

Hipotezy wyężeniowe

wyężenie i jego miara, hipotezy: Galileusza, C-T-G, H-M-H, Coulomba-Mohra, wzory

Projektowanie w złożonych stanach napężenia

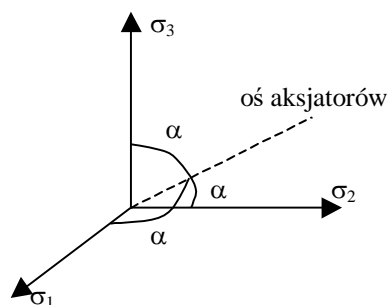
W trakcie statycznej próby rozciągania wyznaczyć można pewne charakterystyczne poziomy napężenia (odkształcenia) oznaczające jakościową zmianę własności materiału. Próba te dostarcza odpowiedzi nie tylko odnośnie stanu mechanicznego badanego materiału ale i zakresu stosowania związków fizycznych (np. zakres stosowania związków Hooke'a określa granica proporcjonalności). Interpretacja wyników jest prosta, a sama próba wytrzymałościowa w jednoosiowym stanie napężenia (rozciągania dla stali, ściskania dla betonu) jest stosunkowo łatwa do przeprowadzenia i jednocześnie dokładna.

Powstaje pytanie jak określić stan mechaniczny materiału w złożonym stanie napężenia. Najlepiej byłoby uzyskać odpowiedź na drodze eksperymentalnej. Jest to jednak niemożliwe — złożonych stanów napężenia jest przecież nieskończenie wiele. Dlatego odpowiedzi musimy szukać w inny sposób, uogólniając wyniki jedynie niektórych, najbardziej charakterystycznych dla danego materiału doświadczeń, poprzez zbudowanie odpowiednich hipotez dotyczących zachowania się materiału.

Celem hipotez wyężeniowych jest odniesienie złożonego stanu napężenia do stanu jednoosiowego i w ten sposób określenie wyężenia, czyli stopnia zbliżenia się do granicy niebezpiecznej. Zależnie od tego, co przyjmiemy za miarę wyężenia, m_w , otrzymujemy wzór na tzw. napężenie zredukowane, stanowiące przeliczenie złożonego stanu napężenia (odkształcenia) na jednoosiowy stan napężenia. Znając napężenie zredukowane jesteśmy w stanie określić współczynnik bezpieczeństwa: $n = R_k / \sigma_{zr}$.

Zagadnienie, ogólnie rzecz biorąc, nie zostało do dziś rozwiązane. Istnieje wiele hipotez wyężeniowych stosowanych dla konkretnych materiałów, i to jedynie izotropowych. Zanim przejdziemy do omówienia najbardziej znanych hipotez wyężeniowych, uporządkujemy algebraicznie napężenia główne: $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$.

Hipotezy będziemy przedstawiać graficznie w przestrzeni napężeń głównych, zwanej przestrzenią Haigha-Beckera. Linia, równo nachylona do osi, jest tzw. osią aksjatorów.



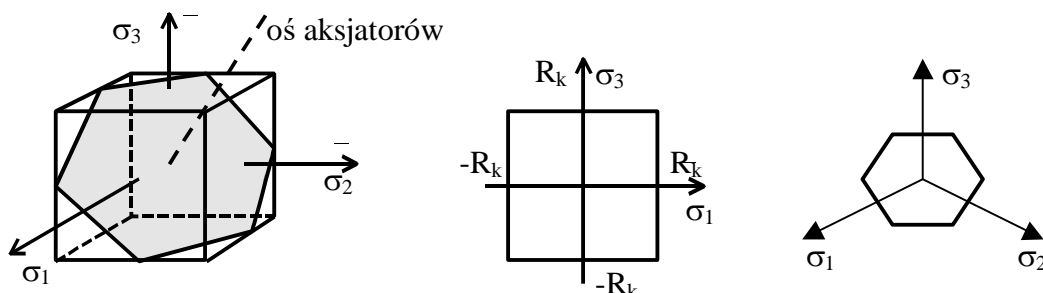
Hipoteza Galileusza (Rankine'a-Clebscha)

Galileusz (1632): O wyężeniu materiału decyduje ekstremalna wartość napężenia głównego.

Porównując miarę wyężenia w złożonym i jednoosiowym stanie napężenia, otrzymujemy wzór na napężenie zredukowane wg hipotezy Galileusza:

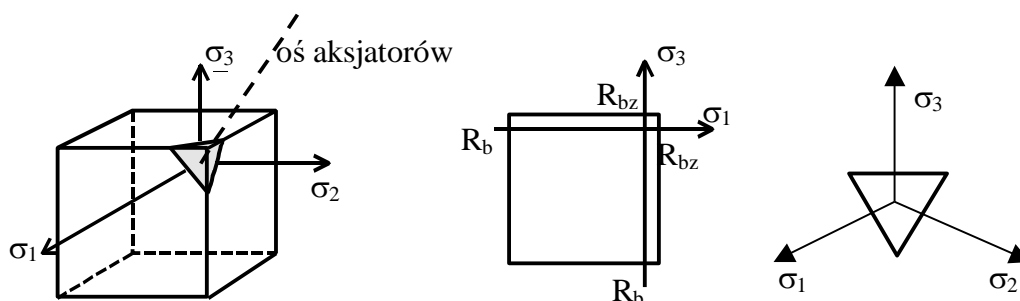
$$m_w = \max(\sigma_I, |\sigma_{III}|) = \sigma_z \Rightarrow \sigma_z = \max(\sigma_I, |\sigma_{III}|) \leq R_k.$$

Powyższą nierówność możemy przedstawić graficznie w przestrzeni Haigha-Beckera.



Modyfikacja Rankine'a-Clebscha (1856, 1862) polega na uwzględnieniu kierunkowości materiału (różnej wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie, np. dla betonu R_{bz}, R_b):

$$R_b \leq \sigma_{zI} = \sigma_{III}, \quad \sigma_z = \sigma_I \leq R_{bz}.$$



Doświadczenia pokazują jednak, że wytrzymałość materiałów dla hydrostatycznego ściskania jest wielokrotnie większa niż wynikałoby to z hipotezy, której przewidywanie jest bardziej pesymistyczne. Z kolei dla prostego skręcania ($\sigma_I = \tau, \sigma_{II} = 0, \sigma_{III} = -\tau$) jest nazbyt optymistyczna.

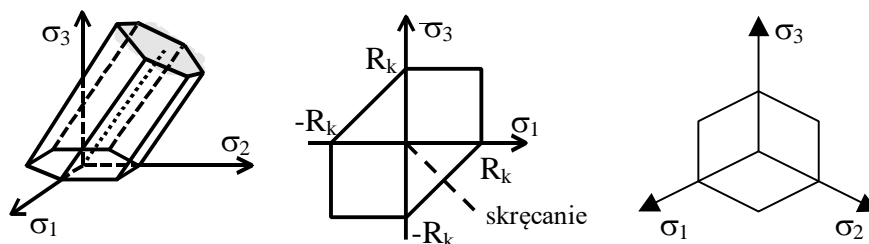
Hipoteza Coulomba-Tresci-Guesta

(1776, 1872, 1900) *O wyężeniu materiału decyduje największe napężenie styczne.*

Za przyjęciem takiej miary wyężenia przemawiają dwa doświadczenia: ściskanie walcowej próbki betonowej (uszkodzenie w kształcie dwu stożków o wspólnym wierzchołku, czyli w płaszczyźnie ekstremalnych napężzeń stycznych) oraz linie poślizgu Lüdersa stalowej próbki rozciąganej (pod kątem 45°).

$$m_w = (\sigma_I - \sigma_{III})/2 = \sigma_z/2 \Rightarrow \sigma_z = \sigma_I - \sigma_{III} \leq R_k.$$

W przestrzeni Haigha-Beckera powyższy warunek wyznacza przestrzeń ograniczoną nieskończenie długim graniastostupem o przekroju sześciokąta foremnego o osi równo nachylonej do osi głównych napężzeń (jest to tzw. os aksjatorów, $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$). Napężenia dla prostego skręcania ograniczone są wartościami $\pm R_k/2$.



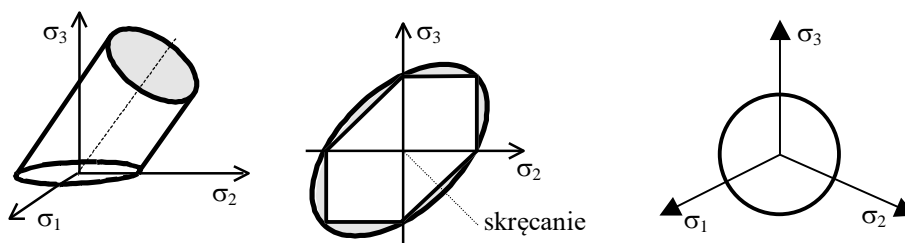
Hipoteza Hubera-Misesa-Hencky'ego

(1904, 1913, 1923) *O wyężeniu materiału decyduje energia odkształcenia postaciowego.*

$$m_w = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2] = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_x^2,$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} \leq R_k$$

W przestrzeni Haigha-Beckera powyższy warunek określa przestrzeń wewnątrz nieskończenie długiego walca kołowego o osi pokrywającej się z osią aksjatorów. Dla prostego skręcania naprężenia ograniczone są wartościami $\pm 0.58R_k$, co jest bliższe wynikowi doświadczalnym uzyskanym przez Lodego.



Hipoteza Mohra i Coulomba

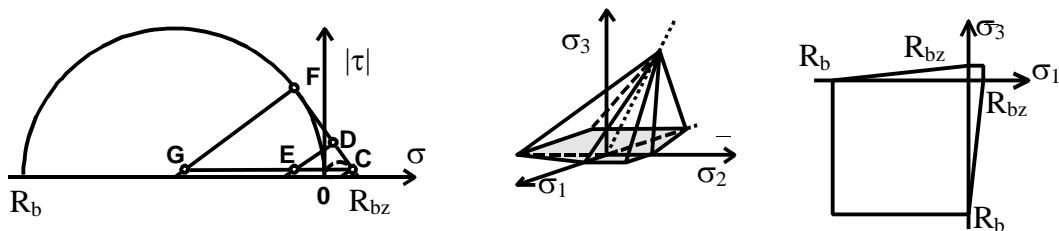
Zakres możliwych stanów naprężenia nie przekraczających niebezpiecznej granicy można zilustrować największym z kół Mohra (o tej konstrukcji graficznej mówiliśmy przy okazji analizy stanu naprężenia w punkcie - jest to *logo* naszej Katedry). Koło to, podobnie jak w hipotezie CTG, nie zależy od σ_{II} . Jeśli wykreślimy wszystkie możliwe koła Mohra dla danego materiału, stany bezpieczne będą się znajdowały wewnątrz obwiedni tych kół. Obwiednia jest symetryczna względem osi naprężeń normalnych (poziomej), dlatego wystarcza narysowanie jedynie jej górnej połowy. Wyznaczenie tej obwiedni jest jednak kłopotliwe, gdyż jej punkt na osi σ oznacza stan trójosiowego rozciągania, którego nie udało się doświadczalnie uzyskać.

Coulomb (1776) sformułował warunek stanowiący aproksymację obwiedni linią prostą, przechodzącą przez koła Mohra dla prostego ściskania i prostego rozciągania:

$$|\tau| = c - \sigma \operatorname{tg} \varphi,$$

znajdujący szerokie zastosowanie w mechanice gruntów, gdzie c jest tzw. *spójnością* (spistością) gruntu, czyli wytrzymałością na ścinanie bez nacisku normalnego a φ tzw. *kątem tarcia wewnętrznego*. Znak minus w powyższym wzorze uwzględnia fakt wzrostu wytrzymałości pod wpływem naprężeń ściskających (ujemnych).

Wytrzymałość gruntu na ścinanie składa się więc z jego spójności i rośnie wraz ze wzrostem parcia w gruncie.



Wyrazimy warunek Coulomba w naprężeniach głównych. Z rysunku wynika proporcja:

$$\frac{DE}{CE} = \frac{FG}{CG},$$

gdzie $DE = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} - \frac{R_{bz}}{2}$, $FG = \frac{R_b}{2} - \frac{R_{bz}}{2}$, $CE = -\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} + \frac{R_{bz}}{2}$, $CG = \frac{R_b}{2} + \frac{R_{bz}}{2}$

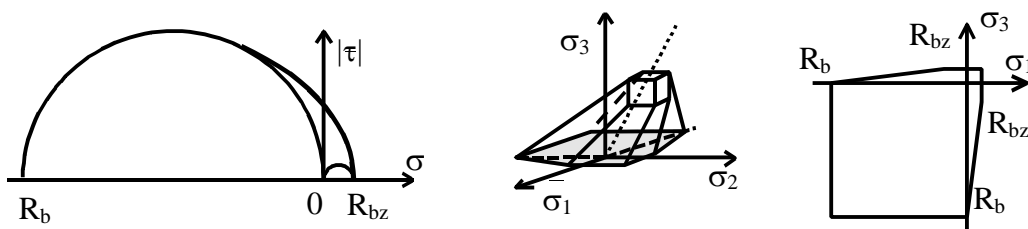
i podstawiając $k \equiv R_{bz}/R_b$ otrzymujemy ostatecznie:

$$\sigma_x = \sigma_I - k\sigma_{III} \leq R_{bz}$$

Obszar bezpieczny pracy materiału odpowiada wnętrzu ostrosłupa o osi pokrywającej się z osią aksjatorów. Przekroje ostrosłupa są sześciobokami o 3 osiach symetrii.

Aby uwzględnić różnice w mechanizmach zniszczenia dla naprężeń ściskających i rozciągających, modyfikuje się warunek Coulomba poprzez „zaokrąglenie” obwiedni w pobliżu jej wierzchołka na osi σ , przechodzące przez hipotetyczny punkt równomiernego trójosiowego rozciągania.

Inne modyfikacje hipotezy Mohra polegają na przyjęciu warunku $\sigma_x = R_{bz} [1 - (\tau/\tau_0)^\beta]$, gdzie τ_0 jest wytrzymałością na ścinanie dla $\sigma = 0$, przy czym przypadkowi $\beta = \frac{3}{2}$ odpowiada hipoteza Caquot (1949), dobrze opisująca zniszczenie betonu, a dla $\beta = 2$ otrzymujemy paraboliczny warunek stosowany do oceny wytrzymałości skał.



Podstawowe wzory dla konstrukcji prętowych

W konstrukcjach prętowych najczęściej występują jedynie dwa elementy tensora naprężenia: σ oraz τ . Wzory na naprężenia zredukowane dla poszczególnych hipotez wyrażają się wówczas:

$$\sigma_x^G = \max\left(\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}\right),$$

$$\sigma_x^{CTG} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_x^{HMH} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2},$$

$$\sigma_x^C = (1-k)\frac{\sigma}{2} + (1+k)\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$