# Ugięcia belek

*metoda analityczna, Clebscha i Mohra*

## Metoda analityczna

Będziemy posługiwali się tzw. *techniczną teorią zginania*, opierającą się na założeniach:

- hipotezy płaskich przekrojów Bernoulliego
- małych pochodnych przemieszczeń.

*Przemieszczenia osi belki obliczone na podstawie zlinearyzowanych związków nazywamy* ugięciami.

Jak wiadomo, zależność między promieniem krzywizny osi belki zginanej, jej krzywizną i momentem zginającym jest następująca:

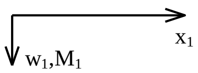
$$\frac{1}{\rho(x)} = \kappa(x) = \frac{|M(x)|}{EJ_y}.$$

Z kolei z matematyki wiemy, że krzywizna krzywej wyraża się wzorem:

$$\kappa(x) = |w''(x)| \Big/ \left(1 + w'^2\right)^{3/2} \approx |w''(x)|,$$

skąd otrzymujemy:

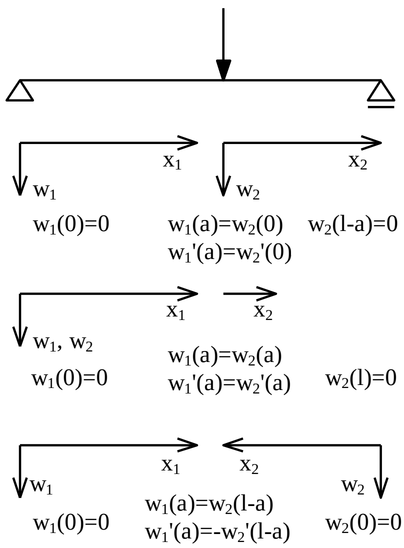
$$\boxed{EJ_y w''(x) = -M(x)}$$




Znak w powyższym wzorze wynika z uzgodnienia układów osi ugięć i momentów zginających, jak na rysunku. Równanie rozwiązujemy poprzez dwukrotne całkowanie w każdym z przedziałów charakterystycznych *M(x)* i wykorzystujemy *kinematyczne warunki brzegowe* na granicach tych przedziałów, np. dla podpory mamy $w(x_p) = 0$, a dla utwierdzenia (pełnego lub poziomo przesuwnego) $w(x_u) = w'(x_u) = 0$.

Szczególnym przypadkiem warunków brzegowych są *warunki zszycia*, czyli *zgodności* ugięć i ich pochodnych na granicach przedziałów. Zgodność ugięć jest oczywista i wynika z założenia o ośrodku ciągłym. Zgodność pochodnych ugięć musi być również zachowana: brak zgodności oznaczałby załamanie osi pręta, czyli zerowy promień krzywizny (nieskończenie wielką krzywiznę). Miałoby to miejsce jedynie dla $M(x) \to \infty$, albo dla $J_y = 0$. Oba przypadki są jedynie teoretyczne. Pierwszy oznacza złamanie belki (poprzez przekroczenie dopuszczalnych naprężeń), drugi — wiotką belkę (cięgno). Tak więc, jeśli nie ma przegubu i osie *x*, *w* są zgodnie skierowane, mamy:

$$w_1(x_a) = w_2(x_a), \quad w_1'(x_a) = w_2'(x_a).$$




Jeśli na belce występuje przegub, warunki zgodności dotyczą jedynie ugięcia, ponieważ kąty ugięć (pochodne ugięć) mogą być (i są najczęściej) różne:

$w_1(x_a) = w_2(x_a), \quad w_1'(x_a) \neq w_2'(x_a)$.

Przykład

Określić ugięcia belki jednoprzęsłowej, obciążonej w środku siłą skupioną *P*.

Rozwiązanie:

przedział $0 < x_1 < l/2$: $M(x_1) = \frac{P}{2} x_1 \quad \Rightarrow \quad EJ_y w_1(x_1) = -\frac{P}{12} x_1^3 + C_1 x_1 + D_1$,

przedział $0 < x_2 < l/2$: $M(x_2) = \frac{P}{2} x_2 \quad \Rightarrow \quad EJ_y w_2(x_2) = -\frac{P}{12} x_2^3 + C_2 x_2 + D_2$,

warunki brzegowe i zgodności: $w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = 0, \quad w_1(\frac{l}{2}) = w_2(\frac{l}{2}), \quad w_1'(\frac{l}{2}) = -w_2'(\frac{l}{2})$,

skąd mamy: $D_1 = D_2 = 0, \quad C_1 = C_2, -\frac{P}{16} l^2 + C_1 = \frac{P}{16} l^2 - C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{P}{16} l^2$.

Ostatecznie wzór na ugięcia belki zapiszemy: $EJ_y w(x) = -\frac{P}{12} x^3 + \frac{P}{16} l^2 x$. Maksymalne ugięcie belki nazywane *strzałką ugięcia* wystąpi w środku rozpiętości przęsła i wyniesie:

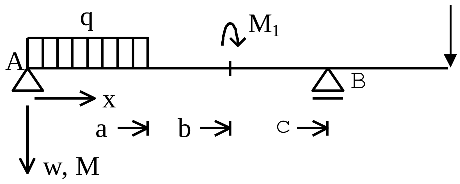
$$f = w(\tfrac{l}{2}) = \frac{Pl^3}{48EJ_y}.$$

**Metoda Clebscha**

Metoda przedstawiona powyżej jest rachunkowo uciążliwa, jeśli na belce występuje wiele przedziałów charakterystycznych równania momentu zginającego. Dla *n* przedziałów liczba stałych całkowania wynosi *2+2(n-1) = 2n*. Rozwiązanie znacznie się upraszcza, jeśli odpowiednio przyjmiemy obliczeniowy układ współrzędnych i w szczególny sposób zapiszemy równania, wg metody podanej przez A. Clebscha:

1. Przyjmujemy dla wszystkich przedziałów jednolity układ współrzędnych *w, M-x*.
2. Równanie w *i*-tym przedziale zapisujemy w taki sposób, aby równanie to zawierało równanie z poprzedniego przedziału *i*-1 (szczegóły w przykładzie poniżej). W ten sposób automatycznie zapewniamy spełnienie warunków zgodności.
3. Zamiast pisać osobno równania dla każdego przedziału, piszemy jedno równanie zaznaczając zakres jego obowiązywania. Stałe całkowania, wspólne dla każdego przedziału, piszemy na początku równania (aby nie zapomnieć, że obowiązują dla każdego z przedziałów).
4. Wyrażenia typu $(x - a_i)^n$, które występują w każdym członie każdego przedziału (poza pierwszym), całkujemy poprzez zmianę zmiennych: $y = x - a_i, \quad dy = dx$.
5. Jeśli na belce występuje skokowa zmiana sztywności lub przegub, metodę tę stosujemy osobno dla każdej z części belki, wyznaczonej przez te przekroje. Punktami charakterystycznymi metody są przekroje zmiany sztywności belki i przeguby (oraz oczywiście początek i koniec belki).

Przykład




Równania zapisujemy:

$$M(x) = R_A x - \tfrac{1}{2} q x^2 \Big|_{x<a} + \tfrac{1}{2} q (x-a)^2 \Big|_{x<b} + M_1 (x-b)^0 \Big|_{x<c} + R_B (x-c)$$

$$EJ_y w''(x) = -R_A x + \tfrac{1}{2} q x^2 \Big|_{x<a} - \tfrac{1}{2} q (x-a)^2 \Big|_{x<b} - M_1 (x-b)^0 \Big|_{x<c} - R_B (x-c)$$

$$EJ_y w'(x) = C - \tfrac{1}{2} R_A x^2 + \tfrac{1}{6} q x^3 \Big|_{x<a} - \tfrac{1}{6} q (x-a)^3 \Big|_{x<b} - M_1 (x-b) \Big|_{x<c} - \tfrac{1}{2} R_B (x-c)^2$$

$$EJ_y w(x) = Cx + D - \tfrac{1}{6} R_A x^3 + \tfrac{1}{24} q x^4 \Big|_{x<a} - \tfrac{1}{24} q (x-a)^4 \Big|_{x<b} - \tfrac{1}{2} M_1 (x-b)^2 \Big|_{x<c} - \tfrac{1}{6} R_B (x-c)^3$$

Stałe całkowania $C$ i $D$ wyznaczamy z warunków brzegowych: $w(0) = w(c) = 0$, czyli

$$D = 0, \quad Cc - \tfrac{1}{6} R_A c^3 + \tfrac{1}{24} q c^4 - \tfrac{1}{24} q (c-a)^4 - \tfrac{1}{2} M_1 (c-b)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \ldots$$

Metodę Clebscha opłaca się stosować do belek z dowolnym obciążeniem ale o niewielkiej liczbie przedziałów charakterystycznych metody. W pozostałych przypadkach prościej można uzyskać rozwiązanie metodą O. Mohra.

**Metoda Mohra**

Metoda polega na wykorzystaniu analogii między równaniami:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ_y}.$$

Jeśli przyrównamy prawe strony równań:

$$q^f(x) = \frac{M(x)}{EJ_y},$$

to lewe strony też będą równe, $w''(x) = M''(x)$. Nie oznacza to jednak równoważności rozwiązań, $M(x) = w(x)$. Równoważność taką uzyskamy, jeśli po wykonaniu całkowania:

$$w(x) + C_1 x + D_1 = M(x) + C_2 x + D_2,$$

stałe całkowania też będą równe, a więc gdy $C_1 = C_2, \quad D_1 = D_2$, czyli gdy kinematycznym warunkom brzegowym równania ugięcia będą odpowiadały statyczne warunki brzegowe równania momentu zginającego. Tak więc zamiast rozwiązywać równanie ugięć belki możemy rozwiązać równanie momentu. Sens takiej zamiany polega na tym, że — jak pamiętamy z kursu statyki — równanie momentu zginającego rozwiązywaliśmy zazwyczaj wykorzystując tw. o równoważności układów sił zewnętrznych i wewnętrznych a nie drogą całkowania równania.

Istota metody polega na zamianie belki rzeczywistej tzw. *belką fikcyjną*, o statycznych warunkach brzegowych odpowiadających kinematycznym warunkom brzegowym belki rzeczywistej i obciążeniu belki fikcyjnej fikcyjnym obciążeniem $q^f(x)$. Momenty zginające w belce fikcyjnej pochodzące od obciążenia fikcyjnego (tzw. momenty wtórne, fikcyjne) będą liczbowo równe ugięciom belki rzeczywistej, podobnie wtórne siły poprzeczne (fikcyjne) będą równe kątom ugięcia belki rzeczywistej:

$$M^f(x) \equiv w(x), \quad Q^f(x) \equiv w'(x).$$

Postępowanie w metodzie Mohra sprowadza się do wykonania następujących kroków:

1. określenia wykresu M(x) belki danej (rzeczywistej),
2. skonstruowania belki fikcyjnej,
3. obciążenia belki fikcyjnej wykresem momentów belki rzeczywistej, podzielonym przez sztywność zginania (belki rzeczywistej),
4. obliczenia wtórnych momentów i sił poprzecznych w belce fikcyjnej.

Dobór belki fikcyjnej wynika z porównania kinematycznych warunków brzegowych belki rzeczywistej ze statycznymi warunkami belki fikcyjnej:

– podpora na końcu belki

$w = 0, \quad w' \neq 0 \quad \Rightarrow \quad M^f = 0, \quad Q^f \neq 0$ (podpora)

– podpora nie na końcu belki

$w = 0, \quad w'_L = w'_P \neq 0 \quad \Rightarrow \quad M^f = 0, \quad Q^f{}_L = Q^f{}_P \neq 0$ (przegub)

– przegub

$w_L = w_P \neq 0, \quad w'_L \neq w'_P \quad \Rightarrow \quad M^f{}_L = M^f{}_P \neq 0, \quad Q^f{}_L \neq Q^f{}_P$ (podpora)

– utwierdzenie

$w = w' = 0 \quad \Rightarrow \quad M^f = Q^f = 0$ („swobodny koniec”)

– utwierdzenie pionowo przesuwne

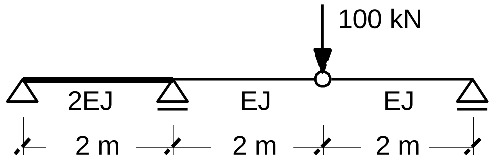
$w \neq 0, \quad w' = 0 \quad \Rightarrow \quad M^f \neq 0, \quad Q^f = 0$ (utwierdzenie pionowo przesuwne)

– swobodny koniec

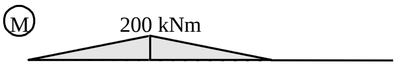
$w \neq 0, \quad w' \neq 0 \quad \Rightarrow \quad M^f \neq Q^f \neq 0$ (utwierdzenie)

**Przykład**

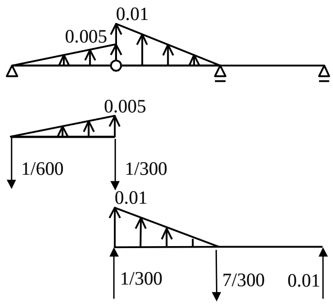
Obliczyć ugięcie i kąty ugięcia belki w przegubie, $EJ = 200 \bullet 10^5$ Nm$^2$:




Belka fikcyjna i rozbicie na belki proste:



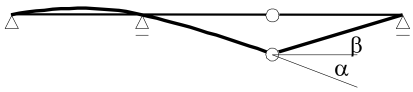

$M^f = (2/3 + 2\ 2/3)\ 10^{-2} = 0.02$ m = 2 cm,



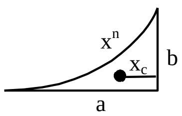

$Q^f_L = 4/3\ 10^{-2} = 0.0133 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha = 0.76°$

$Q^f_P = (4/3-7/3)\ 10^{-2} = -0.01 \;\;\Rightarrow\;\; \beta = -0.57°$

Szkic ugięć przedstawia rysunek:

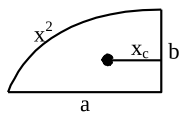



Jeżeli na belce istnieje obciążenie ciągłe, przydatne okazują się wzory geometryczne dla krzywej $x^n$ (o stycznej poziomej) oraz dla paraboli 2. stopnia (również o stycznej poziomej):




$$F = \frac{ab}{n+1}$$

$$x_c = \frac{a}{n+2}$$




$$F = \frac{2}{3}ab$$

$$x_c = \frac{3}{8}a$$

Jeśli styczna na wykresie momentów nie jest pozioma, wykorzystujemy superpozycję, sumując wykresy od poszczególnych obciążeń.