Energia sprężysta

definicje, I zasada termodynamiki, adiabatyczny proces quasi-statyczny, tw. Clapeyrona, energia sprężysta i jej właściwości

Niektóre podstawowe definicje termodynamiki

System (układ) termodynamiczny może być:

- zamknięty (izolowany) - nie wymienia z otoczeniem ani materii ani energii (*Wszechświat*)
- półzamknięty - nie wymienia z otoczeniem materii, wymienia energię (*żelazko*)
- otwarty - wymienia z otoczeniem zarówno masę jak i energię (*smażenie konfitur*)

Wyróżnia się dwa skrajne przypadki osłon (przegród):

- przegroda adiabatyczna - oznacza idealną izolację termiczną i brak wymiany ciepła z otoczeniem (*termos*)
- przegroda diatermiczna - zapewnia idealną wymianę ciepła, a więc temperatury układu i otoczenia są równe (tzw. zerowa zasada termodynamiki stanowi podstawę termometrii, t.j. pomiaru temperatury)

I zasada termodynamiki - dwa postulaty

Zasada zachowania energii: energia całkowita jest wielkością stałą, $dE = 0$.

Na całkowitą energię układu składa się wiele różnych rodzajów energii. Dwa z nich są związane ze środkiem masy układu:

E_p - makroskopowa energia potencjalna, związana z oddziaływaniami dalekiego zasięgu

E_k - makroskopowa energia kinetyczna (związana z ruchem środka masy)

i w zagadnieniach w których zmiany tych energii odgrywają istotną rolę (np. analiza toru pocisku, itp. zagadnienia mechaniki klasycznej) muszą być uwzględniane.

Pozostała część energii zwana jest energią wewnętrzną U, tak że:

$$E = E_p + E_k + U .$$

Na energię wewnętrzną (oddziaływań krótkiego zasięgu) składa się wiele różnych form energii, jak np. energia sprężysta, napromieniowania, chemiczna, termiczna (pobudzenia termicznego atomów), magnetyczna i wiele innych, zależnie od tego jakie formy energii dla danego procesu termodynamicznego są istotne.

Przedmiotem naszego zainteresowania będzie energia sprężysta quasi-statycznego procesu mechanicznego. Obciążenia przykładane są tak wolno, że układ w każdym momencie znajduje się w stanie równowagi między siłami wewnętrznymi i zewnętrznymi. Możemy pominąć w rozważaniach makroskopową energię potencjalną i kinetyczną.

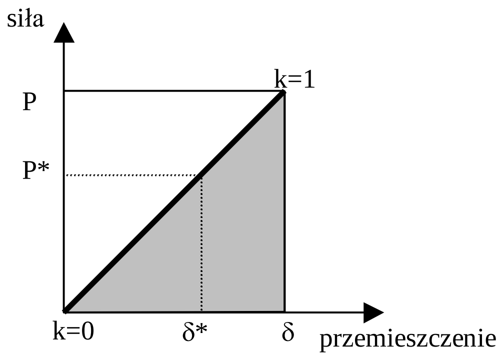
Energia może być wymieniana między układem i otoczeniem na dwa sposoby: na sposób pracy i na sposób ciepła (przewodzenie, konwekcja, promieniowanie itp.). Kolejnym postulatem I zasady termodynamiki jest więc:

$$dU = \delta L + \delta Q$$

Zapis powyższy oznacza, że energia wewnętrzna posiada różniczkę zupełną i nie zależy od drogi po jakiej przebiega proces termodynamiczny (zależy jedynie od stanu początkowego i końcowego), natomiast tzw. elementarna praca i ciepło nie są w ogólności różniczkami zupełnymi, gdyż zależą od drogi procesu.

Twierdzenie Clapeyrona

Zwróćmy jednak uwagę, że jeśli proces będzie zachodził adiabatycznie, tj. bez wymiany energii na sposób ciepła z otoczeniem, i w ośrodku liniowo sprężystym (dla związków fizycznych liniowych i jednorodnych), to droga procesu jest jednoznacznie określona i praca wykonana na takim układzie jest różniczką zupełną: $dU = dL$.



Obliczmy pracę mechaniczną siły uogólnionej, rosnącej powoli od 0 do P na odpowiadającym jej przemieszczeniu uogólnionym (rys.).

W dowolnej chwili: $P^* = kP$, $\delta^* = k\delta$, $0 \le k \le 1$,

praca elementarna: $dL = P^*\, d\delta^* = Pk\, \delta\, dk$,

a dla całego procesu:

$$L = \int_0^1 P\delta k dk = P\delta \int_0^1 k dk = \tfrac{1}{2} P\delta = U_{spr}$$

gdzie U_{spr} oznacza energię sprężystą ośrodka i jest to pole pod wykresem.

Możemy więc dla układów sprężystych sformułować tw. Clapeyrona:

> *Energia sprężysta ciała jest połową sumy iloczynów wszystkich obciążeń przez odpowiednie przemieszczenia.*

Energia sprężysta układu

Obliczmy pracę sił zewnętrznych na przemieszczeniach dla ośrodka sprężystego Hooke'a:

$$L = \tfrac{1}{2}\int_F q_i u_i dF + \tfrac{1}{2}\int_V X_i u_i dV = \tfrac{1}{2}\int_F \sigma_{ij} n_j u_i dF + \tfrac{1}{2}\int_V X_i u_i dV .$$

Zamieniając całkę powierzchniową na objętościową, dostaniemy:

$$L = \tfrac{1}{2}\int_V \left[\left(\sigma_{ij} u_i\right)_{,j} + X_i u_i \right] dV = \tfrac{1}{2}\int_V \left[u_i \left(\sigma_{ij,j} + X_i\right) + \sigma_{ij} u_{i,j} \right] dV = \tfrac{1}{2}\int_V \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{ij} u_{i,j} + \sigma_{ji} u_{j,i}\right) dV$$

gdzie wykorzystano równanie Naviera, a po uwzględnieniu symetrii tensora naprężenia mamy ostatecznie:

$$L = \tfrac{1}{2}\int_V \sigma_{ij} \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) dV = \tfrac{1}{2}\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

Jak widać, gęstość wewnętrznej energii sprężystej (jest to energia sprężysta właściwa, czyli energia przypadająca na jednostkę objętości) jest skalarem o wymiarze takim jak dla naprężenia i wyraża się:

$$u_{spr} = \tfrac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2} T_\sigma T_\varepsilon = \tfrac{1}{2}\left(A_\sigma + D_\sigma\right)\left(A_\varepsilon + D_\varepsilon\right).$$

Biorąc pod uwagę, że iloczyny mieszane aksjatora i dewiatora są równe zero, np.:

$A_\sigma D_\varepsilon = \sigma_m \delta_{ij}\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_m \delta_{ij}\right) = \sigma_m\left(\varepsilon_{kk} - 3\varepsilon_m\right) = 0$, mamy:

$$u_{spr} = \tfrac{1}{2} A_\sigma A_\varepsilon + \tfrac{1}{2} D_\sigma D_\varepsilon = u^v_{spr} + u^f_{spr},$$

skąd wnosimy, że energia sprężysta składa się z energii odkształcenia objętościowego i energii odkształcenia postaciowego. Ponadto:

$$\frac{\partial u_{spr}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tfrac{1}{2}\sigma_{ij} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{mn}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(2G\varepsilon_{mn} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{mn}\right) = \tfrac{1}{2}\sigma_{ij} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{mn}\left(2G\delta_{mi}\delta_{nj} + \lambda\delta_{ki}\delta_{kj}\delta_{mn}\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\sigma_{ij} + \tfrac{1}{2}\left(2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) = \sigma_{ij}$$

więc energia sprężysta jest potencjałem zarówno dla odkształceń jak i dla naprężeń:

$$\frac{\partial u_{spr}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad \frac{\partial u_{spr}}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}$$

Jest ponadto jednorodną funkcją kwadratową (zawsze dodatnią) odkształceń albo naprężeń, co łatwo stwierdzić przedstawiając energię sprężystą za pomocą wyłącznie naprężeń albo odkształceń. Otrzymujemy wzory:

$$u^f_{spr} = \frac{1}{12G}\left(3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma^2_{kk}\right) = \frac{G}{3}\left(3\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \varepsilon^2_{kk}\right)$$

$$u^v_{spr} = \frac{1}{2K}\sigma^2_{kk} = \frac{K}{2}\varepsilon^2_{kk}$$

$$u_{spr} = \frac{1}{2E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu\sigma^2_{kk}\right] = \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2_{kk}$$

Energię sprężystą można wyrazić wprost poprzez siły przekrojowe. Dla zginania poprzecznego, mamy:

$$U_{spr} = \tfrac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x\varepsilon_x + 2\tau_{xz}\varepsilon_{xz}\right)dV = \int_l\int_F \left(\frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\tau_{xz}^2}{2G}\right)dF dx = \int_l \frac{M_y^2(x)}{2EI_y}dx + \int_l \mu\frac{Q^2(x)}{2GF}dx,$$

gdzie bezwymiarowy energetyczny współczynnik ścinania μ, zależny jedynie od geometrii przekroju, wyraża się:

$$\mu \overset{def}{=} \frac{F}{I_y^2}\int_F \frac{s_y^2(z)}{b^2(z)}dF \quad \text{(dla prostokąta } \mu = 1.2\text{).}$$

Obliczmy energię sprężystą belki jednoprzęsłowej obciążonej w środku przęsła siłą skupioną: M(x) = P/2 x, i Q(x) = P/2. Po wykonaniu całkowania dostajemy:

$$U_{spr} = \frac{P^2 l^3}{96EI_y} + 1.2\frac{P^2 l}{8GF}, \text{ a ich stosunek: } \frac{U_{spr}(M)}{U_{spr}(Q)} = 0.32\left(\frac{l}{h}\right)^2,$$

a więc dla np. l/h = 10, energia ścinania stanowi zaledwie ok. 3 % całkowitej energii sprężystej.