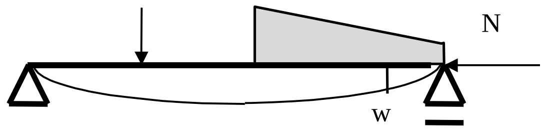
Zginanie ze ściskaniem

Sformułowanie problemu

W problemach tego typu nie można stosować zasady zesztywnienia - konstrukcję należy rozpatrywać w konfiguracji odkształconej (aktualnej) w której widać, że działanie siły N zależy od działania obciążenia poprzecznego. Innymi słowy, nie są to działania niezależne.



W dalszym ciągu naszych rozważań zakładać będziemy, że obowiązują związki Hooke'a. Stąd, równanie ugiętej osi belki:

$$EJ_y w''(x) = -M(x)$$

Moment zginający jest sumą momentu pochodzącego od zginania obciążeniem poprzecznym oraz momentu pochodzącego od siły ściskającej (z definicji momenty są addytywne; nie jest to superpozycja, gdyż sumowanie dotyczy konfiguracji odkształconej):

$$M(x) = M_0(x) + Nw(x),$$

a więc równanie ugięcia ma postać:

$$EJ_y w''(x) + Nw(x) = -M_0(x)$$

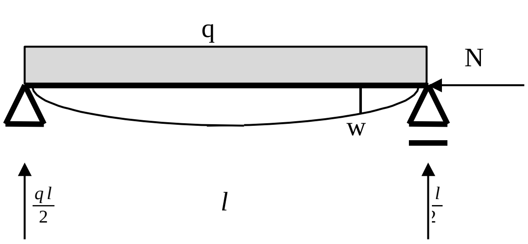
a podstawiając $k^2 \equiv \frac{N}{EJ_y}$, otrzymujemy niejednorodne równanie Eulera:

$$w''(x) + k^2 w(x) = -\frac{M_0}{EJ_y},$$

którego rozwiązaniem jest suma całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego.

Przykłady rozwiązań

Przykład 1



Całka ogólna równania niejednorodnego równa jest sumie całki ogólnej równania jednorodnego oraz całki szczególnej równania niejednorodnego (znalezionej metodą przewidywania):

$$w(x) = A\sin kx + B\cos kx - \frac{q}{Nk^2} - \frac{ql}{2N}x + \frac{q}{2N}x^2.$$

Stałe A i B znajdujemy z kinematycznych warunków brzegowych:

$$w(0) = w(l) = 0,$$

otrzymując ostatecznie ugięcie równe:

$$w(x) = \frac{q}{Nk^2}\left(\frac{1-\cos kl}{\sin kl}\sin kx + \cos kx - 1\right) - \frac{ql}{2N}x + \frac{q}{2N}x^2,$$

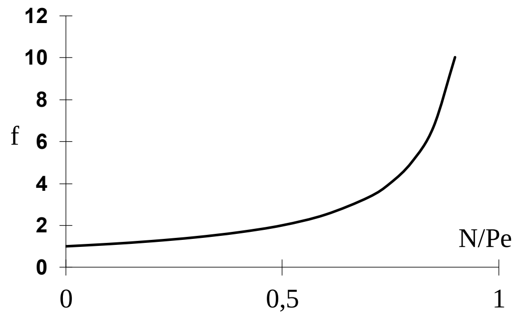
a stosunek ugięcia do ugięcia belki jedynie z obciążeniem poprzecznym wynosi:

$$\frac{w_{\max}}{w^0{}_{\max}} = \frac{w(\frac{l}{2})}{w^0(\frac{l}{2})} = \frac{\frac{q}{Nk^2}\left(\frac{1-\cos kl}{\sin kl}\sin\frac{kl}{2} + \cos\frac{kl}{2} - 1\right) - \frac{ql^2}{8N}}{\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ_y}}.$$

Podstawiając wyrażenie $P_E = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}$, mamy:

$$\frac{w_{\max}}{w^0{}_{\max}} = \frac{\frac{1-\cos kl}{\sin kl}\sin\frac{kl}{2} + \cos\frac{kl}{2} - 1 - \frac{(kl)^2}{8}}{\frac{5}{384}(kl)^4} = f(kl), \text{ gdzie } kl = \pi\sqrt{\frac{N}{P_E}}.$$

P_E jest tzw. *siłą eulerowską*. Nie jest to siła krytyczna gdyż nie rozważamy utraty stateczności. Ponadto, we wzorze jest J_y zamiast J_{min}.



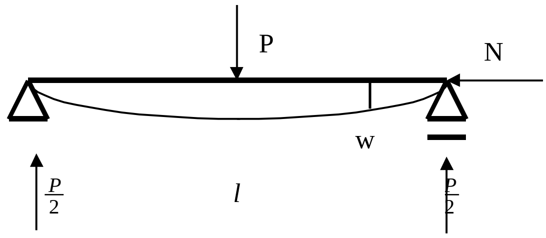
Jak widać, przyrost ugięć zależy od przyrostu siły ściskającej a nie zależy od wielkości obciążenia poprzecznego (wystarczy, że istnieje). Innymi słowy, obecność obciążenia poprzecznego nie wpływa na wartość krytyczną siły ściskającej. Moment zginający, podobnie jak i ugięcia belki, rośnie szybko w pobliżu siły równej sile eulerowskiej.

Identyczny wynik otrzymuje się dla wyrażenia

$$w(\tfrac{l}{2}) = \frac{q}{N}\left(\frac{1-\cos\frac{kl}{2}}{k^2\cos\frac{kl}{2}} - \frac{l^2}{8}\right),$$

uzyskanego po wykorzystaniu warunków brzegowych w(0) = w'(*l*/2) = 0 (symetria rozwiązania).

Przykład 2



Ze względu na symetrię ograniczamy się do 0 < x < l/2.

Dla $M(x) = \frac{P}{2}x + Nw(x)$ równanie Eulera przyjmuje postać: $w''(x) + k^2 w(x) = -\dfrac{P}{2EJ_y}x$,

gdzie $k^2 \equiv \dfrac{N}{EJ_y}$.

Całka ogólna równania niejednorodnego zawiera 2 stałe, które wyznaczamy z warunków brzegowych:

$$w(0) = w'(l/2) = 0,$$

otrzymując:

$$w(x) = \frac{P\sin\frac{kl}{2}}{Nk\sin kl}\sin kx - \frac{P}{2N}x,$$

a strzałka ugięcia w stosunku do ugięcia pochodzącego jedynie od obciążenia poprzecznego wyraża się:

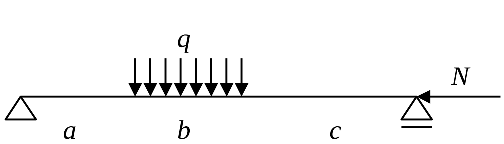
$$f = w(l/2) = \ldots(\frac{kl}{2} \equiv u)\ldots = \frac{Pl^3}{48EJ_y} 3\frac{\operatorname{tg} u - u}{u^3} = f_o \frac{\operatorname{tg} u - u}{u^3}.$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, ugięcia belki rosną niebezpiecznie szybko w pobliżu siły eulerowskiej, której sama wartość nie zależy od obciążenia poprzecznego (wystarczy, że istnieje). Fakt ten uwzględniamy przyjmując odpowiedni współczynnik bezpieczeństwa dla siły ściskającej.

Maksymalny moment zginający wyraża się:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4}\frac{\operatorname{tg} u}{u} = M_0 \frac{\operatorname{tg} u}{u}, \text{ gdzie } u \equiv \frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{P_E}}.$$

Przykład 3



Obliczamy reakcje:

$$R_A = \frac{qb(c+0.5b)}{a+b+c}, \quad R_B = \frac{qb(a+0.5b)}{a+b+c}$$

Dla każdego z trzech przedziałów znajdujemy równanie momentów zginających, całkę szczególną oraz ogólne równanie na ugięcia (współrzędna *x* inna dla każdego przedziału):

Przedział 1

$$M_1(x) = R_A x, \quad w_{1s}(x) = Ax + B \quad \rightarrow \quad w_{1s}(x) = -\frac{R_A}{N}x$$

$$w_1(x) = A_1 \sin kx + B_1 \cos kx - \frac{R_A}{N}x$$

Przedział 2

$$M_2(x) = R_A(a + x) - \frac{qx^2}{2}, \quad w_{2s}(x) = Ax^2 + Bx + C = \frac{q}{2N}x^2 - \frac{R_A}{N}x - \frac{q}{Nk^2} - \frac{R_A}{N}a$$

$$w_2(x) = A_2 \sin kx + B_2 \cos kx + \frac{q}{2N}x^2 - \frac{R_A}{N}x - \frac{q}{Nk^2} - \frac{R_A}{N}a$$

Przedział 3

$$M_3(x) = R_A(a + b + x) - qb(x + 0.5b), \quad w_{2s}(x) = Ax + B = \frac{-R_A + qb}{N}x - \frac{R_A}{N}(a + b) + \frac{qb^2}{2N}$$

$$w_3(x) = A_3 \sin kx + B_3 \cos kx + \frac{qb - R_A}{N}x - \frac{R_A}{N}(a + b) + \frac{qb^2}{2N}$$

Stałe $A_1 \div B_3$ obliczamy z warunków:

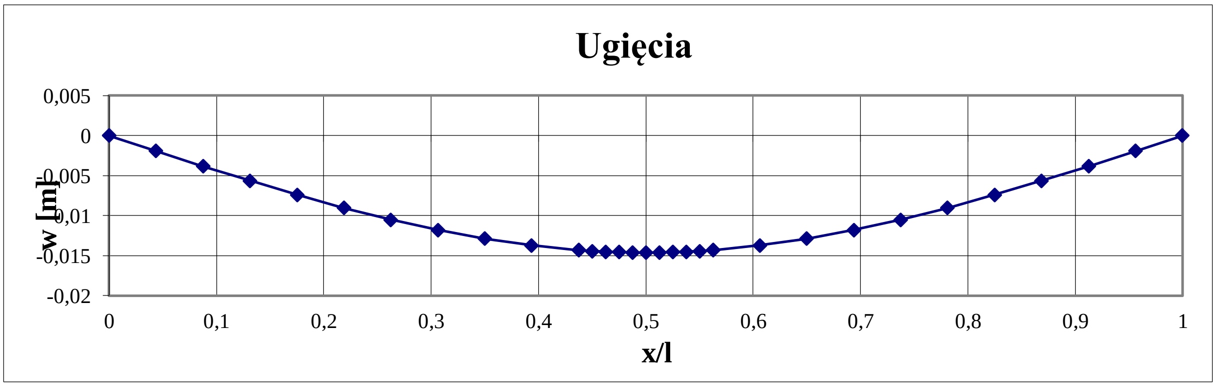
- brzegowych: $w_1(0) = 0, \quad w_3(c) = 0$

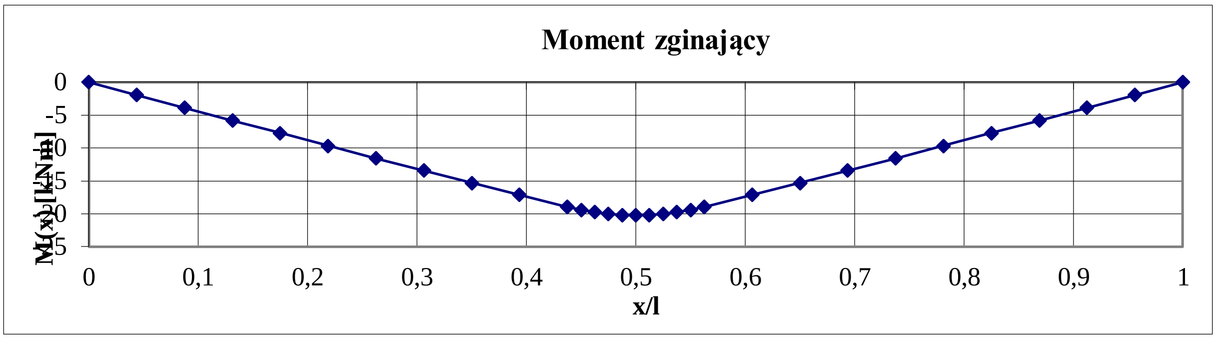
- zszycia:

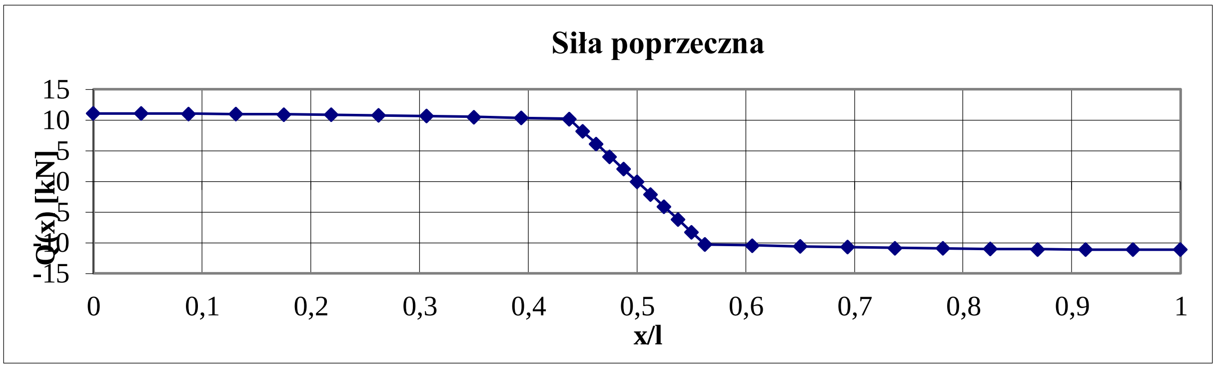
$$w_1(a) = w_2(0), \quad w_1'(a) = w_2'(0)$$
$$w_2(b) = w_3(0), \quad w_2'(b) = w_3'(0)$$

otrzymując ostateczne wzory na ugięcia, kąt ugięcia, moment zginający i siłę poprzeczną.

Przykładowe rozwiązania dla $a = c = 1.75$ m, $b = 0.5$ m, $q = 40$ kN/m, $N = 100$ kN, przekroju 0.062×0.124 m, materiału $E = 200$ GPa, $R_H = 150$ MPa, $R_e = 180$ MPa, przedstawiają poniższe wykresy.







Przykład obliczeniowy

Zaprojektować przekrój prostokątny belki $b \times h = d \times 2d$, obciążonej w środku przęsła $l = 4$ m siłą $P = 20$ kN, ściskanej siłą N = 100 kN, jeśli $R = 160$ MPa, $E = 200$ GPa.

Naprężenia normalne:

$$\max \sigma_x = \frac{M_{\max}}{W_y} + \frac{N}{F} = \frac{Pl}{4}\frac{\operatorname{tg} u}{u}\frac{6}{4d^3} + \frac{N}{2d^2} \le R,$$

gdzie $u = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{P_E}} = \cdots = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{3N}{2Ed^4}} = 0.00173/d^2$.

Rozwiązując numerycznie nierówność, otrzymujemy:

$d = 6.05$ cm, $F = 73.27$ cm^2, $J_y = 894.8$ cm^4, $J_z = 223.7$ cm^4, $W_y = 147.8$ cm^3, $P_{ey} = 1.1$ MN, $P_{ez} = 276$ kN (obie siły> N), $\max\sigma_x = 160$ MPa, $M_{max} = 21.64$ kNm, $f = 1.64$ cm.

Inny sposób rozwiązania, *metodą kollokacji*, polega na przyjęciu funkcji ugięcia w postaci:

$$w(x) = a \sin \frac{\pi x}{l},$$

spełniającej kinematyczne warunki brzegowe oraz zażądaniu zgodności rozwiązania aproksymowanego z rozwiązaniem ścisłym w jednym dodatkowym przekroju: w środku rozpiętości belki. Jest więc:

$$w''(x) = -\frac{\pi^2}{l^2} a \sin \frac{\pi x}{l} \quad \Rightarrow \quad EJ_y \frac{\pi^2}{l^2} a \sin \frac{\pi x}{l} = M_0(x) + Na \sin \frac{\pi x}{l},$$

a po przekształceniach, dla $x = l/2$:

$$a=\frac{\frac{Pl}{4}}{\frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}-N}=\frac{12}{\pi^2}\frac{Pl^3}{48EJ_y}\frac{1}{1-\frac{N}{P_E}}=\frac{12}{\pi^2}a_{spr}\frac{1}{1-\frac{N}{P_E}},$$

oraz:

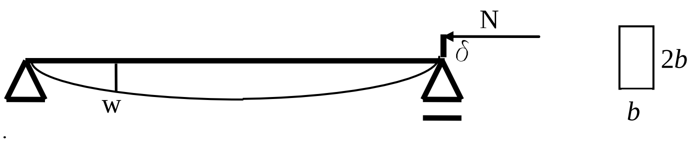
$$w(l/2)=f=a\sin\pi/2=a.$$

Podstawiając otrzymane wyrażenia do wzoru na naprężenia, otrzymujemy z rozwiązania numerycznego:

d = 6.08 cm, F = 73.94 cm^2, J_y = 911.3 cm^4, J_z = 227.8 cm^4, W_y = 149.9 cm^3, P_{ey} = 1.12 MN, P_{ez} = 281 kN (obie siły> N), max σ_x = 160 MPa, M_{max} = 21.95 kNm, f = 1.95 cm.

Zginanie ze ściskaniem - przykład

Zwymiarować przekrój poprzeczny pręta ściskanego jak na rysunku. Przyjąć dane: l = 3.5 [m], P = 1MN, δ = 0.1 [m], E = 210 [GPa], R = R_H = 180 [MPa],



W zakresie sprężystym obowiązują związki Hooke'a. Stąd, równanie ugiętej osi belki:

$$EJ_y w''(x)=-M(x)$$

Moment zginający jest sumą momentu pochodzącego od zginania obciążeniem poprzecznym oraz momentu pochodzącego od siły ściskającej (rozważania prowadzimy w konfiguracji aktualnej, odkształconej):

$$M(x)=M_0(x)+Nw(x)=-R_A x-Nw=-\frac{N\delta}{l}x-Nw,$$

a więc równanie ugięcia ma postać:

$$EJ_y w''(x)+Nw(x)=-\frac{N\delta}{l}x$$

Jest to niejednorodne równanie Eulera. Podstawiając $k^2\equiv\frac{N}{EJ_y}$, otrzymujemy:

$$w''(x)+k^2 w(x)=-k^2\delta\frac{x}{l},$$

którego rozwiązaniem jest suma całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego:

$$w_s=Cx+D\quad\rightarrow\quad D=0, C=-\frac{\delta}{l}$$

a więc całka ogólna:

$$w(x)=Acoskx+Bsinkx-\delta\frac{x}{l}$$

Podstawiając warunki brzegowe: $w(0) = w(l) = 0$, mmy

$$A = 0, B = \frac{\delta}{\sin kl}$$

i ostatecznie:

$$w(x) = \delta\left(\frac{\sin kx}{\sin kl} - \frac{x}{l}\right)$$

Wprowadzamy wszystkie niezbędne formuły do excela, sprawdzając nie tylko zakres ale i siłę krytyczną Eulera oraz siłę eulerowską.

Przyjmując, metodą prób i błędów, b = 0.11 [m] mamy:

długość wyboczeniowa $l_w = l = 3.5$ [m] (przyjmujemy w płaszczyźnie prostopadłej podparcie przegubowe)

smukłość: $\lambda = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{l}{\frac{b}{\sqrt{12}}} = \frac{3.5}{0.11}\sqrt{12} = 110.2$

smukłość graniczna: $\lambda_{gr} = \pi\sqrt{\frac{E}{R_H}} = 107.$

ponieważ $\lambda > \lambda_{gr}$ zakres jest sprężysty

siła krytyczna Eulera

$$P_E = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2} = 4.13\ [\mathrm{MN}]$$

zatem współczynnik bezpieczeństwa wynosi $n = 4.13$.

Siła eulerowska

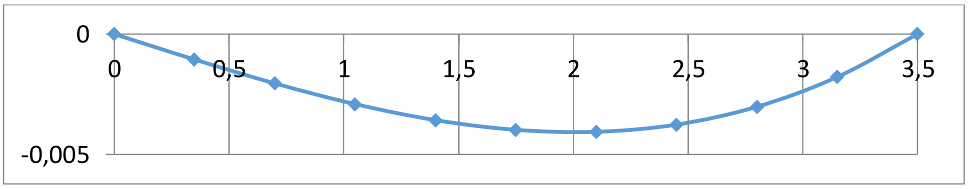
$$P_{euler} = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2} = 16.7\ [\mathrm{MN}]$$

jest wielokrotnie większa od zadanego obciążenia, bowiem:

$$s = \frac{N}{N_{euler}} = 0.0606$$

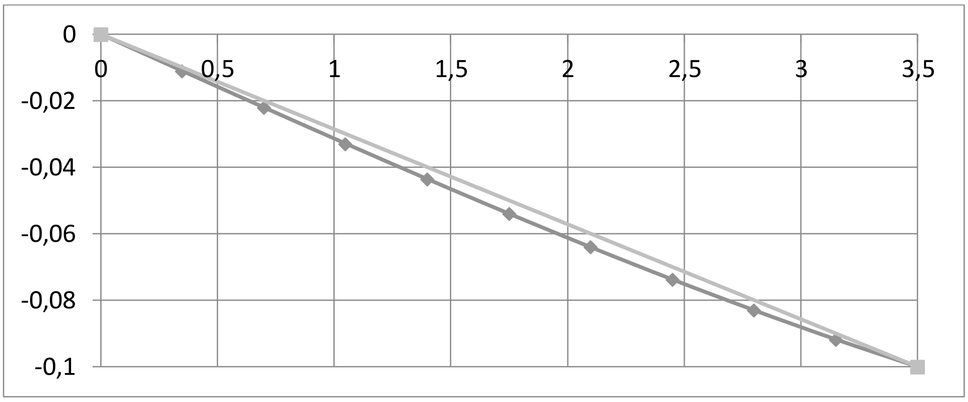
Tablicujemy ugięcia:

x/l	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
w[mm]	0	1,06	2,05	2,91	3,58	3,98	4,06	3,76	3,02	1,79	0



oraz momenty zginające:

x/l	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M[MNm]	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1



Jak widać nieliniowość zadania jest nieznaczna. Maksymalny moment gnący:

$M_{max} = 0.1$ [MNm]

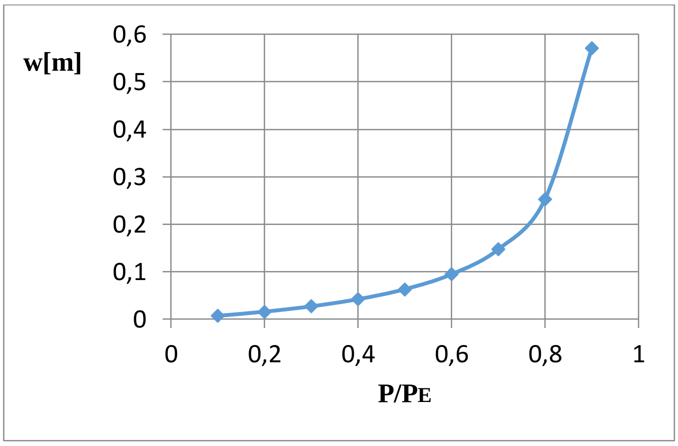
maksymalne naprężenia normalne:

$$\max \sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{1e6}{2*0{,}11} + \frac{0.1e6}{\frac{2}{3}0.11^3} = 154 \text{ \{MPa\}}$$

oznacza to poziom naprężenia odpowiadający 86% dopuszczanych i potwierdza zakres sprężysty.

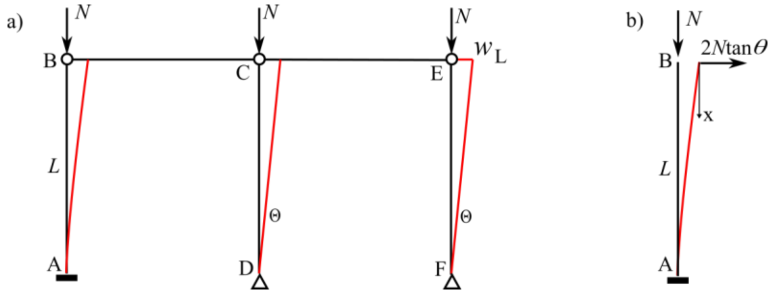
Dla przekonania się o nieliniowości zadania przeprowadzamy obliczenia dla różnych poziomów siły: od 0,1 do 0,9 siły eulerowskiej. W tym celu tablicujemy rozwiązania na rozkład ugięć belki, wybierając dla każdego z poziomów siły maksymalne ugięcie. Zależność przedstawia poniższa tabela i wykres:

P/Peuler	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
w_max [mm]	0	3.8	7.0	15.8	27.1	42.1	63.1	94.6	147	253



Przykład (Frey, zad. 20.6.9)

Określić obciążenie krytyczne układu jak na rysunku poniżej, złożonego ze słupa utwierdzonego jednostronnie i kilku dwuprzegubowych słupów i belek. Porównać długość wyboczeniową utwierdzonego słupa z wartością dla przypadku standardowego. Określić nośność krytyczną w przypadku ramy jednoprzęsłowej.



Rozwiązanie

Dla konfiguracji aktualnej (odkształconej) układu, jak na powyższym rysunku z prawej, mamy:

$$M(x) = Nw + 2N \tan\theta\, x$$

Ponieważ $EIw"(x) = -M(x)$, oraz przyjmując $k^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N}{EJ}$, otrzymujemy równanie Eulera:

$$w" + k^2 w = -2k^2 \tan\theta\, x$$

z całką ogólną i szczególną:

$$w(x) = A\sin kx + B\cos kx - 2\tan\theta\, x$$

Stałe możemy wyznaczyć z warunków brzegowych:

$$w(0) = 0 \;\; \rightarrow \;\; B = 0$$

$$w'(L) = 0 \;\; \rightarrow \;\; Ak\cos kL - 2\tan\theta = 0$$

Wyrażamy funkcję tangensa z kolejnego warunku:

$$w(L) = w_L \quad \rightarrow \quad A\sin kL - 2L\tan\theta = L\tan\theta \quad \rightarrow \quad \tan\theta = \frac{A}{3L}\sin kL$$

więc:

$$Ak\cos kL - \frac{2}{3L}A\sin kL = 0 \quad \rightarrow \quad AkL\cos kL - \frac{2}{3}A\sin kL = 0$$

Rozwiązanie powyższego równania nie zależy od parametru A. Wstawiając $kL \stackrel{\text{def}}{=} \xi$, mamy:

$$\cos\xi - \frac{2}{3}\sin\xi = 0 \quad \rightarrow \quad \xi = kL = 0.9674 \quad \rightarrow \quad k^2L^2 = 0.9359$$

i, ostatecznie, obciążenie krytyczne wynosi:

$$N_{cr} = 0.9359\frac{EI}{L^2}$$

Oznacza to, że długość wyboczeniowa jest $l_w = \sqrt{\frac{\pi^2}{0.9359}}L = 3.247L \gg 2L$

W przypadku ramy jednoprzęsłowej, siła pozioma działająca na słup redukuje się do wartości $N\tan\theta$, więc:

$$w" + k^2 w = -k^2 \tan\theta\, x$$

$$w(x) = A\sin kx + B\cos kx - \tan\theta\, x$$

Warunki brzegowe:

$$w(0) = 0 \ \rightarrow \ B = 0$$

$$w'(L) = 0 \ \rightarrow \ Ak \cos kL - \tan\theta = 0$$

Funkcja tangens jest równa:

$$w(L) = w_L \quad \rightarrow \quad A \sin kL - L \tan\theta = L \tan\theta \quad \rightarrow \quad \tan\theta = \frac{A}{2L} \sin kL$$

skąd mamy:

$$Ak \cos kL - \frac{1}{2L} A \sin kL = 0 \quad \rightarrow \quad AkL \cos kL - \frac{1}{2} A \sin kL = 0$$

oraz

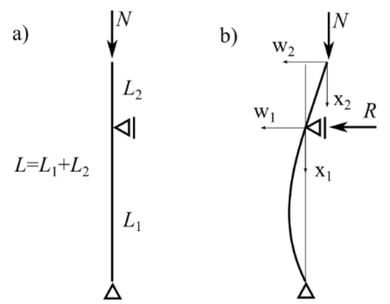
$$\xi \cos \xi - \frac{1}{2} \sin \xi = 0 \quad \rightarrow \quad \xi = kL = 1.1656 \quad \rightarrow \quad k^2 L^2 = 1.3586$$

i obciążenie krytyczne wynosi:

$$N_{cr} = 1.3586 \frac{EI}{L^2}$$

Przykład (Frey, zad. 20.6.10)

Dla dwupiętrowego słupa z rysunku poniżej narysować podstawową formę wyboczenia, określić długość wyboczeniową dla $L_1 \rightarrow 0$ i $L_2 \rightarrow 0$, określić długośćwyboczeniową dla $L_2 = 0.4L_1$, i wyjaśnić dlaczego długość wyboczeniowa różni się od wielkości standardowej dla przypadku podstawowego.



Rozwiązanie

Podstawowa forma wyboczenia jest pokazana na rys. powyżej z prawej. Dla $L_2 = 0$ otrzymujemy przypadek podstawowy belki jednoprzęsłowej podpartej na końcach o długości wyboczeniowej $l_w = L_1 = L$, a dla $L_1 = 0$ otrzymujemy przypadek belki jednostronnie utwierdzonej o długości wyboczeniowej równej $l_w = 2L_2 = 2L$.

Rozwiązanie dla przypadku $L_2 = 0.4L_1$:

Z równania równowagi dla momentu względem dolnej podpory, mamy

$$R = N \frac{\delta}{L_1}$$

gdzie δ jest przemieszczeniem punktu przyłożenia siły. Zapisujemy równania dla dwóch kolejnych przedziałów.

Pierwszy przedział $0 \leq x_1 \leq L_1$

$$M(x_1) = Nw_1 + N\delta - Rx_1$$

$$EIw_1" = -Nw_1 - N\delta + N\frac{\delta}{L_1}x_1$$

Wstawiając $k^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N}{EI}$, otrzymujemy równanie Eulera:

$$w_1" + k^2 w_1 = k^2\delta\left(-1 + \frac{x_1}{L_1}\right)$$

z rozwiązaniem:

$$w_1 = A\sin kx_1 + B\cos kx_1 - \delta + \delta\frac{x_1}{L_1}$$

Warunki brzegowe są:

$$w_1(0) = 0 \;\; \rightarrow \;\; B - \delta = 0 \;\; \rightarrow \;\; B = \delta$$

$$w_1(L_1) = 0 \;\; \rightarrow \;\; A\sin kL_1 + \delta\cos kL_1 = 0 \;\; \rightarrow \;\; A = -\delta\frac{\cos kL_1}{\sin kL_1}$$

Ostatecznie:

$$w_1 = -\delta\frac{\cos kL_1}{\sin kL_1}\sin kx_1 + \delta\cos kx_1 - \delta + \delta\frac{x_1}{L_1}$$

Drugi przedział $0 \leq x_2 \leq L_2$

$$M(x_2) = Nw_2$$

$$EIw_2" = -Nw_2$$

Wstawiając $k^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N}{EI}$, otrzymujemy równanie Eulera:

$$w_2" + k^2 w_2 = 0$$

z rozwiązaniem

$$w_2 = C\sin kx_2 + D\cos kx_2$$

Warunki brzegowe są:

$$w_2(0) = 0 \;\; \rightarrow \;\; D = 0$$

$$w_2'^{(L_2)} = w_1'(0) \;\; \rightarrow \;\; Ck\cos kL_2 = -\delta\frac{\cos kL_1}{\sin kL_1}\mathrm{k} + \frac{\delta}{L_1} \;\; \rightarrow \;\; C\cos kL_2 = -\delta\frac{\cos kL_1}{\sin kL_1} + \frac{\delta}{kL_1}$$

Mamy:

$$w_2(L_2) = \delta \;\; \rightarrow \;\; C\sin kL_2 = \delta \;\; \rightarrow \;\; C = \frac{\overset{\delta}{\delta}}{\sin 0.4\xi}$$

Podstawiając $\xi \stackrel{\text{def}}{=} kL_1, \;\; kL_2 = 0.4kL_1 = 0.4\xi$, zapisujemy równanie:

$$\delta\frac{\cos 0.4\xi}{\sin 0.4\xi} + \delta\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - \frac{\delta}{\xi} = 0$$

Jak widać, rozwiązanie nie zależy od δ, i ostatecznie mamy:

$$\frac{\cos 0.4\xi}{\sin 0.4\xi} + \frac{\cos\xi}{\sin\xi} - \frac{1}{\xi} = 0$$

z rozwiązaniem

$$\xi = kL_1 = 2.008 \quad \rightarrow \quad k^2L_1^2 = 4.03$$

Obciążenie krytyczne wynosi:

$$N_{cr} = 4.03\frac{EI}{L_1^2} = \frac{\pi^2}{L^2}\frac{1.4^2L_1^2}{\pi^2}4.03\frac{EI}{L_1^2} = 0.8\frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

W konfiguracji odkształconej siła ściskająca jest skośna w pierwszym przedziale i pionowa w drugim przedziale, co tłumaczy „osobliwość” długości wyboczeniowej.