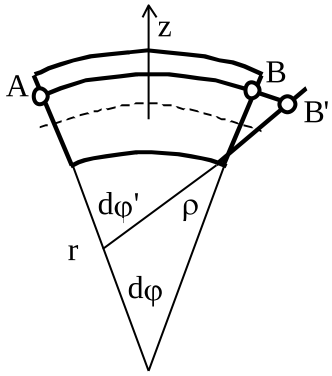
Pręty silnie zakrzywione

założenia, rozkład naprężeń normalnych, sprowadzony moment bezwładności

Dany jest pręt zakrzywiony w planie, obciążony płaskim układem sił, o przekroju z pionową osią symetrii. Przyjmijmy ponadto hipotezę płaskich przekrojów Bernoulliego oraz założenie o jednoosiowym stanie naprężenia $\sigma_x >> \sigma_y, \sigma_z$.

Wytnijmy z pręta dwoma przekrojami poprzecznymi odcinek długości *ds*., mierzonej wzdłuż osi pręta, jak na rys., o krzywiźnie *r*, i rozpatrzmy jego odkształcenia.



Długość włókna $\overline{AB}$ przed odkształceniem wynosi:

$$\overline{AB} = (r+z)d\varphi$$

a po odkształceniu (z def. odkształcenia):

$$\overline{AB'} = \overline{AB}(1+\varepsilon) = (r+z)d\varphi(1+\varepsilon).$$

Wyrażając $\overline{AB'}$ przez aktualny promień krzywizny:

$$\overline{AB'} = (\rho+z)d\varphi'.$$

Ponieważ $d\varphi = \dfrac{ds}{r}$, $\quad d\varphi' = \dfrac{(1+\varepsilon_0)ds}{\rho}$, mamy:

$$(r+z)\frac{ds}{r}(1+\varepsilon) = (\rho+z)\frac{ds}{\rho}(1+\varepsilon_0),$$

skąd wyliczamy odkształcenie rozpatrywanego włókna:

$$\varepsilon = \frac{\rho+z}{r+z}\frac{r}{\rho}(1+\varepsilon_0) - 1 + \varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \ldots = \varepsilon_0 + (1+\varepsilon_0)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)\frac{rz}{r+z}.$$

Jak widać, rozkład odkształceń nie jest liniowy mimo założenia płaskich przekrojów z uwagi na zmienna krzywiznę włókien dla różnych *z*.

Ponieważ dla jednoosiowego stanu naprężenia mamy ze związków Hooke'a $\sigma_x = E\varepsilon$, po wstawieniu do warunków równoważności, dostajemy:

$$N = \iint_F \sigma_x dF = EF\varepsilon_0 + E(1+\varepsilon_0)(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r})\iint_F \frac{rz}{r+z}dF,$$

$$M = \iint_F \sigma_x z dF = \underbrace{ES_y\varepsilon_0}_{=0} + E(1+\varepsilon_0)(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r})\iint_F \frac{rz^2}{r+z}dF.$$

Zauważmy, że: $\dfrac{z^2}{r+z} = \dfrac{z^2 + rz - rz}{r+z} = \dfrac{z(r+z) - rz}{r+z} = z - \dfrac{rz}{r+z}$.

Po wprowadzeniu oznaczenia na *sprowadzony moment bezwładności*:

$$\boxed{J^* \equiv \iint_F \frac{rz^2}{r+z}dF},$$

możemy układ równań zapisać:

$$N = EF\varepsilon_0 - E(1+\varepsilon_0)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)\frac{1}{r}J', \; M = E(1+\varepsilon_0)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)J'.$$

Obliczając zmianę krzywizny osi oraz jej odkształcenie:

$$(1+\varepsilon_0)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) = \frac{M}{EJ'}, \; \varepsilon_0 = \frac{N}{EF} + \frac{M}{EFr},$$

otrzymujemy, po wstawieniu do wyrażenia na odkształcenie i ze związków Hooke'a, wzór na naprężenia normalne:

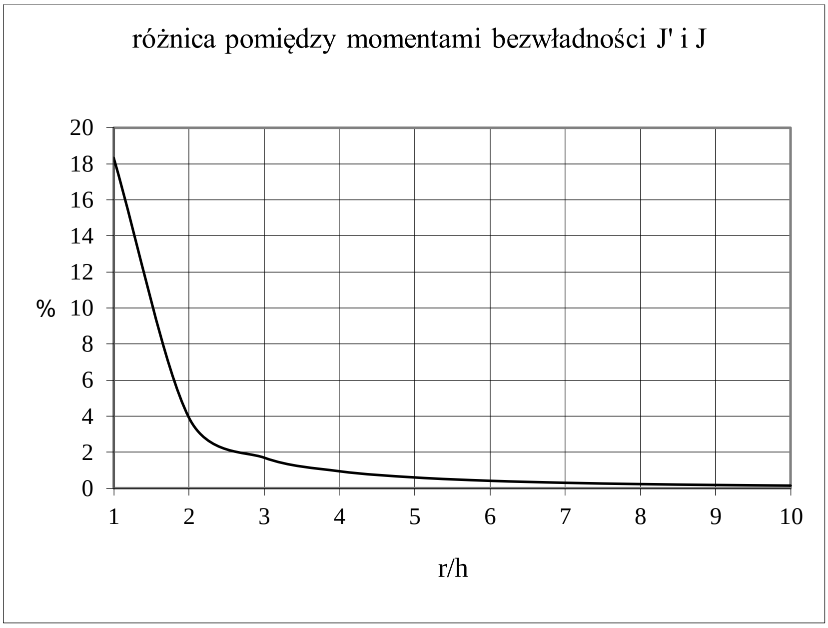
$$\boxed{\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fr} + \frac{Mr}{J^*}\frac{z}{r+z}}.$$

Jak widać, rozkład naprężeń, mimo założenia płaskich przekrojów, nie jest liniowy lecz hiperboliczny.

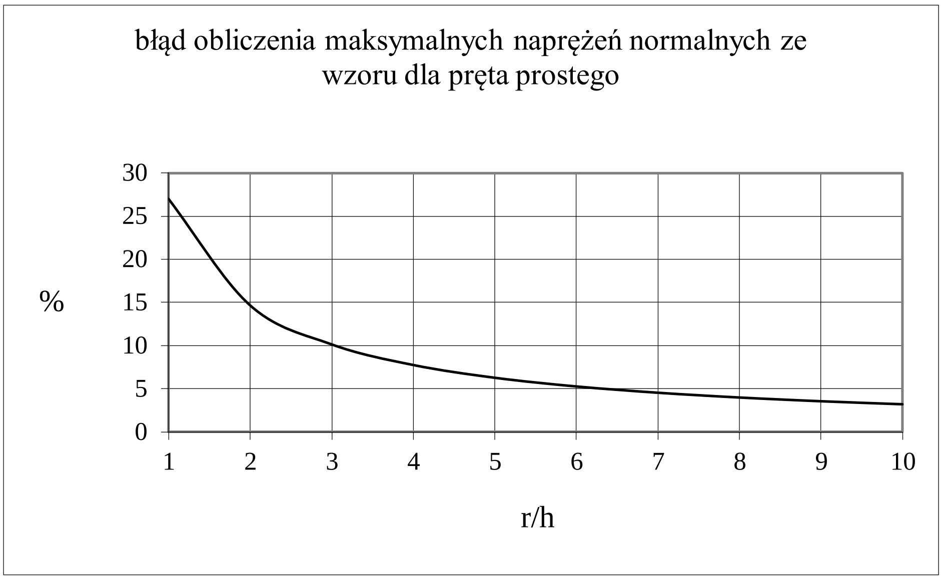
Dla przekroju prostokątnego wzór na sprowadzony moment bezwładności przyjmuje postać[1]:

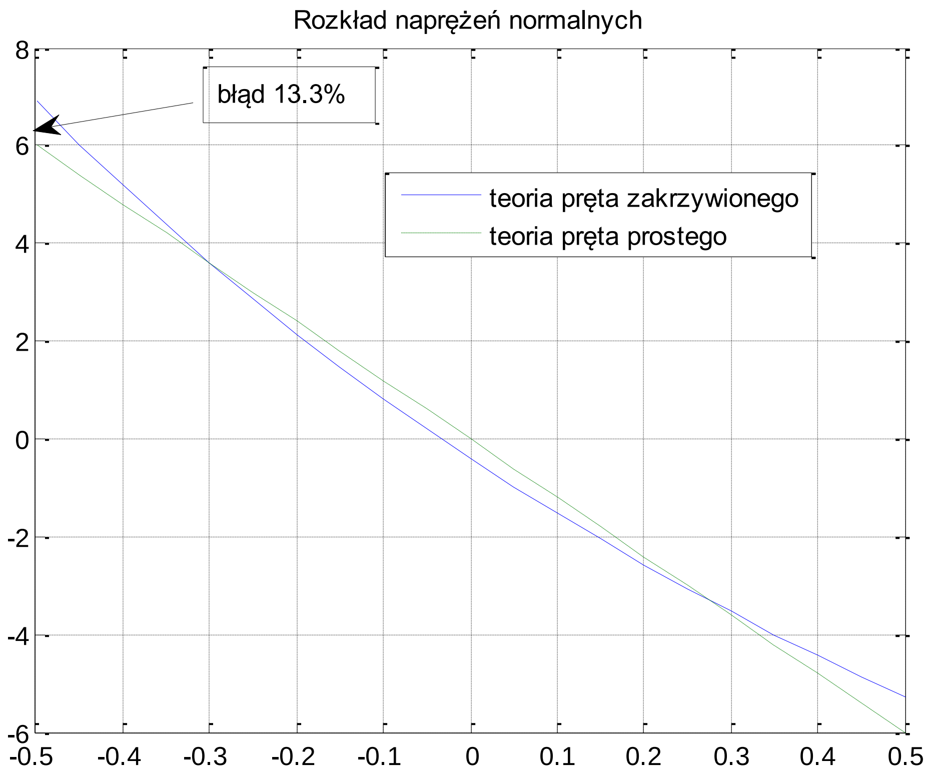
$$J^* = br^3\left(\ln\frac{r+\frac{h}{2}}{r-\frac{h}{2}} - \frac{h}{r}\right).$$

Jeśli $r \to \infty$, to szybko $J^* \to J_y$ (dla $r/h = 4$ błąd wynosi ok. 1%), i otrzymujemy znany wzór dla zginanego pręta prostego. Dla $r/h > 6$ błąd obliczenia maksymalnych naprężeń normalnych jest mniejszy od 5% i jest to praktycznie wystarczająca dokładność.



[1] z tablic całkowych mamy wzór: $\int \frac{z^2}{r+z}dz = \frac{1}{2}(r+z)^2 - 2r(r+z) + r^2\ln|r+z|$





Rozkład naprężeń normalnych dla r/h=2.5