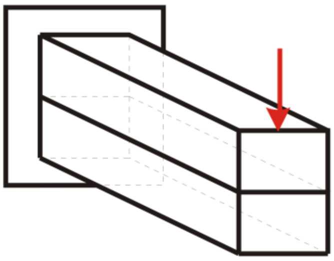
Belki złożone i zespolone

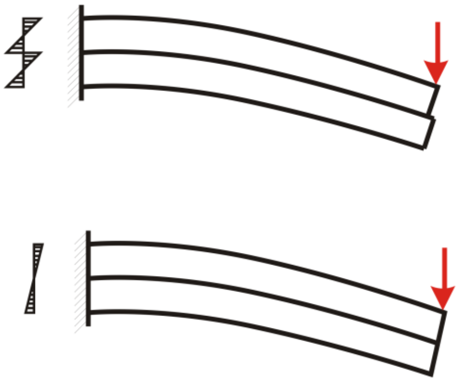
definicja belki złożonej, siła rozwarstwiająca, projektowanie połączeń, przykłady obliczeń, definicja belki zespolonej, założenia technicznej teorii zginania, rozkład naprężeń normalnych, przykład obliczeń

Belki złożone

Belką złożoną nazywamy belkę, której przekrój poprzeczny składa się z kilku współpracujących elementów, wykonanych z jednego materiału.

Porównajmy pracę 2 przekrojów poprzecznych składających się z 2 prostokątów o łącznym wymiarze b×h: pracujących niezależnie i połączonych w sposób zapewniający wspólną pracę.





W pierwszym przypadku belka górna wymuszać będzie takie same ugięcia belki dolnej, a więc każda z belek przenosić będzie połowę momentu zginającego. Wobec tego: $J_y = 2\,b(h/2)^3/12 = bh^3/48$, $W_y = bh^2/24$, $\sigma_x = 0.5M_y/W_y = 12M/bh^2$. W drugim przypadku: $J_y = bh^3/12$, $W_y = bh^2/6$, $\sigma_x = M_y/W_y = 6M/bh^2$.

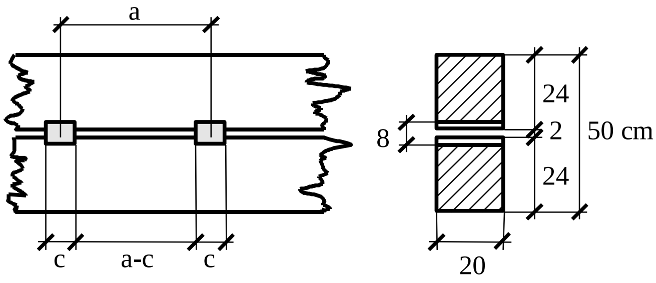
Jak więc widać w drugim przypadku maksymalne naprężenia normalne będą 2-krotnie mniejsze.

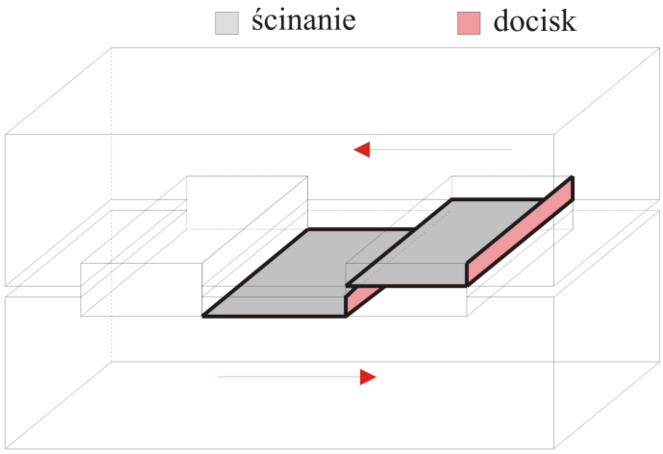
Istotne jest to, że elementy są połączone ze sobą w sposób uniemożliwiający wzajemne przesunięcia powierzchni kontaktu. Aby zlikwidować wzajemne przesunięcia w płaszczyźnie połączenia, należy zapewnić odpowiednią wytrzymałość połączenia. Wprowadzimy pojęcie *siły rozwarstwiającej* t_R, czyli poziomej siły przypadającej na jednostkę długości belki wzdłuż płaszczyzny połączenia:

$$t_R = \tau_{zx} b = \frac{QS_y(z)}{J_y}.$$

Przykład - belka drewniana

Drewniana belka składa się z dwóch sosnowych bali o przekrojach 0.2 x 0.24 m, połączonych ze sobą za pomocą śrub (które nie przenoszą ścinania), oraz prostokątnych klinów. Belka leży na 2 podporach oddalonych od siebie o 6 m i obciążona jest w środku przęsła siłą 60 kN. Określić rozmiary *c* i liczbę klinów *n*, jeśli R_d = 7 MPa (na docisk), R_t = 1.5 MPa (na ścinanie).





Płaszczyzny docisku i ścinania

$$Q=\text{const}=\pm 30\text{kN},\quad S_y=20\cdot 24\cdot 13=6240\text{cm}^3,\quad J_y=\tfrac{20\cdot 50^3}{12}-\tfrac{20\cdot 2^3}{12}=208000\text{cm}^4$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\frac{30\cdot 10^3\cdot 6240\cdot 10^{-6}}{208000\cdot 10^{-8}\cdot 0.2}=0.45\text{MPa}$$

Całkowita siła rozwarstwiająca w belce $T = t_R\, l$ = 540 kN.

Ilość klinów obliczamy z warunku na dopuszczalne naprężenia ściskające:

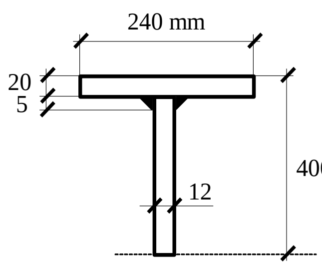
$$\sigma_d=\frac{T}{nF_d}\le R_d,\quad \Rightarrow\quad n=\frac{T}{R_dF_d}=\frac{540\cdot 10^3}{7\cdot 10^6\cdot 0.03\cdot 0.2}=12.86,\ \text{przyjmujemy 13 klinów}$$

Rozmiar c klinów przyjmujemy z warunku na dopuszczalne naprężenia ścinające:

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\tfrac{3}{2}\frac{T}{nF_t}=\tfrac{3}{2}\frac{T}{ncb}\le R_t,\quad \Rightarrow\quad c=\tfrac{3}{2}\frac{T}{nR_tb}\approx 21\text{ cm}$$

14 odcinków *(a-c)* między klinami i na zewnątrz belki daje: *(a-c)* = (600-13×21)/14 = 23.3 > 21 cm, a więc materiał belki również nie ulegnie ścięciu dla a = 21 + 23.3 = 44.3 cm.

<u>Przykład - blachownica</u>



Sprawdzić wytrzymałość spawanej belki, leżącej swobodnie na 2 podporach i obciążonej obciążeniem ciągłym 40 kN/m na całej długości, oraz 2 siłami P = 480 kN przyłożonymi w odległości 1 m od podpór. Długość belki wynosi 8 m, R = 160 MPa, R_t = 100 MPa, wysokość każdej ze spoin pachwinowych h = 0.7 x 5 mm. Przekrój poprzeczny dwuteowy jak na rysunku (wymiary w mm).

M_{max} = 800 kNm, Q_{max} = 640 kN,

momenty statyczne: półki S_y = 1970 cm^3, 1/2 przekroju S_y = 2930 cm^3,

moment bezwładności J_y = 214000 cm^4, W_y = 5100 cm^3.

Sprawdzenie wytrzymałości przekroju:

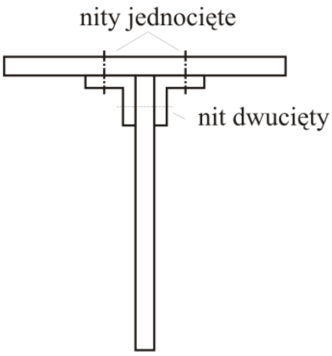
a) naprężenia normalne: $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} = 157 \text{ MPa} < R$

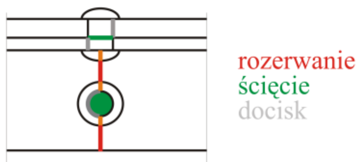
b) naprężenia styczne: $\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_y(z=0)}{J_y b} = \frac{640 \cdot 10^3 \cdot 2930 \cdot 10^{-6}}{214000 \cdot 10^{-8} \cdot 0.012} = 73.02 \text{ MPa} < R_t$

c) ścięcie spoiny: $\tau = \frac{Q S_y(z=380)}{J_y 2 \cdot 0.7 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = \frac{640 \cdot 10^3 \cdot 1970 \cdot 10^{-6}}{214000 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 0.7 \cdot 0.005} = 84.17 \text{ MPa} < R_t$.

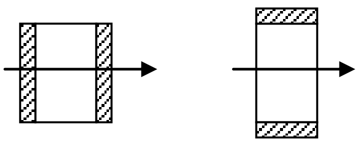
Połączenia nitowane

Podobnie projektujemy połączenia nitowane, sprawdzając: przekrój belki na naprężenia normalne (od zginania), przekrój belki na naprężenia styczne (od siły poprzecznej), nity na docisk (od siły przenoszonej przez nit), nity na ścinanie (j.w.), materiał łączony na ścinanie nitami (j.w.), materiał łączony na docisk (jak dla nitów), materiał łączony na rozerwanie (osłabiony otworami na nity). Zależnie od charakteru pracy rozróżniamy nity jedno-, dwu- i wielocięte.





Wzmacnianie przekroju

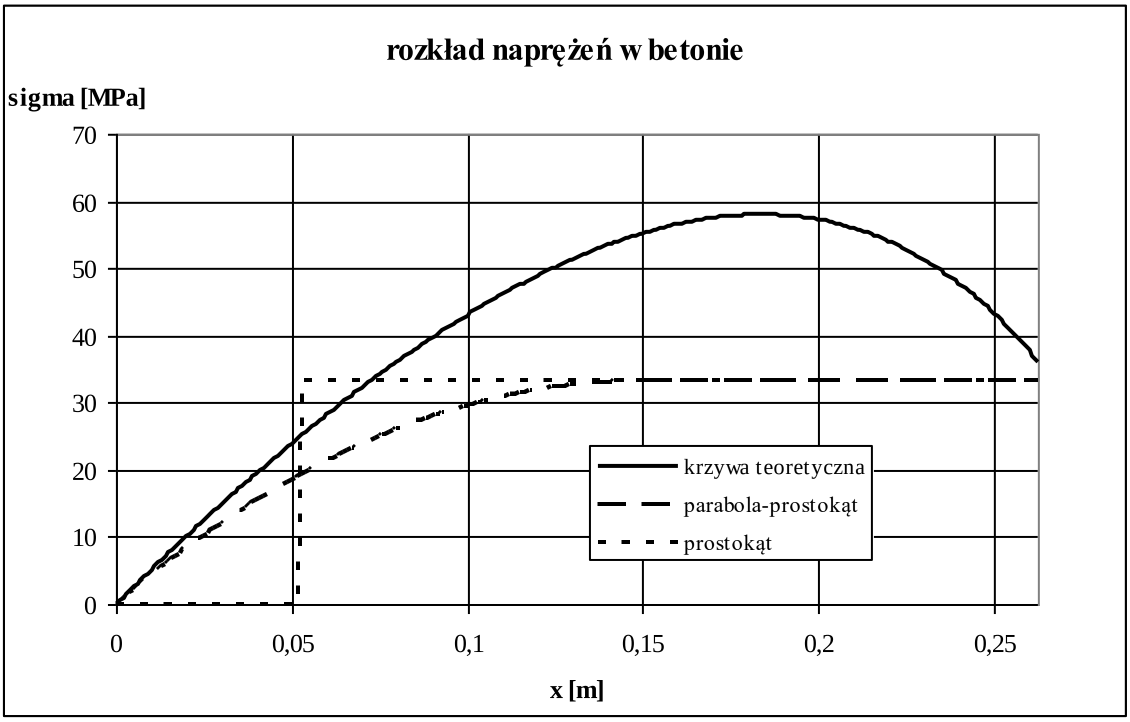


Dla dwóch rodzajów wzmocnienia, jak na rysunku powyżej, siły rozwarstwiające występujące pomiędzy przekrojem pierwotnym i wzmocnieniem różnią się w sposób istotny. Dla przekroju wzmacnianego jak po lewej stronie, naprężenia ścinające są pomijalne (poza otoczeniem punktu przyłożenia obciążenia skupionego), podczas gdy dla przypadku z prawej – naprężenia ścinające wynikające z istnienia sił rozwarstwiających są istotne i nie do pominięcia.

Obliczenia przekroju żelbetowego według Eurokodu 2

Zgodnie z normą żelbetową, zarówno beton jak i stal zbrojeniowa, są materiałami sprężysto-plastycznymi.

Dla betonu zależność pomiędzy odkształceniami i naprężeniami ściskającymi jest nieliniowa. W obliczeniach na nośność rozkład naprężeń ściskających może być przyjmowany jako parabola-prostokąt bądź jako prostokątny.

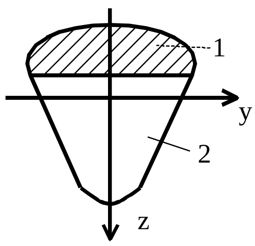


Stal zbrojeniowa opisywana jest modelem Prandtla bez wzmocnienia (bez limitu odkształceń) bądź z liniowym wzmocnieniem (i wówczas przyjmowany jest limit dopuszczalnych odkształceń).

Belki zespolone

Belką zespoloną nazywamy belkę, której przekrój poprzeczny składa się z różnych materiałów, przy czym powierzchnia żadnego z nich nie jest mała

Nie chodzi więc o żelbetowe konstrukcje prętowe, gdzie powierzchnia zbrojenia jest mała w stosunku do powierzchni betonu.



Założenia technicznej teorii zginania:

1. hipoteza płaskich przekrojów $\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \kappa z$
2. (jednoosiowy stan naprężenia) $\sigma_x >> \sigma_y, \sigma_z$

Dodatkowo zakładamy pionową oś symetrii przekroju

Stosowalność hipotezy płaskich przekrojów zależy od prawidłowego połączenia konstrukcyjnego obu materiałów tak, aby spełnić warunki zgodności odkształceń: $\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2}$

Z warunków równoważności otrzymujemy:

$$N = \iint_{F_1} \sigma_1 dF + \iint_{F_2} \sigma_2 dF = E_1F_1\varepsilon_0 + E_1S_1\kappa + E_2F_2\varepsilon_0 + E_2S_2\kappa = (E_1F_1 + E_2F_2)\varepsilon_0 + (E_1S_1 + E_2S_2)\kappa$$

$$M = \iint_{F_1} \sigma_1 z dF + \iint_{F_2} \sigma_2 z dF = E_1S_1\varepsilon_0 + E_1J_1\kappa + E_2S_2\varepsilon_0 + E_2J_2\kappa = (E_1S_1 + E_2S_2)\varepsilon_0 + (E_1J_1 + E_2J_2)\kappa .$$

Poszukujemy takiej osi y^*, aby $(E_1\hat{S}_1 + E_2\hat{S}_2) = 0$, gdzie daszek oznacza moment statyczny liczony względem nowej osi. Niech odległość nowej osi od osi głównej centralnej wynosi z_w (zgodnie ze zwrotem osi z). Z twierdzenia Steinera: $\hat{S} = S - Fz_0$, otrzymujemy:

$$E_1S_1 - E_1F_1z_0 + E_2S_2 - E_2F_2z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_w = \frac{E_1S_1 + E_2S_2}{E_1F_1 + E_2F_2}$$

Tę nową oś wraz z osią symetrii będziemy nazywać *osiami ważonymi*. Równania równowagi, zapisane względem układu osi ważonych, przyjmują postać:

$$N = (E_1F_1 + E_2F_2)\varepsilon_0, \quad \hat{M} = (E_1\hat{J}_1 + E_2\hat{J}_2)\kappa$$

gdzie daszek ^ oznacza wielkości liczone względem osi ważonej. Jak widać, przyjęcie układu związanego z osiami ważonymi umożliwia separację rozciągania i zginania. Oś ważona y^* (zginania) określa włókna przekroju, których odkształcenie liniowe (wydłużenie lub skrócenie względne) zależy jedynie od siły podłużnej, a ich krzywizna — od momentu zginającego.

Wprowadźmy definicje ważonych charakterystyk geometrycznych:

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} \equiv n, \quad F^* \equiv nF_1 + F_2, \quad S^* \equiv nS_1 + S_2, \quad J^* \equiv n\hat{J}_1 + \hat{J}_2}$$

gdzie wagi odnoszą się do modułów Younga.

Położenie osi ważonej możemy teraz zapisać: $z_w = \frac{S^*}{F^*}$, a warunki równoważności:

$$N = \varepsilon_0 F^* E_2, \quad \hat{M} = \kappa J^* E_2, \quad \text{gdzie } \hat{M} = M - Nz_w$$

Obliczamy parametry rozkładu odkształceń:

$$\boxed{\varepsilon_0 = \frac{N}{E_2F^*}, \quad \kappa = \frac{\hat{M}}{E_2J^*}, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E_2}\left(\frac{N}{F^*} + \frac{\hat{M}}{J^*}z\right)}$$

oraz naprężenia wraz z położeniem osi obojętnej:

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon = n\left(\frac{N}{F^*} + \frac{\hat{M}}{J^*}z\right) = n\sigma_2$$

$$\sigma_2 = E_2\varepsilon = \frac{N}{F^*} + \frac{\hat{M}}{J^*}z$$

Równanie osi obojętnej ma postać:

$$\sigma_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = -\frac{N}{\hat{M}}\frac{J^*}{F^*} (= 0 \text{ dla } N = 0).$$

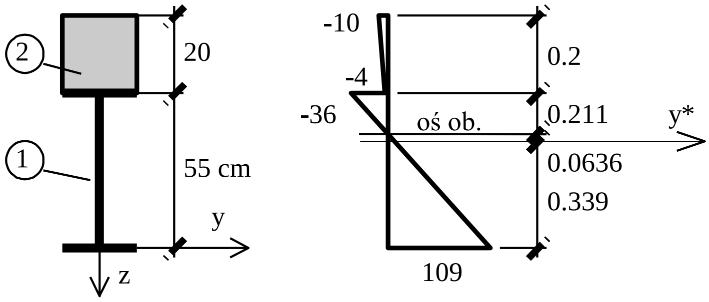
W powyższych wzorach z jest mierzone od osi ważonej.

Obliczając rozkład naprężenia w przekroju zespolonym, możemy zastąpić przekrój rzeczywisty przekrojem sprowadzonym, w którym szerokość części wykonanej z materiału *1* powiększamy *n*-krotnie.

Jest to sposób zalecany przez normę międzynarodową Eurocode.

Przykład

Określić rozkład naprężenia dla belki o przekroju jak na rysunku, obciążonym N = 500 kN (rozciąganie) oraz M = 490.5 kNm (dolne włókna rozciągane), dla danych:



1. stal St3S, E = 210 GPa, h = 55 cm, J_y = 99180 cm^4, F = 213 cm^2,
2. beton B20, E = 23 GPa, F = 400 cm^2.

Rozwiązanie:

Obliczamy: $n = E_1/E_2 = 9.13$,

oś ważona: $z^* = (9.13•0.0213•0.275+0.04•0.65)/(9.13•0.0213+0.04) = 0.339$ m

oś geometryczna: $z_{geom} = (0.0213•0.275+0.04•0.65)/(0.0213+0.04) = 0.520$ m

charakterystyki ważone:

$F^* = 9.13•0.0213+0.04 = 0.2345$ m^2

$J^* = 9.13•[9.918•10^{-4}+0.0213•(0.339-0.275)^2]+0.2^4/12+0.04•(0.65-0.339)^2 = 0.01385$ m^4

redukcja momentu do osi ważonej z: $\hat{M} = 490.5 - 500•(0.52 - 0.339) = 400$ kNm

naprężenia:

$\sigma_1 = 19.5 + 263.7z$, $\sigma_1(-0.211) = -36.2$ MPa, $\sigma_1(0.339) = 108.9$ MPa

$\sigma_2 = 2.13 + 28.9z$, $\sigma_2(-0.411) = -9.7$ MPa, $\sigma_2(-0.211) = -4.0$ MPa

Rozkład naprężeń normalnych w przekroju zespolonym przedstawia rysunek.