

Skręcanie

założenia de Saint-Venanta, kąt skręcenia, jednostkowy kąt skręcenia, zagadnienie brzegowe Neumanna, moment bezwładności na skręcanie, sztywność skręcania, projektowanie, skręcanie pręta kołowego, o przekroju prostokątnym i profili cienkościennych: rozwijalnych, nierozwijalnych i zamkniętych, przykłady

Sformułowanie problemu

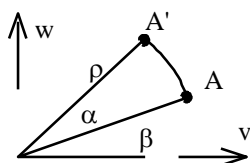
Pręt pryzmatyczny, utwierdzony w punkcie będącym początkiem układu współrzędnych, poddany jest obciążeniu, redukującemu się do momentu skręcającego (na razie bliżej nie zdefiniowanemu). Poszukiwać będziemy funkcji opisujących naprężenia i odkształcenia pręta.

Rozwiązania poszukamy podejściem kinematycznym.

Przyjmujemy, za de Saint-Venantem (1864), że odkształcenie skręcane pręta składa się z obrotu przekrojów, sztywnych w płaszczyźnie przekroju, podatnych w kierunku równoległym do osi pręta oraz z deplanacji (spaczenia), która dla wszystkich przekrojów jest jednakowa.

Reasumując, założenie polega na tym, że rzut spaczonego przekroju poprzecznego pokrywa się z przekrojem pierwotnym (tzn. doznaje jedynie obrotu) a przekrój przestaje być płaski (ulega deplanacji).

Kątem skręcenia α dwóch przekrojów nazwiemy kąt obrotu jednego przekroju względem drugiego, czyli kąt zawarty pomiędzy promieniami wodzącymi punktu przed i po deformacji. Jednostkowym kątem skręcenia θ nazwiemy kąt obrotu przypadający na jednostkę długości pręta. Pomiędzy tymi wielkościami istnieje zależność: $d\alpha/dx = \theta$, dla stałego kąta skręcenia: $\alpha = \theta x$.



$$\begin{aligned} \rho &\approx \rho', \quad \sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1, \\ v &= -\rho\alpha \sin \beta, \quad w = \rho\alpha \cos \beta, \\ v &= -\theta xz, \quad w = \theta xy, \\ u &= \theta\varphi(y, z), \end{aligned}$$

$\varphi(y, z)$ - funkcja spaczenia, niezależna od x .

Kinematyczne warunki brzegowe: $u_i(0,0,0) = 0, u_{i,j}(0,0,0) = 0$.

Zagadnienie Neumanna

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego rozpoczniemy od znalezienia macierzy odkształceń i naprężeń:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - z\right) & \frac{1}{2}\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + y\right) \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \theta G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - z\right) & \theta G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + y\right) \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Z 1. równania Naviera otrzymujemy:

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad (*)$$

pozostałe równania są spełnione tożsamościowo. Jak widać, funkcja spaczenia jest funkcją harmoniczną.

Statyczne warunki brzegowe:

– na poboczniczy:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z\right)m + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y\right)n = 0, \quad (**)$$

pozostałe spełnione tożsamościowo,

– na denkach:

$$q_{vy} = G\theta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z\right)(\pm 1), \quad q_{vz} = G\theta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y\right)(\pm 1), \quad (***)$$

(1. spełnione tożsamościowo).

Z kinematycznych warunków brzegowych w p. O, mamy: $\varphi(0,0,0) = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$.

Równanie Laplace'a (*) z jednorodnymi warunkami brzegowymi o pochodnych cząstkowych (**) stanowi tzw. zagadnienie Neumanna, dla którego istnieje rozwiązanie z dokładnością do stałej. Dla przekroju o jednej osi symetrii jest: $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$. Pozostają do spełnienia warunki na denkach (***), i wobec tego tak też definiujemy obciążenie:

$$q_{vx} = 0, \quad q_{vy} = \pm G\theta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z\right), \quad q_{vz} = \pm G\theta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y\right)$$

Dla przyjętego obciążenia na denkach, moment skręcający wynosi:

$$M_s = \iint_F (q_{vz}y - q_{vy}z) dF = \iint_F \left[G\theta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y\right)y - G\theta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z\right)z \right] dF = G\theta J_s$$

gdzie *moment bezwładności na skręcanie* definiujemy jako

$$J_s \equiv \iint_F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} z + y^2 + z^2 \right) dF$$

Ostatecznie, jednostkowy kąt skręcenia wyrazi się poprzez moment skręcający i *sztwywność skręcania* GJ_s :

$$\theta = \frac{M_s}{GJ_s}$$

Projektowanie

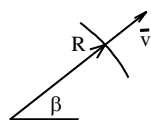
Warunki projektowania zapiszemy w postaci ogólnej:

$$\tau_{\max} \leq R_t, \quad \theta \leq \theta_{dop} \quad \text{lub} \quad \alpha_{AB} \leq \alpha_{dop},$$

gdzie R_t oznacza wytrzymałość na ścinanie, θ_{dop} dopuszczalny jednostkowy kąt skręcenia, α_{AB} .kąt skręcenia pomiędzy wyróżnionymi przekrojami a α_{dop} dopuszczalny kąt skręcenia.

Skręcanie przekroju kołowego

Statyczne warunki brzegowe na poboczniczy mają postać:



$$m = \cos \beta = \frac{y}{R}, \quad n = \sin \beta = \frac{z}{R}, \quad \text{skąd mamy: } \begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z = 0, \text{ a stąd wynika brak spa-} \\ \varphi(0,0,0) = 0, \end{cases}$$

czenia przekroju: $\varphi(y, z) \equiv 0$. Moment bezwładności na skręcanie dla przekroju kołowego:

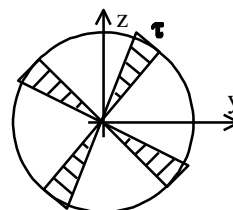
$J_s = \iint_F (y^2 + z^2) dF$, jest równy biegunowemu momentowi bezwładności:

$$J_0 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Naprężenia wyrażają się:

$$\tau_{xy} = -\frac{M_s}{J_0} z, \quad \tau_{xz} = \frac{M_s}{J_0} y, \quad \tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{M_s}{J_0} r,$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{J_0} R = \frac{M_s}{W_0},$$



gdzie $W_0 \equiv \frac{J_0}{R}$ jest *wskaznikiem na skręcanie* [m³].

Warunek wytrzymałościowy i użytkowania mają postać:

$$\frac{M_s}{W_0} \leq R_t, \quad \theta = \frac{M_s}{GJ_0} \leq \theta_{\text{dop}}.$$

Przykład 1

Pręt o średnicy 4 cm i długości 2m, utwierdzony na jednym końcu, na drugim końcu został obciążony momentem skręcającym takim, że punkt A na pobocznicy przemieścił się do punktu A'. Długość łuku AA'=1mm. Określić kąt skręcenia pręta, jednostkowy kąt skręcenia, moment skręcający, maksymalne naprężenia styczne oraz kąt odkształcenia postaciowego na pobocznicy walca. $G = 80 \text{ GPa}$.

$$\alpha = \frac{0.1}{\pi d} 2\pi = \frac{0.2}{4} = 0.05 \text{rd}, \quad \theta = \frac{\alpha}{l} = \frac{0.05}{2} = 0.025 \text{rd/m},$$

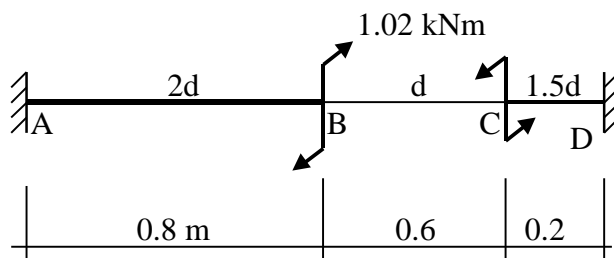
$$M_s = GJ_s \theta = 0.025 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi 0.04^4}{32} = 500 \text{Nm},$$

$$\tau_{\max} = M_s / W_0 = G \frac{d}{2} \theta = 0.025 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0.02 = 40 \text{MPa},$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{d}{2} \theta = 0.025 \cdot 0.02 = 0.0005.$$

Przykład 2 - skręcanie statycznie niewyznaczalne

Określić momenty skręcające, kąty skręcenia oraz maksymalne naprężenia styczne dla pręta jak na rysunku, $d = 4 \text{ cm}$, $G = 80 \text{ GPa}$.



Rozwiązanie:

$$\text{Równanie statyki: } M_A + M_D = 0 \Rightarrow M_A = -M_D,$$

$$\text{równanie nierozdzielności (geometryczne): } \alpha_{AD} = \alpha_{AB} + \alpha_{BC} + \alpha_{CD} = 0,$$

$$\frac{0.8M_A}{GJ_{01}} + \frac{(M_A + 1.02 \cdot 10^3) \cdot 0.6}{GJ_{02}} + \frac{M_A \cdot 0.2}{GJ_{03}} = 0, \quad J_{02} = \frac{\pi d^4}{32}, \quad J_{01} = 16J_{02}, \quad J_{03} = 5.06J_{02},$$

$$M_A = -0.89 \text{ kNm}, \quad M_D = 0.89 \text{ kNm}, \quad M_{BC} = 0.13 \text{ kNm}.$$

$$\alpha_{BA} = \frac{M_A \cdot 0.8}{16GJ_{02}} = -0.00208 \text{ rd}, \quad \alpha_{CB} = \frac{M_A + 1.02 \cdot 10^3}{GJ_{01}} = 0.00372 \text{ rd}, \quad \tau_{\max} = \tau_{CD} = 21 \text{ MPa}.$$

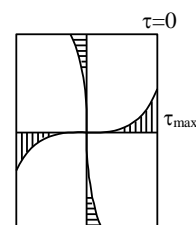
Skręcanie przekroju prostokątnego

Dla przekroju prostokątnego rozwiązanie uzyskuje się na drodze numerycznej, np. rozwijając funkcję spazenia w szereg: $\varphi(y, z) = yz - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)g_n(z)$. Rozwiązanie udaje się przedstawić w postaci wzorów:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{\alpha \left(\frac{h}{b}\right) b^2 h}, \quad J_s = \beta \left(\frac{h}{b}\right) b^3 h,$$

gdzie współczynniki α, β odczytujemy z tablic:

h/b	1		6	∞
α	0.208		0.299	0.333
β	0.141		0.299	0.333



Maksymalne naprężenie styczne wystąpi w środku dłuższego boku prostokąta, w środku przekroju i w narożach naprężenia styczne są zerowe.

Pręty o profilu cienkościennym

Pręt cienkościenny to pręt, którego przekrój jest wykonany z profilu o cienkich ściankach, np. z giętej blachy. Dla celów praktycznych obliczeń na skręcanie rozróżniamy 3 typy prętów cienkościennych: o profilu rozwijalnym, o profilu nierozwijalnym i o profilu zamkniętym.

Pręty o profilu rozwijalnym

Kątownik, zetownik, ceownik itp. profile możemy zastąpić jednym prostokątem o długości równej tzw. linii środkowej profilu a grubości tak dobranej, aby powierzchnia nie uległa zmianie.

Przykład - ceownik o średniku 300x10, półkach 90x16. Linia środkowa $l = 2 \times 90 + 300 = 480$ mm, średnia grubość $b = 12.25$ cm.

Pręty o profilu nierozwijałym

Teownik, dwuteownik itp. przekroje rozdzielamy na prostokąty, zakładając, że:

- każdy z prostokątów pracuje niezależnie, przenosząc część momentu skręcającego M_{si} ,
- jednostkowy kąt skręcenia każdego z prostokątów składowych jest taki sam $\theta_i = \text{idem}$,

Prowadzi to, wraz z równaniem statyki do układu n równań dla n prostokątów składowych:

$$M_s = \sum_i M_{si}, \quad \frac{M_{si}}{GJ_{si}} = \frac{M_{s(i+1)}}{GJ_{s(i+1)}}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

skąd znajdujemy M_{si} a następnie i jednostkowy kąt skręcenia θ całego przekroju.

Przykład

Obliczyć naprężenia w przekroju teowym o średniku 30x5 cm i półce 6x20 cm, skręcanym momentem 20 kNm. $h/b = 6$: $\alpha = 0.299$, $\beta = 0.299$, $h/b = 3.33$: $\alpha = 0.272$, $\beta = 0.269$.

$$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \frac{M_1}{G \cdot 0.299 \cdot 30 \cdot 125 \cdot 10^{-8}} = \frac{M_2}{G \cdot 0.269 \cdot 20 \cdot 216 \cdot 10^{-8}}$$

$$M_1 + M_2 = 20 \cdot 10^3 \Rightarrow M_1 = 9.82 \text{ kNm}, \quad M_2 = 10.18 \text{ kNm},$$

$$\tau_{\text{ur}} = \frac{9820}{0.299 \cdot 3 \cdot 0.0025} = 43.8 \text{ MPa}, \quad \tau_p = \frac{10180}{0.272 \cdot 0.2 \cdot 0.0036} = 52.0 \text{ MPa}$$

Pręty o profilu zamkniętym

Strumień naprężeń stycznych (na podstawie tzw. *analogii hydrodynamicznej*, z zasady zachowania masy) jest w każdym przekroju stały: $\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2 = \text{const}$. Moment skręcający, pochodzący od naprężeń stycznych obiegających profil wyraża się zależnością:

$$M_s = \oint_c \tau \delta ds \rho(s) = \tau \delta \oint_c \rho(s) ds = \tau \delta 2F, \quad \text{gdzie } F \text{ jest polem}$$

zawartym wewnątrz linii środkowej profilu. Wobec tego jest: $\tau_{\text{max}} = \frac{M_s}{2F \delta_{\text{min}}}$.

