

Stateczność pręta prostego

utrata stateczności, siła krytyczna, rozwiązanie Eulera, wzory w zakresie poza liniowo sprężystym, przykłady, projektowanie wg normy stalowej, metoda energetyczna

Utrata stateczności pręta prostego

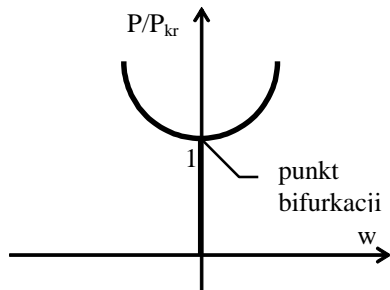
Rozważania energetyczne

Konieczność uwzględnienia możliwości utraty stateczności obrazuje przykład stalowego słupa wspornikowego obciążonego jedynie ciężarem własnym. Jeśli przyjmiemy $R = 200$ MPa, oraz $\gamma = 78.5$ kN/m, otrzymamy możliwą długość wynikającą z warunku na naprężenia normalne rzędu 2.5 km. Jest oczywiste, że taka konstrukcja nie byłaby stabilna.

Rozróżniamy 3 możliwe stany równowagi: równowaga stateczna (trwała), równowaga obojętna oraz równowaga nietrwała (chwiejna). Najprostszą interpretacją tych stanów jest kulka tocząca się po zakrzywionej powierzchni: w zagłębieniu (minimum energii potencjalnej), na płaszczyźnie poziomej, oraz na powierzchni wypukłej. Wynika stąd zasada minimum energii potencjalnej:

Układ jest w stanie równowagi statecznej tylko wtedy gdy wartość energii potencjalnej osiąga minimum.

Siła krytyczna



Przyłożmy do słupa niewielką siłę - pręt będzie znajdował się w równowadze statecznej. Jeśli będziemy zwiększali obciążenie, dla pewnej jego wartości pręt przejdzie w stan równowagi obojętnej: dowolnie mały impuls będzie powodował wychylenie pręta z pozycji pionowej i utrzymywanie się w niej. Pojawia się tzw. *punkt bifurkacji* (rozdzielenia). Po przekroczeniu tego punktu nie jest możliwa prostoliniowa postać równowagi pręta.

Możliwość utraty stateczności jest bardzo groźna z dwóch powodów:

- konfiguracja odkształcona charakteryzuje się znacznymi przemieszczeniami, z reguły powodującymi zniszczenie konstrukcji,
- utrata stateczności zachodzi w sposób nagły, niesygnalizowany i najczęściej powoduje katastrofalne skutki (brak możliwości podjęcia jakiejkolwiek akcji ratowniczej itp.).

Wzór Eulera

Jeśli naprężenia normalne są mniejsze od granicy proporcjonalności, R_H , to obowiązują związki Hooke'a, dla których mamy: $EJw''(x) = -M(x)$. Konieczne jest odstępnie od zasady zeszytnienia poprzez rozróżnienie konfiguracji początkowej (nieodkształconej) i konfiguracji aktualnej (odkształconej):

$$M(x) = Pw(x) + M_{brz}(x),$$

gdzie $M_{brz}(x)$ jest częścią momentu wynikającą z warunków brzegowych. Jest więc:

$$EJw''(x) + Pw(x) = -M_{brz}(x) \Rightarrow k^2 \equiv \frac{P}{EJ},$$

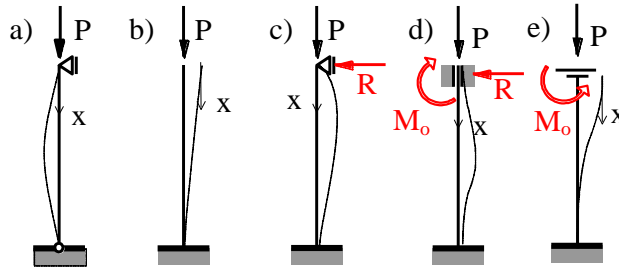
i otrzymujemy tzw. równanie Eulera

$$w''(x) + k^2w(x) = -\frac{M_{brz}(x)}{EJ}.$$

Całą ogólną równania jest funkcja:

$$w_0(x) = A \sin kx + B \cos kx,$$

a postać całki szczególnej zależy od prawej strony równania. Zarówno stałe całkowania jak i odpowiednią postać prawej strony równania Eulera (i całki szczególnej) wyznaczymy na podstawie warunków brzegowych:



$$\begin{aligned} & M_{brz}(x) \equiv 0; \quad w(0) = w(l) = 0 \\ \text{a)} \quad & B = 0, \quad \sin kl = 0 \Rightarrow kl = n\pi \\ & P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} = \dots = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M_{brz}(x) \equiv 0; \quad w(0) = w'(l) = 0 \\ \text{b)} \quad & B = 0, \quad \cos kl = 0 \Rightarrow kl = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2} \\ & P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M_{brz}(x) = Rx; \quad w_s(x) = -\frac{R}{P}x, \quad w(0) = w(l) = w'(l) = 0 \\ \text{c)} \quad & B = 0, \quad R = APk \cos kl, \quad \tan kl = kl \Rightarrow kl = 4.493 \\ & P_{kr} = \frac{20.19 \pi^2 EJ}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0.699l)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M_{brz}(x) = Rx - M_0; \quad w_s(x) = -\frac{R}{P}x + \frac{M_0}{P}, \quad w(0) = w(l) = w'(0) = w'(l) = 0 \\ \text{d)} \quad & M_0 = -Bk^2, \quad R = APk, \quad B = \frac{\sin kl}{\cos kl - k} A, \quad 1 - \cos kl = \frac{1}{2} kl \sin kl \Rightarrow kl = 2\pi \\ & P_{kr} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0.5l)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M_{brz}(x) = M_0; \quad w_s(x) = -\frac{M_0}{P}, \quad w'(0) = w(l) = w'(l) = 0 \\ \text{e)} \quad & A = 0, \quad M_0 = BP \cos kl, \quad Bk \sin kl = 0 \Rightarrow \sin kl = 0 \Rightarrow kl = \pi \\ & P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \end{aligned}$$

Wprowadźmy definicje długości wyboczeniowej i smukłości pręta:

$$l_w \equiv \alpha l, \quad \lambda \equiv \frac{l_w}{i_{\min}}$$

Długość wyboczeniowa jest to długość połowy fali wyboczenia pręta.

Smukłość pręta jest to stosunek długości wyboczeniowej do minimalnego promienia bezwładności przekroju poprzecznego.

Długość wyboczeniowa zależy od schematu statycznego. Smukłość jest parametrem wskazującym na wrażliwość na utratę stateczności. Rzadko przekracza 150 a poniżej 20 niebezpieczeństwo wyboczenia znika. Smukłość natomiast zależy nie tylko od schematu statycznego ale i geometrii przekroju pręta. Poszczególnym schematom odpowiada określona wartość współczynnika α (1, 2.0, 0.699, 0.5, 1). Wzór na eulerowską siłę krytyczną zapiszemy ostatecznie:

$$P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2} = \frac{\pi^2 EF}{\lambda^2}$$

Aby wzór powyższy obowiązywał, naprężenia odpowiadające sile krytycznej nie mogą przekraczać granicy proporcjonalności:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_E}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq R_H \quad \Rightarrow \quad R_H \geq \frac{\pi^2 E}{\lambda_{gr}^2}, \quad \text{czyli: } \lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}}$$

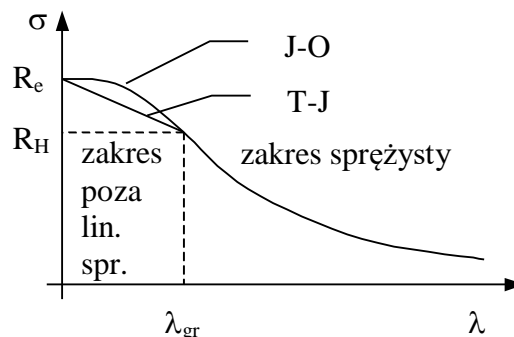
Zakres liniowo sprężysty odpowiada więc smukłości pręta większej od smukłości granicznej.

Wzory w zakresie poza liniowo sprężystym

Poza zakresem liniowo sprężystym związki Hooke'a nie obowiązują. Problem utraty stateczności powinien być rozważany z uwzględnieniem innych związków fizycznych, obowiązujących w zakresie naprężeń przekraczających granicę proporcjonalności, np. nieliniowej sprężystości czy teorii plastyczności. Nieliniowość fizykalna znacznie komplikuje uzyskanie rozwiązania, uniemożliwiając otrzymanie prostych, przydatnych dla praktyki wzorów.

Dlatego przybliżone rozwiązanie problemu znajdziemy na innej drodze. Można przyjąć, że zakres poza liniowo sprężysty jest ograniczony z dwu stron:

- granicą proporcjonalności dla smukłości granicznej
- granicą plastyczności dla $\lambda \rightarrow 0..$



Najprostszą aproksymacją rozwiązania w tym zakresie jest połączenie dwu punktów granicznych linią prostą, którą zaproponowali Tetmajer-Jasiński:

$$\sigma_{T-J} = a - b\lambda, \quad \sigma_{T-J}(0) = R_e, \quad \sigma_{T-J}(\lambda_{gr}) = R_H \Rightarrow a = R_e, \quad b = \frac{R_e - R_H}{\lambda_{gr}}$$

$$P_{T-J} = F\sigma_{T-J} = FR_e - F(R_e - R_H)\frac{\lambda}{\lambda_{gr}}$$

Inną aproksymację w postaci parabolicznej zaproponowali Johnson-Ostenfeld:

$$\sigma_{J-O} = A - B\lambda^2, \quad \sigma_{J-O}(0) = R_e, \quad \sigma_{J-O}(\lambda_{gr}) = R_H \Rightarrow A = R_e, \quad B = \frac{R_e - R_H}{\lambda_{gr}^2}$$

$$P_{J-O} = F\sigma_{J-O} = FR_e - F(R_e - R_H)\left(\frac{\lambda}{\lambda_{gr}}\right)^2$$

Przykłady zadań

W obliczeniach stateczności pręta prostego pojawiają się 2 typy problemów:

- dobór obciążenia dopuszczalnego dla zadanej geometrii przekroju: $P_{dop} = \frac{P_{kr}}{n}$, n - współczynnik bezpieczeństwa (wysoki), zakres pracy konstrukcji jest znany,
- projektowanie przekroju dla zadanego obciążenia (siły krytycznej), zakres pracy konstrukcji nie jest znany i po wykonaniu obliczeń należy zweryfikować założenia obliczeniowe.

Przykład

Zaprojektować pręt wspornikowy o przekroju kwadratowym $d \times d$, jeśli $R_e = 240$ MPa, $R_H = 180$ MPa, $E = 210$ GPa, $P = 1$ MN, $l = 1$, $n = 2$.

Zakładamy zakres sprężysty, $l_w = 2$ m, $F = d^2$, $J = d^4/12$, $i = \frac{d}{\sqrt{12}}$, $Pn = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2}$, skąd:

$$d = \sqrt[4]{\frac{48 \cdot 10^6}{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^9}} = 0.069 \text{ m}$$

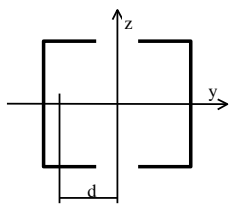
Sprawdzamy założenie: $\lambda_{gr} = 107$, $\lambda = \frac{l_w}{i} = \frac{2\sqrt{12}}{d} = 99.9 < \lambda_{gr}$ (a więc zakres poza liniowo sprężysty, niezgodnie z założeniem wstępnym), zmieniamy zakres (T-J):

$$Pn = (a - b\lambda)d^2, \quad (240 \cdot 10^6 - 0.56 \cdot 10^6 \frac{2\sqrt{12}}{d})d^2 = 2 \cdot 10^6, \quad 240d^2 - 3.88d - 2 = 0, \quad d = 0.084 \text{ m}$$

Przyjmujemy $d = 8.5$ cm.

Przykład

Zaprojektować przekrój z 2 ceowników, jeśli $l_w = 4$ m, $\lambda_{gr} = 107$, $P = 100$ kN, $n = 2.12$.



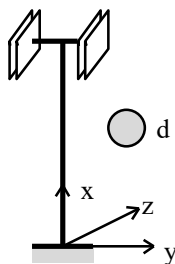
Z tablic profili walcowanych, metodą prób i błędów mamy:

$$[80, F = 11 \text{ cm}^2, e = 1.45 \text{ cm}, J_y = 106 \text{ cm}^4, i_y = 3.1 \text{ cm}, J_z = 19.4 \text{ cm}^4.$$

$$\text{x-y: } \lambda = \frac{400}{3.1} = 129 > \lambda_{gr}, P_E = \frac{\pi^2 210 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 106 \cdot 10^{-8}}{16} = 275 > Pn$$

x-z: aby uzyskać tę samą nośność, musi być spełniona równość momentów $J_z = J_y = 212 \text{ cm}^4$, czyli: $J_z = 2(J_{z0} + Fd^2)$, skąd $d = 0.028 \text{ m}$, natomiast minimalny rozstaw ceowników wynosi: $45 - 14.5 = 30.5 \text{ mm} = 0.0305 \text{ cm}$, $J_z = 2435 \text{ cm}^4$, $i_z = 0.033 \text{ m}$, $\lambda = 120.2 > \lambda_{gr}$. Sprawdzenie zakresu przy rozsunieciu nie jest konieczne, gdyż zarówno ze wzoru Eulera jak i T-J otrzymujemy większą siłę krytyczną (por. wykres).

Przykład



Określić obciążenie dopuszczalne pręta o przekroju kołowym, jeśli $d = 8 \text{ cm}$, $l = 200 \text{ cm}$, stal St3S: $E = 210 \text{ GPa}$, $R_H = 180 \text{ MPa}$, $R_e = 240 \text{ MPa}$, $\lambda_{gr} = 107$.

$$\text{x-z: } \alpha = 2, l_w = 4 \text{ m}, \lambda = 200 > \lambda_{gr} \text{ (zakr. spr.)},$$

$$P_{dop} = \frac{P_E}{n} = \frac{\pi^2 EF}{n \lambda^2} = \frac{260}{n} \text{ kN}$$

$$\text{x-y: } \alpha = 0.5, l_w = 1 \text{ m}, \lambda = 50 < \lambda_{gr} \text{ (zakres spr.-pl.)},$$

$$P_{dop} = \frac{\sigma_{T-J} F}{n} = \frac{(a - b\lambda)F}{n} = \frac{1.065}{n} \text{ MN.}$$

Ostatecznie: $P_{dop} = 260/n \text{ kN}$.

Projektowanie wg normy konstrukcji stalowych PN-90/B-03200

Nośność obliczeniowa przekroju pręta:

$$N_{Rc} = \psi A f_d,$$

gdzie ψ - współczynnik redukcyjny nośności zależny od smukłości względnej (zdefiniowanej normą), f_d - wytrzymałość obliczeniowa stali, A - pole przekroju brutto.

Metoda energetyczna

Energia sprężysta równa jest sumie energii potencjalnej i pracy sił zewnętrznych: $E = U - L$. Warunkiem równowagi w stanie krytycznym jest zerowanie się wariacji funkcjonału energii sprężystej:

$$\delta E = 0 \Rightarrow \delta U = \delta L \Rightarrow \Delta U = \Delta L,$$

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (w'')^2 dx$$

$$\Delta L = Pv, \quad v - \text{ pionowe przesunięcie,}$$

$$\Delta L = \frac{1}{2} P \int_0^l (w')^2 dx,$$

skąd ostatecznie:

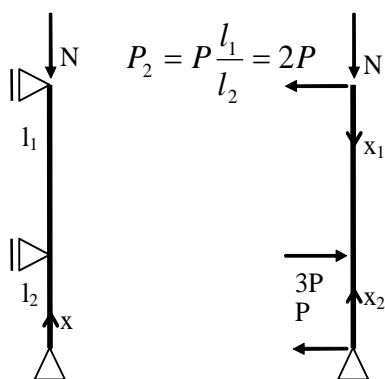
$$P_{kr} = \frac{\int_0^l EJ(w''(x))^2 dx}{\int_0^l (w'(x))^2 dx}$$

Metoda energetyczna daje przybliżenie z nadmiarem (na niekorzyść pewności).

Dokładność metody zależy w dużym stopniu od jakości przyjętej aproksymacji funkcji ugięcia. Aby funkcja ta była bliska rzeczywistej, żądamy spełnienia przez nią kinematycznych a często i statycznych warunków brzegowych.

Przykład

Obliczenie eulerowskiej siły krytycznej dla 2-piętrowego słupa: $l_1 = 4$ m, $l_2 = 2$ m.



Metoda energetyczna:

1. przybliżenie: $w(x) = a(x^3 + bx^2 + cx + d)$
 kin. w. brz.: $w(0) = w(l_1) = w(l_1 + l_2) = 0$
 $w(x) = a(x^3 - 10x^2 + 24x)$, $P_{kr} = 1.458 EJ$
2. przybliżenie: $w(x) = a(x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f)$
 kin. w. brz.: $w(0) = w(l_1) = w(l_1 + l_2) = 0$
 stat. w. brz.: $w''(0) = w''(l_1 + l_2) = 0$, $P_{kr} = 0.952 EJ$

Ścisła metoda rozwiązania:

dla $0 < x_1 < l_1$, $w_1'' + k_1^2 w_1 = -\frac{P}{EJ} x_1$, podstawiając $k^2 \equiv \frac{N}{EJ}$

otrzymujemy (c.o.r.j.+c.s.r.n.):

$$w_1(x) = A \sin k_1 x_1 + B_1 \cos k_1 x_1 - \frac{P}{N} x_1$$

z warunkami brzegowymi:

$$w_1(0) = w_1(l_1) = 0 \Rightarrow w_1(x_1) = \frac{P l_1}{N \sin k_1 l_1} \sin k_1 x_1 - \frac{P}{N} x_1,$$

(analogicznie dla $0 < x_2 < l_2$). Warunki zgodności rozwiązań mają postać: $w_1'(l_1) = -w_2'(l_2)$, $M_1(l_1) = M_2(l_2)$.

Z porównania drugich pochodnych wynika $k_1 = -k_2 = k$, a z warunku na pierwsze pochodne otrzymujemy po przekształceniach:

$$k \left(\frac{\cos k l_1}{\sin k l_1} + \frac{\cos k l_2}{\sin k l_2} \right) = \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \Rightarrow k = 0.9642 \Rightarrow N = k^2 EJ = 0.930 EJ.$$