

## Zginanie poprzeczne

*sformułowanie problemu, hipoteza płaskich przekrojów, naprężenia normalne i styczne, projektowanie, trajektorie naprężeń głównych, przykłady*

### Sformułowanie problemu

Zginaniem poprzecznym nazywamy przypadek obciążenia pręta, utwierdzonego w p.  $O(0, 0, 0)$ , obciążeniem poprzecznym  $q_z(x)$ , przyłożonym do pobocznicy pręta. Zakładamy symetrię względem osi  $z$  zarówno przekroju pręta jak i działającego obciążenia. Osie  $y$  i  $z$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego pręta. Jest to najczęściej spotykany przypadek pracy ustroju prętowego — większość ustrojów prętowych poddana jest zginaniu poprzecznemu.

Rozwiązania zagadnienia brzegowego nie udaje się uzyskać podejściem statycznym z uwagi na dowolność kształtu przekroju poprzecznego i dużą dowolność przyłożonego obciążenia. Dlatego zamiast szukać ścisłego rozwiązania skorzystamy z uzyskanego wcześniej wyniku dla zginania prostego, stosując podejście kinematyczne.

### Hipoteza płaskich przekrojów

Przyjmujemy, że przekrój płaski i prostopadły do osi pręta przed odkształceniem, pozostaje płaski po odkształceniu. Doświadczenie nie potwierdza tej hipotezy, jednak wzory wynikające z niej zapewniają wystarczającą dla celów praktycznych dokładność. To, że przekrój po odkształceniu pozostaje płaski, oznacza liniowy rozkład odkształceń normalnych po wysokości przekroju:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \kappa z.$$

Dwa parametry występujące w powyższym wzorze mają prostą interpretację fizyczną:  $\varepsilon_0$  jest odkształceniem liniowym (wydłużeniem lub skróceniem względnym) włókien dla  $z = 0$  a  $\kappa$  oznacza krzywiznę tych włókien.

### Naprężenia normalne

Przyjmujemy (co również zostało potwierdzone doświadczalnie), że naprężenia normalne:

$$\sigma_x \gg \sigma_y, \sigma_z.$$

Z równań Hooke'a i hipotezy płaskich przekrojów wynika:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \approx \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x = E\varepsilon_0 + E\kappa z.$$

Z warunków równoważności otrzymujemy:

$$\iint_F \sigma_x dF = E\varepsilon_0 F + E\kappa S_y = E\varepsilon_0 F = N = 0 \Rightarrow \varepsilon_0 = 0,$$

$$\iint_F \sigma_x z dF = E\varepsilon_0 S_y + E\kappa J_y = E\kappa J_y = M_y(x) \Rightarrow \kappa(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_y(x)}{EJ_y}.$$

Pierwszy wynik mówi nam, że długość osi pręta nie ulega zmianie. Z drugiego wniosku-jemy, że krzywizna osi pręta jest proporcjonalna do momentu zginającego i odwrotnie proporcjonalna do sztywności zginania. W przeciwieństwie jednak do zginania prostego, krzywizna osi pręta nie jest stała i zmienia się wraz ze zmianą momentu zginającego.

Wstawiając otrzymane zależności do wzoru na naprężenia normalne, otrzymujemy identyczny wzór jak dla zginania prostego:

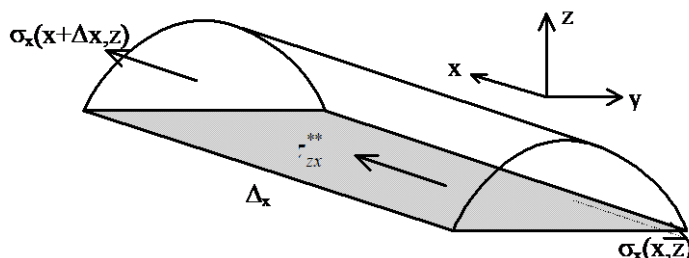
$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z$$

a jedyna różnica polega na zależności od współrzędnej osi podłużnej pręta. Rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym jest więc liniowy. Ekstremalne naprężenia normalne powstają we włóknach skrajnych. To, które włókna są rozciągane, odczytujemy z wykresu momentów zginających, narysowanego po stronie włókien rozciąganych. Największe co do bezwzględnej wartości naprężenia normalne wystąpią w przekroju  $M_{\max}$ .

Oś obojętna pokrywa się z osią  $y$  — główną centralną osią bezwładności.

### Uśrednione naprężenia styczne

Rozpatrzmy równowagę elementu jak na rysunku:



Oznaczmy przez  $\tau_{zx}^{**}$  naprężenia styczne, uśrednione po  $\Delta x$  i szerokości cięcia  $b(z)$ .

Z sumy rzutów na oś  $x$  mamy:

$$-\iint_{A_1} \sigma_x(x, z) dF + \iint_{A_1} \sigma_x(x + \Delta x, z) dF + \tau_{zx}^{**} b(z) \Delta x = 0.$$

Ponieważ z tw. Lagrange'a jest:

$$\sigma_x(x + \Delta x, z) = \frac{M_y(x + \Delta x)}{J_y} z = \frac{M_y(x)}{J_y} z + \frac{dM_y(x + \xi \Delta x)}{dx} \frac{z}{J_y} \Delta x,$$

otrzymujemy więc po podzieleniu przez  $\Delta x$  i dla  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\tau_{zx}^{**} = -\frac{Q(x) S_y^1(z)}{J_y b(z)}$$

(to samo inaczej)

$$\text{Sumę rzutów zapisujemy: } -\iint_{A_1} \sigma_x dF + \iint_{A_1} (\sigma_x + d\sigma_x) dF + \tau_{zx}^{**} b dx = 0.$$

$$\text{Naprężenia normalne: } \sigma_x + d\sigma_x = \frac{M_y + dM_y}{J_y} z = \frac{M_y}{J_y} z + \frac{dM_y}{J_y} z,$$

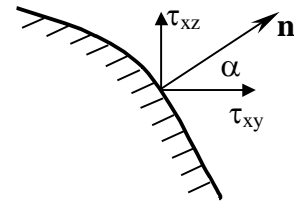
$$\text{a więc po scałkowaniu, mamy: } \tau = \frac{dM_y}{dx} \frac{S_y}{I_y b} = \frac{QS_y}{I_y b}$$

Komentarz do wzoru:

1. Gwiazdka przy naprężeniach stycznych oznacza wartość średnią z całej długości cięcia  $b(z)$ . W dalszej części nie będziemy jej pisać, pamiętając że mamy do czynienia z wielkościami uśrednionymi.
2. Znak naprężenia określamy wg konwencji znakowania naprężeń, wstawiając bezwzględne wartości zarówno siły poprzecznej jak i momentu statycznego odciętej części przekroju.
3. Ponieważ oś  $y$  jest główną centralną osią bezwładności, obojętne jest którą z 2 części przekroju weźmiemy pod uwagę (ich momenty statyczne różnią się jedynie znakiem).
4. Wzór może być praktycznie przydatny jedynie dla przekrojów litych. Dla przekrojów cienkościennych błąd jest trudny do oszacowania a ponadto zazwyczaj zbyt duży.
5. Z symetrii tensora naprężenia wynika  $\tau_{zx} = \tau_{zy}$ .
6. Z warunków brzegowych dla nieobciążonej części brzegu wynika, że na brzegu naprężenia tnące muszą być styczne do konturu:

$$\mathbf{n}(0, \cos \alpha, \sin \alpha), \quad q_{nx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} \cos \alpha + \tau_{xz} \sin \alpha = 0$$

(ostatnie wyrażenie przed znakiem równości oznacza rzut naprężeń stycznych na kierunek normalnej zewnętrznej)



## Projektowanie

Jedynie 3 elementy macierzy naprężenia (uwzględniając symetrię: 2 elementy) są niezależne, pozostałe nie mają praktycznego znaczenia. Projektowanie z warunku wytrzymałościowego polega na spełnieniu nierówności:

$$\max(\sigma_x) \leq R, \quad \max(\tau_{xz}) \leq R_t,$$

gdzie  $R_t$  oznacza wytrzymałość obliczeniową na ścinanie. Dla materiałów plastycznych, takich jak np. stal, zazwyczaj wytrzymałość na ścinanie stanowi ok.  $0.5 - 0.577 R^1$

Ekstremalnych naprężeń normalnych poszukujemy w przekroju występowania największego co do bezwzględnej wartości momentu zginającego, we włóknach najbardziej oddalonych od osi obojętnej  $y$ .

Ekstremalnych naprężeń stycznych poszukujemy w przekroju występowania największej siły poprzecznej, we włóknach dla których naprężenia ścinające przyjmują wartość ekstremalną (najczęściej jest to oś główna centralna  $y$ ).

## Przykład

Określić stosunek maksymalnego naprężenia normalnego do maksymalnego naprężenia stycznego dla wspornika o przekroju prostokątnym, obciążonego siłą na końcu.

Rozwiązanie:

$$M_{\max} = Pl, Q_{\max} = P, \sigma_{\max} = \frac{6Pl}{bh^2}, \tau_{\max} = 1.5 \frac{P}{bh}, \frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 4 \frac{l}{h}$$

Jak widać dla przeciętnej belki naprężenia styczne są wielokrotnie mniejsze od naprężeń normalnych i mimo, że wytrzymałość obliczeniowa na ścinanie jest z reguły mniejsza od wytrzymałości obliczeniowej dla naprężeń normalnych, warunkiem wymiarującym przekrój jest warunek na naprężenia normalne.

<sup>1</sup> wartości te wynikają ze wzoru na naprężenia zredukowane wg hipotez C-T-G i H-M-H

Dlatego projektowanie przekroju najczęściej przebiega w ten sposób, że najpierw projektujemy przekrój ze względu na naprężenia normalne a następnie sprawdzamy jedynie naprężenia styczne.

Rozkład naprężeń stycznych w przekroju prostokątnym

$$\tau_{xz} = \frac{Q \left( \frac{h}{2} \frac{h}{4} - \frac{z^2}{2} \right) b}{\frac{bh^3}{12} b} = \frac{3Q \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right]}{2bh}, \quad \max(\tau_{xz}) = \tau_{xz}(z=0) = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}$$

Rozkład naprężeń jest paraboliczny, z maksimum w połowie wysokości prostokąta.

Rozkład naprężeń stycznych w przekroju kołowym

$$\max \tau_{xz} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}$$

Rozkład jest również paraboliczny.

Rozkład naprężeń stycznych w przekroju trójkątnym

$$b(z) = \frac{2}{3}b - \frac{b}{h}z, \quad h(z) = \frac{2}{3}h - z, \quad \frac{S_y(z)}{b(z)} = \frac{1}{2}h(z) \left( z + \frac{h(z)}{3} \right)$$

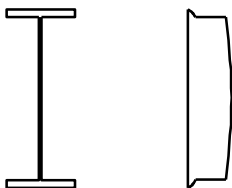
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{2}{3}h - z \right) \left( \frac{2}{9}h + \frac{2}{3}z \right) \right] = 0 \Rightarrow z = \frac{h}{6}$$

$$\max(\tau_{xz}) = \frac{Q}{J_y} \frac{h^2}{12} = \frac{36Q}{bh^3} \frac{h^2}{12} = 3 \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}$$

Maksimum naprężeń wystąpi w połowie wysokości trójkąta (dla  $z = h/6$ ).

Rozkład naprężeń stycznych w przekroju dwuteowym

Profil spawany IPES 600 huty „Pokój” ma wymiary: wysokość całkowita 600 mm, szerokość półek 220 mm, grubość środnika 8 mm, wysokość półek 23 mm. Określić część siły poprzecznej przenoszanej przez środnik.



Moment statyczny w środniku:  $S_y(z) = 1460 + 306 - 4z^2$ ,

stosunek naprężeń maksymalnych do minimalnych w środniku wynosi 1.21 a więc wykres naprężeń stycznych w środniku jest „płaski” (naprężenia są prawie stałe).

Siła poprzeczna jaka jest przenoszona przez środnik wynosi:

$$Q = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{QS_y(z)}{J_y b} dz = \frac{92200}{95600} Q = 0.965Q \text{ i stanowi 96.5\% całkowitej siły}$$

Przy przenoszeniu ścinania pracuje więc przede wszystkim środnik.

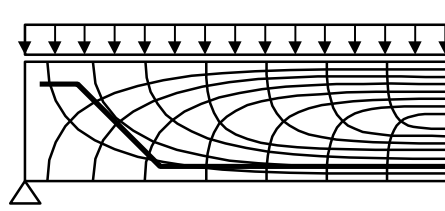
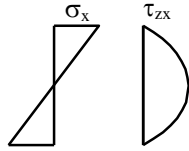
Przykład - trajektorie naprężeń głównych

Zaprojektować belkę jednoprzęsłową  $l = 4$  m, o przekroju poprzecznym  $a \times 2a$ , obciążoną obciążeniem ciągłym  $q = 90$  kN/m.  $R = 300$  MPa,  $R_t = 100$  MPa.

Projektowanie:  $M_{\max} = ql^2/8 = 90 \cdot 10^3 \cdot 4^2 / 8 = 180$  kNm,  $W_y = a(2a)^2 / 6 = 2/3 a^3$

$$\frac{180 \cdot 10^3}{2a^3} \leq 300 \cdot 10^6 \Rightarrow a^3 \geq \frac{180 \cdot 10^3}{2 \cdot 300 \cdot 10^6} \Rightarrow a \geq 0.0965\text{m} \cong 0.1\text{m}$$

Sprawdzenie naprężeń stycznych:  $Q_{\max} = 180 \text{ kN}$ ,  $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{180 \cdot 10^3}{0.1 \cdot 0.2} = 13.5 \text{ MPa} < R_t$



Naprężenia główne:

- we włóknach skrajnych istnieją jedynie naprężenia normalne, kierunki główne pionowo i poziomo
- w osi obojętnej istnieją jedynie naprężenia styczne, kierunki

główne są obrócone pod kątem  $45^\circ$

- dla dowolnego  $z$ :  $\text{tg } \alpha_1 = \frac{\tau}{\sigma_1}$

**Trajektorie naprężeń głównych są to rodziny wzajemnie prostopadłych linii stycznych w każdym punkcie do kierunków głównych.**

Obraz trajektorii naprężeń głównych belki pokazuje rysunek.