, J_y = 289 a^4
2. Rozkład naprężeń normalnych:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z = \frac{150 \cdot 10^3}{47a^2} - \frac{75 \cdot 10^3}{289a^4} z$$

3. Równanie osi obojętnej: $z = 12.3a^2$.
4. Z równania osi obojętnej wynika, że największe naprężenia normalne wystąpią w dolnych włóknach (najbardziej oddalonych od osi obojętnej). Warunek projektowania zapisze się:

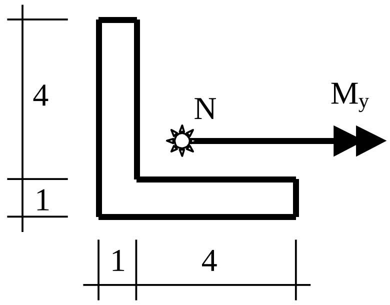
$$\max \sigma_x = \sigma_x(z = -3.9a) = \frac{3190}{a^2} + \frac{1012}{a^3} \le R = 250 \cdot 10^6$$

Powyższa nierówność może być rozwiązana numerycznie albo metodą kolejnych prób. Oszacowanie rozwiązania można uzyskać projektując przekrój osobno na proste rozciąganie i proste zginanie, otrzymując odpowiednio: a = 0.0036 m i a = 0.016 m.

5. Jeżeli przyjmiemy a = 0.0165 m, maksymalne naprężenia wyniosą: 237 MPa < R.

<u>Przykład</u>

Określić ekstremalne naprężenie w przekroju zginanym momentem M_y = 65 Nm i równocześnie rozciąganym siłą osiową N = 0.2 kN (wymiary przekroju w cm):



Rozwiązanie:

1. Charakterystyki przekroju: F = 9 cm^2, z uwagi na skośną symetrię przekroju momenty bezwładności obliczamy od razu w osiach głównych centralnych (jako różnicę 2 kwadratów):

Położenie środka ciężkości: z_c = 1.611 cm,

moment względem osi symetrii = $\frac{5^4}{12} - \frac{4^4}{12} = 30.75\,\text{cm}^4 = J_y$

moment względem drugiej osi:

$$\frac{5^4}{12} + 25\left(1.611 \cdot \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}5\right)^2 - \frac{4^4}{12} - 16\left(1.611 \cdot \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}4 - \sqrt{2}\right)^2 = 8.53\ \text{cm}^4 = J_z$$

2. Siły przekrojowe: N = 200 N, $M_1 = M_2$ = 45.96 Nm
3. Rozkład naprężeń normalnych:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y}z + \frac{M_z}{J_z}y = \frac{200}{9 \cdot 10^{-4}} + \frac{45.96}{30.75 \cdot 10^{-8}}z + \frac{45.96}{8.53 \cdot 10^{-8}}y$$

4. Równanie osi obojętnej:

$$z = -0.0015 - 3.7y$$

5. Z równania osi obojętnej wynika, że punktem najbardziej od niej oddalonym jest p. A o współrzędnych w układzie głównym centralnym:

$$A\left(4\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}-1.611\sqrt{2}=2.38,\quad 4\frac{\sqrt{2}}{2}=2.83\right)\text{(w cm)}$$

6. Ekstremalne naprężenia normalne w p. A:

$$\sigma_x = 17.2\text{ MPa.}$$