

Belki na podłożu sprężystym

podłoże winklerowskie, równanie różniczkowe ugięcia belki, linie wpływowe M-Q-w, belki półnieskończone, sposób Bleicha, przykład obliczeniowy

Podłoże winklerowskie

Założenia Winklera współpracy podłoża z belką są następujące:

- brak tarcia między belką a podłożem,
- więzy dwustronne między podłożem i belką
- odpór podłoża proporcjonalny do przemieszczenia:

$$r(x) = bcw(x) = kw(x)$$

gdzie b jest szerokością belki, współczynnik c określa podatność podłoża (50 - 2000 MPa/m).

Związki różniczkowe dla belki na podłożu sprężystym będą analogiczne jak dla zwykłej belki, za wyjątkiem ciągłego obciążenia poprzecznego, które uzupełniamy członem wynikającym z odporu podłoża:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ}, \quad \frac{dM(x)}{dx} = Q(x), \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) + r(x)$$

skąd:
$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} = -\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M(x)}{EJ} \right) = \frac{q(x) - r(x)}{EJ} = \frac{q(x) - kw(x)}{EJ}, \text{ albo } \frac{d^4w(x)}{dx^4} + \frac{bc}{EJ} w(x) = \frac{q(x)}{EJ}.$$

Podstawiając:

$$\alpha \equiv \sqrt[4]{\frac{bc}{4EJ}}, \quad \left[\frac{1}{m} \right], \quad \xi \equiv \alpha x$$

otrzymujemy równanie różniczkowe ugięć belki na podłożu sprężystym:

$$\boxed{\frac{d^4w(\xi)}{d\xi^4} + 4w(\xi) = 4 \frac{q(\xi)}{bc}}$$

we współrzędnych bezwymiarowych ξ .

Jest to niejednorodne równanie Eulera. Rozwiązanie równania (jego całka ogólna) jest sumą całki szczególnej równania niejednorodnego i całki ogólnej równania jednorodnego:

$$w(\xi) = w_s(\xi) + e^{-\xi}(A \sin \xi + B \cos \xi) + e^{\xi}(C \sin \xi + D \cos \xi)$$

(całka ogólna może być też wyrażona za pomocą funkcji hiperbolicznych - $\sinh(\xi)$ i $\cosh(\xi)$).

Statyczne warunki brzegowe (jeśli występują) mają postać:

$$M(\xi) = -\alpha^2 EJw''(\xi), \quad Q(\xi) = -\alpha^3 EJw'''(\xi).$$

Jeśli $q(\xi) = 0$ to $w_s(\xi) = 0$, jeśli zaś $q(\xi) = \text{const}$ to $w_s(\xi) = \frac{q}{bc} = \text{const}$. Jest to ugięcie belki pod jednorodnym obciążeniem ciągłym.

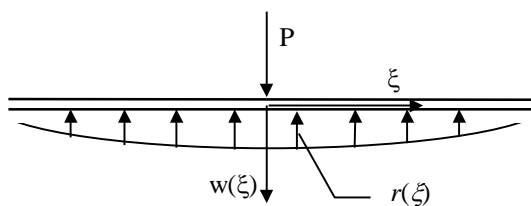
Wyrażenie e^{ξ} bardzo szybko rośnie. Aby otrzymać skończone wartości rozwiązania, stałe C i D muszą się zerować. Zmuszeni jesteśmy do poszukiwania rozwiązania osobno dla $\xi < 0$, gdzie $A = B = 0$ i osobno dla $\xi > 0$, gdzie $C = D = 0$.

Wyrażenie $e^{-\xi}$ szybko maleje, człon zawierający to wyrażenie przedstawia tzw. drgania harmonicznymie gasnące (tłumione). Praktycznie można przyjąć że dla $\xi > 5$ odpowiednie człony się zerują¹.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned}\eta_1(\xi) &= e^{-\xi}(\sin \xi + \cos \xi), \\ \eta_2(\xi) &= e^{-\xi}(-\sin \xi + \cos \xi), \\ \eta_3(\xi) &= e^{-\xi} \cos \xi, \\ \eta_4(\xi) &= e^{-\xi} \sin \xi,\end{aligned}$$

Linie wpływowe M, Q, w



Rozpatrzmy problem belki na podłożu sprężystym, obciążonej siłą skupioną. Rozwiązujemy problem osobno dla $x > 0$ oraz $x < 0$.

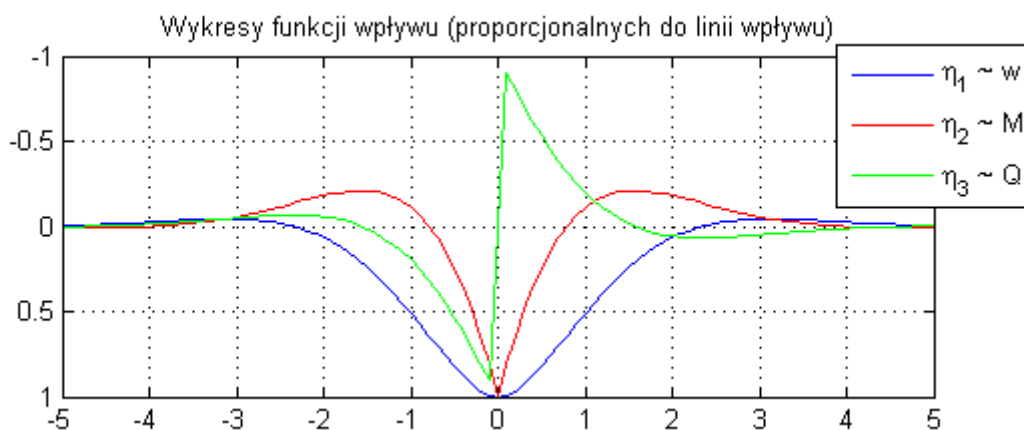
Z symetrii ugięcia belki względem przekroju obciążenia wynikają 2 warunki:

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} w'(\xi) = 0 \quad \text{oraz} \quad Q(-0) = \frac{P}{2} = -Q(+0), \quad EJ\alpha^3 w'''(\xi) = \frac{P}{2}.$$

Wyliczając stałe całkowania, osobno w każdym z przedziałów, otrzymujemy wzory, które łącznie zapiszemy:

$$\begin{aligned}w(\xi) &= \frac{P}{8\alpha^3 EJ} \eta_1(|\xi|), \\ M(\xi) &= \frac{P}{4\alpha} \eta_2(|\xi|), \\ Q(\xi) &= \pm \frac{P}{2} \eta_3(|\xi|).\end{aligned}$$

(Wykres dla $Q(x)$ jest odwrócony, z uwagi na oś skierowaną w dół.)



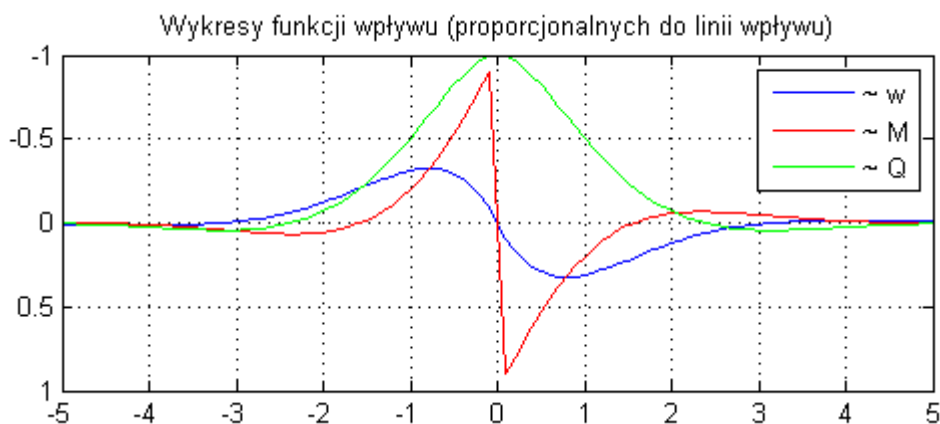
Postępując podobnie dla belki obciążonej momentem skupionym, otrzymujemy wzory (dla momentu działającego zegarowo):

¹już $\exp(-4.62) = 0.01$

$$w(\xi) = \mp \frac{M_0}{4\alpha^2 EJ} \eta_4(|\xi|),$$

$$M(\xi) = \mp \frac{M_0}{2} \eta_3(|\xi|),$$

$$Q(\xi) = -\frac{M_0\alpha}{2} \eta_1(|\xi|).$$



(Podobnie jak poprzednio, dla osi rzędnych skierowanej w dół, wykres $Q(x)$ jest narysowany po przeciwnej stronie niż zwykle).

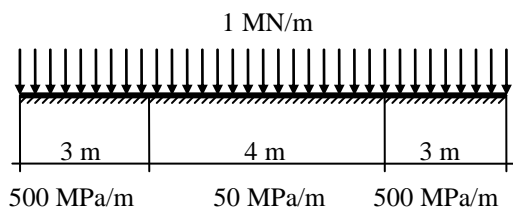
Powyższe wzory można odczytywać dwojako:

- jako wartość ugięcia (momentu zginającego, siły poprzecznej) w przekroju ζ od obciążenia działającego w początku układu współrzędnych, albo
- jako wartość ugięcia (momentu zginającego, siły poprzecznej) w przekroju oddalonym o $-\zeta$ od przekroju działania obciążenia.

W tym drugim przypadku, dla jednostkowej wartości obciążenia, otrzymamy tzw. *linie wpływowe* odpowiednich wielkości.

Posługując się powyższymi wzorami oraz zasadą superpozycji, można w prosty sposób obliczać wartości ugięć, momentów zginających i sił poprzecznych wywołanych dowolnym układem obciążenia.

Przykład liczbowy



Dane dla belki

$$E = 30 \text{ GPa}, b \times h = 1 \times 0.5 \text{ m}$$

Rozwiązanie

Z uwagi na zmieniający się współczynnik odporu mamy 3 przedziały charakterystyczne równania na ugięcia. Zapisujemy równanie różniczkowe ugięć dla każdego z przedziałów.

Ogólna postać całki szczególnej dla każdego z przedziałów jest taka sama, ale wartości są różne dla różnych przedziałów:

$$w_i(\xi) = \frac{q}{bc}, \quad w_1(\xi) = 0.002, \quad w_2(\xi) = 0.02, \quad w_3(\xi) = 0.002,$$

Równania ugięć w przedziałach mają postać (współrzędna ξ dla każdego przedziału definiowana lokalnie):

$$\begin{aligned} w_1(\xi) &= e^{-\xi} [A_1 \sin(\xi) + B_1 \cos(\xi)] + e^{\xi} [C_1 \sin(\xi) + D_1 \cos(\xi)], \\ w_2(\xi) &= e^{-\xi} [A_2 \sin(\xi) + B_2 \cos(\xi)] + e^{\xi} [C_2 \sin(\xi) + D_2 \cos(\xi)], \\ w_3(\xi) &= e^{-\xi} [A_3 \sin(\xi) + B_3 \cos(\xi)] + e^{\xi} [C_3 \sin(\xi) + D_3 \cos(\xi)] \end{aligned}$$

Do wyznaczenia stałych całkowania potrzebujemy 12 warunków brzegowych. Będą to:

– 4 warunki brzegowe:

$$M_1(0) = 0 \rightarrow -\alpha_1^2 EJ_y w_1''(0) = 0 \rightarrow -2A_1 + 2C_1 = 0$$

$$Q_1(0) = 0 \rightarrow -\alpha_1^3 EJ_y w_1'''(0) = 0 \rightarrow 2(A_1 + B_1) + 2(C_1 - D_1) = 0$$

$$M_3(2.385) = 0 \rightarrow -\alpha_3^2 EJ_y w_3''(2.385) = 0$$

$$-2e^{-2.385}(A_3 \cos 2.385 - B_3 \sin 2.385) + 2e^{2.385}(C_3 \cos 2.385 - D_3 \sin 2.385) = 0$$

$$Q_3(2.385) = 0 \rightarrow -\alpha_3^3 EJ_y w_3'''(2.385) = 0$$

$$\begin{aligned} -2e^{-2.385}[A_3(\cos 2.385 + \sin 2.385) + B_3(\cos 2.385 - \sin 2.385)] + \\ + 2e^{2.385}[C_3(\cos 2.385 - \sin 2.385) - D_3(\cos 2.385 + \sin 2.385)] = 0 \end{aligned}$$

– $2 \cdot 4 = 8$ warunków zszycia (zgodności):

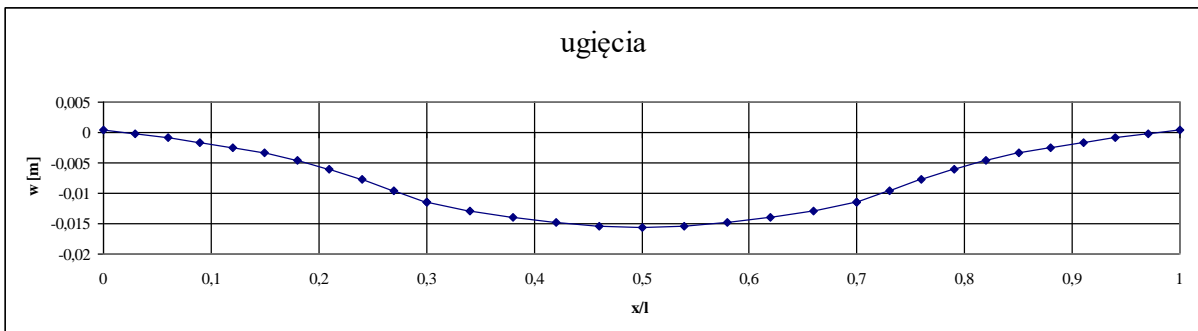
$$w_1(2.385) = w_2(0), \quad w_1'(2.385) = w_2'(0),$$

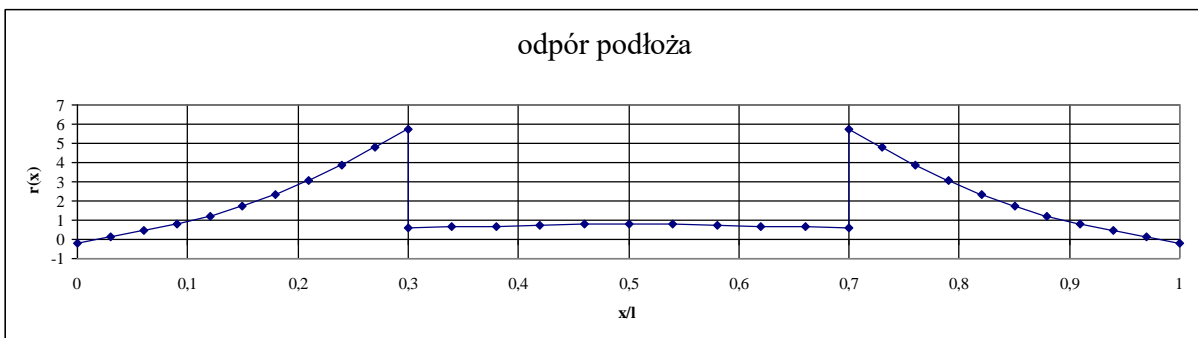
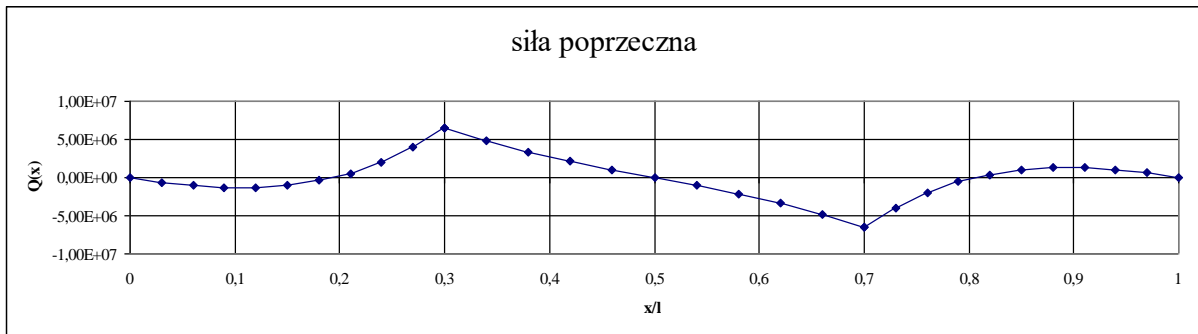
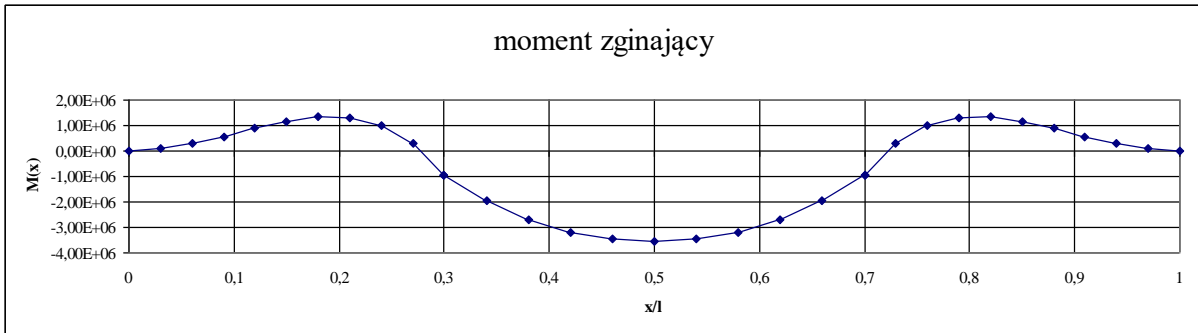
$$\alpha_1^2 w_1''(2.385) = \alpha_2^2 w_2''(0), \quad \alpha_1^3 w_1'''(2.385) = \alpha_2^3 w_2'''(0),$$

$$w_2(1.79) = w_3(0), \quad w_2'(1.79) = w_3'(0),$$

$$\alpha_2^2 w_2''(1.79) = \alpha_3^2 w_3''(0), \quad \alpha_2^3 w_2'''(1.79) = \alpha_3^3 w_3'''(0),$$

Po rozwiązaniu układu równań (12x12), otrzymujemy explicite funkcje w , M , Q , r .





Belki pół-nieskończone

Jeżeli współrzędna ξ jest z przedziału liczb $(0, \infty)$, stałe całkowania C i D automatycznie się zerują (dla $\xi \rightarrow \infty$ funkcja wykładnicza szybko zmierza do nieskończoności), i rozwiązanie się upraszcza do znalezienia całki szczególnej i dwóch stałych całkowania z warunków brzegowych.

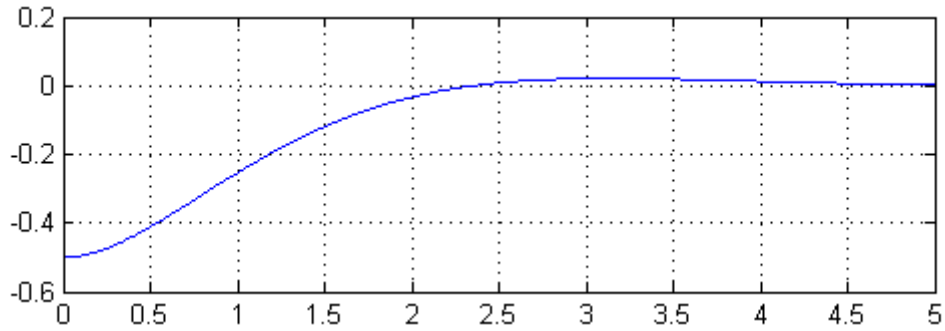
Przykład 1



całka szczególna $w_s(\xi) = 0$, z warunków brzegowych: $M(0) = M_0$, $Q(0^+) = -P$

otrzymujemy:

$$w(\xi) = \frac{1}{2\alpha^2 EJ} e^{-\xi} \left[M_0 \sin \xi + \left(\frac{P}{\alpha} - M_0 \right) \cos \xi \right]$$



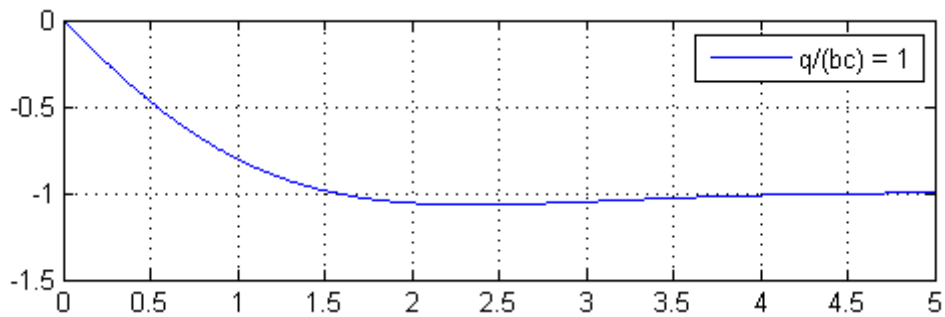
Przykład 2



całka szczególna $w_s(\xi) = \frac{q}{bc}$, z warunków brzegowych: $w(0) = M(0) = 0$

otrzymujemy:

$$w(\xi) = \frac{q}{bc} (1 - e^{-\xi} \cos \xi)$$



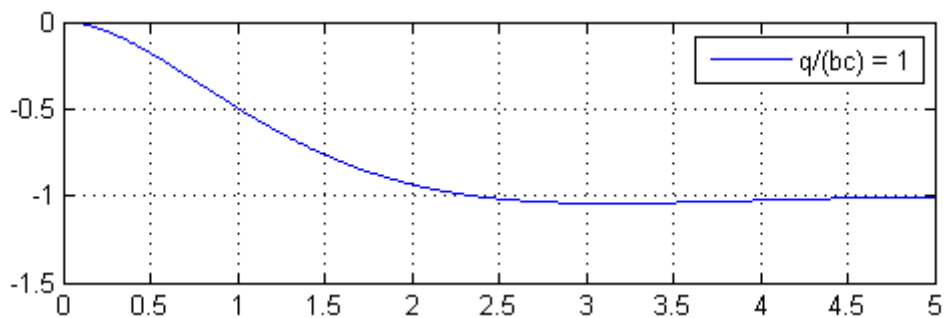
Przykład 3



całka szczególna $w_s(\xi) = \frac{q}{bc}$, z kinematycznych warunków brzegowych: $w(0) = w'(0) = 0$

otrzymujemy:

$$w(\xi) = \frac{q}{bc} [1 - e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)]$$



Przykład 4

Obliczyć ugięcia belki nieskończonej długości obciążonej stałym obciążeniem ciągłym i opartej na dwóch niepodatnych podporach, których bezwymiarowa odległość m :



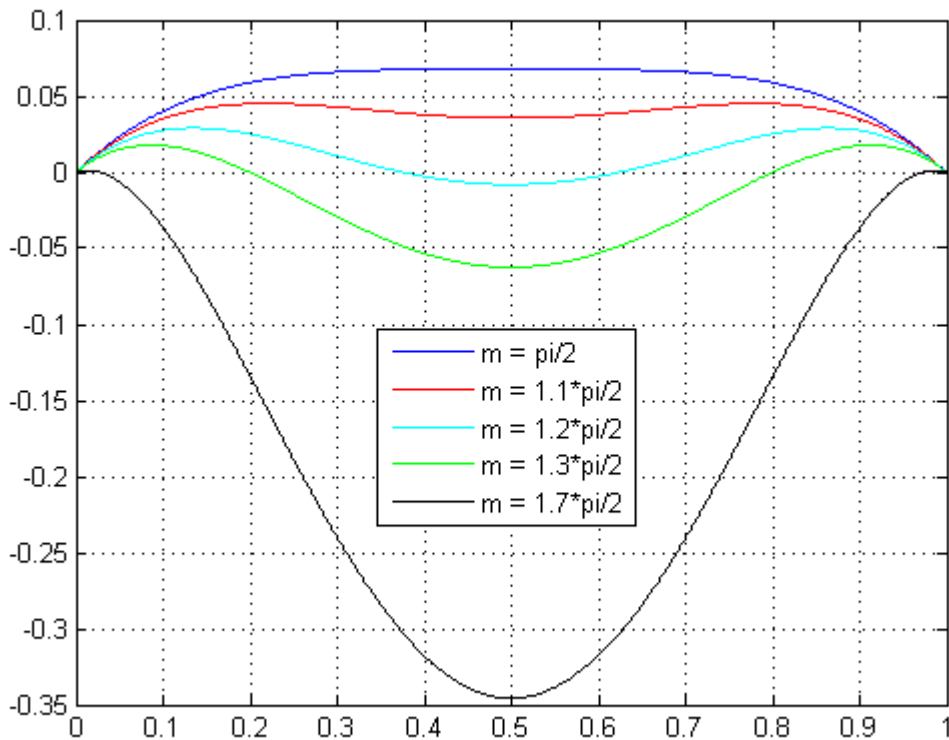
Całka szczególna $w_s(\xi) = \frac{q}{bc}$. Niewiadome siły reakcji obliczamy z warunku zerowania się ugięcia na podporach. Zastosowanie linii wpływowych daje:

$$\frac{P}{8\alpha^3 EJ} [\eta_1(0) + \eta_1(m)] + \frac{q}{bc} = 0,$$

skąd mamy:

$$P = \frac{2q}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + e^{-m}(\cos m + \sin m)}$$

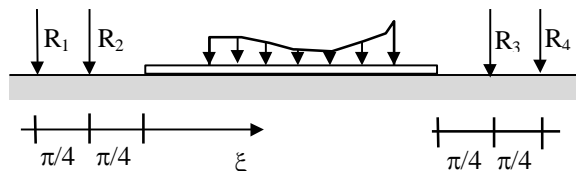
Wykresy ugięć zależą od bezwymiarowej odległości między podporami. Odległość ta jest nie tylko funkcją odległości fizycznej ale i współczynnika α , który z kolei jest stosunkiem współczynnika podatności podłoża, c , i sztywności zginania belki, EJ .

**Sposób Bleicha**

Równanie różniczkowe ugięć belki na podłożu sprężystym wymaga wyznaczenia, w każdym przedziale charakterystycznym dla $q(x)$, całki szczególnej oraz 4 stałych. Już dla paru przedziałów zadanie staje się rachunkowo uciążliwe.

Sposób Bleicha polega na zastąpieniu belki o skończonej długości belką nieskończenie długą, obciążoną identycznie w obszarze belki skończonej, a poza tym obszarem tak obciążoną, aby uzyskać zgodność statycznych warunków brzegowych z belką rzeczywistą.

Zgodność statycznych warunków brzegowych zapewniamy przykładając z każdej strony belki po dwie siły w takiej odległości, aby uprościć obliczenia poprzez zerowanie się w przekrojach skrajnych niektórych funkcji wpływu.



Wykorzystując zasadę superpozycji oraz funkcje wpływu, zapisujemy:

równanie momentów zginających:

$$M(\xi) = \frac{1}{4\alpha} \sum_i P_i \eta_2(\xi_i - \xi) \mp \frac{1}{2} \sum_j M_j \eta_3 \left(\begin{matrix} \xi_j - \xi \\ \xi - \xi_j \end{matrix} \right) + \frac{1}{4\alpha^2} q (\eta_4(\xi_w) - \eta_4(\xi_m))$$

równanie sił poprzecznych:

$$Q(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sum_i P_i \eta_3 \left(\begin{matrix} \xi_j - \xi \\ \xi - \xi_j \end{matrix} \right) - \frac{\alpha}{2} \sum_j M_j \eta_1(\xi_i - \xi) \pm \frac{q}{4\alpha} (\eta_2(\xi_m) - \eta_2(\xi_w))$$

równanie odporu podłoża:

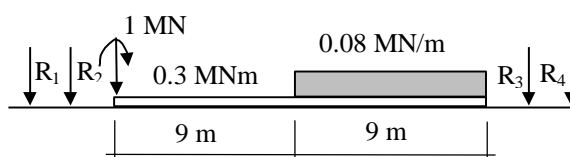
$$r(\xi) = \frac{\alpha}{2} \sum_i P_i \eta_1(\xi_i - \xi) \mp \alpha^2 \sum_j M_j \eta_4 \left(\begin{matrix} \xi_j - \xi \\ \xi - \xi_j \end{matrix} \right) + \frac{q}{2} (\eta_3(\xi_m) - \eta_3(\xi_w)).$$

W powyższych równaniach przyjęto, że dodatnia P_i jest skierowana w dół a dodatni M_j jest skierowany zgodnie ze wskazówkami zegara. Górne znaki obowiązują dla obciążenia znajdującego się z prawej strony przekroju ξ (tzn. gdy $\xi_i > \xi$). Ponadto, ξ_w (ξ_m) oznaczają większą (mniejszą) z odległości od przekroju ξ do początku (końca) obciążenia ciągłego. Jeśli rozpatrywany przekrój znajduje się wewnątrz przedziału działającego obciążenia ciągłego, obciążenie to należy obliczać osobno dla części po prawej i lewej stronie przekroju. Wszystkie funkcje η mają argumenty dodatnie.

Z warunków brzegowych na końcach belki wyznaczamy R_1, \dots, R_4 . Jeśli długość belki (bezwymiarowa) jest większa od 5, to można przyjąć, że oddziaływanie sił z jednej strony belki na jej drugim końcu jest pomijalnie małe i układ równań rozpręga się (możemy powiedzieć, że belka jest „długa”, tzn. obciążenie na jednym jej końcu nie ma już wpływu na rozwiązanie na przeciwnym końcu).

Jak widać, o tym, czy belka jest „długa” czy „krótka” decyduje nie tylko rzeczywista jej długość, lecz pośrednio i wzajemny stosunek sztywności zginania belki i współczynnika odporu podłoża. Belka o dużej sztywności jest „krótsza” niż o mniejszej sztywności. Belka jest też „krótsza” jeśli współczynnik odporu jest mniejszy.

Przykład obliczeniowy



$b \times h = 1.6 \times 0.8 \text{ m}$, $E = 24 \text{ GPa}$, $c = 60 \text{ MPa/m}$.

Obliczenia:

$$\alpha = 4\sqrt{\frac{bc}{4EJ}} = 0.348 \frac{1}{\text{m}}, k = bc = 96 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

statyczne warunki brzegowe (zgodności):

$$M_A = M = 0.3 \text{ MNm, dla } \xi = 0^+, \text{ (alternatywnie } M_A = 0 \text{ dla } \xi = 0^-)$$

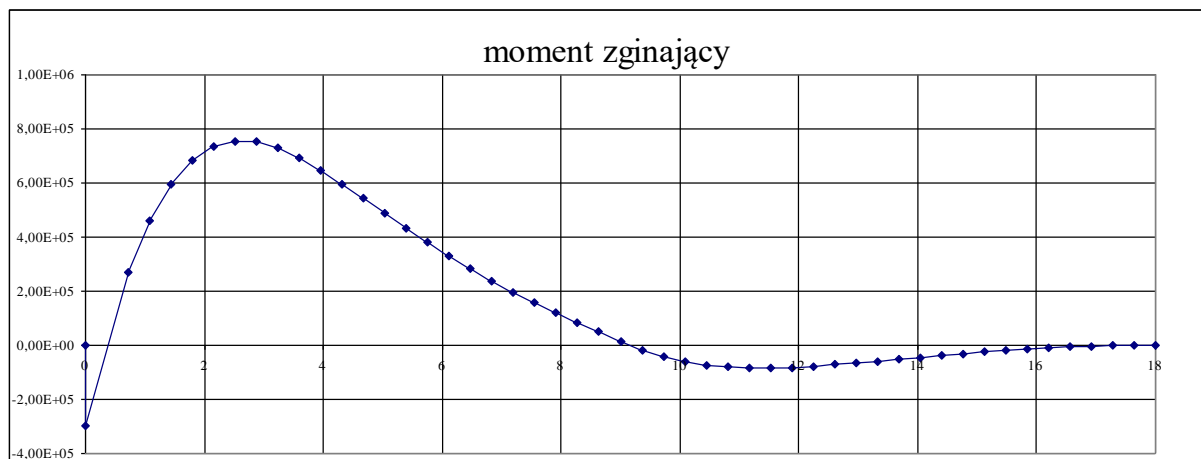
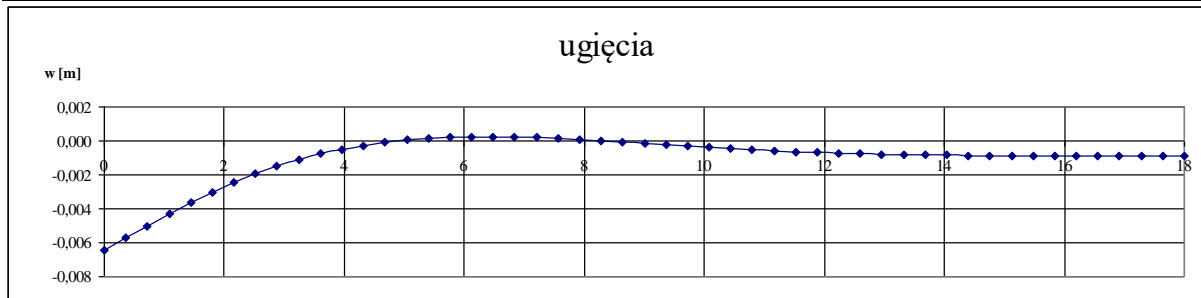
$$Q_A = -P = -1 \text{ MN, dla } \xi = 0^+, \text{ (alternatywnie } Q_A = 0 \text{ dla } \xi = 0^-)$$

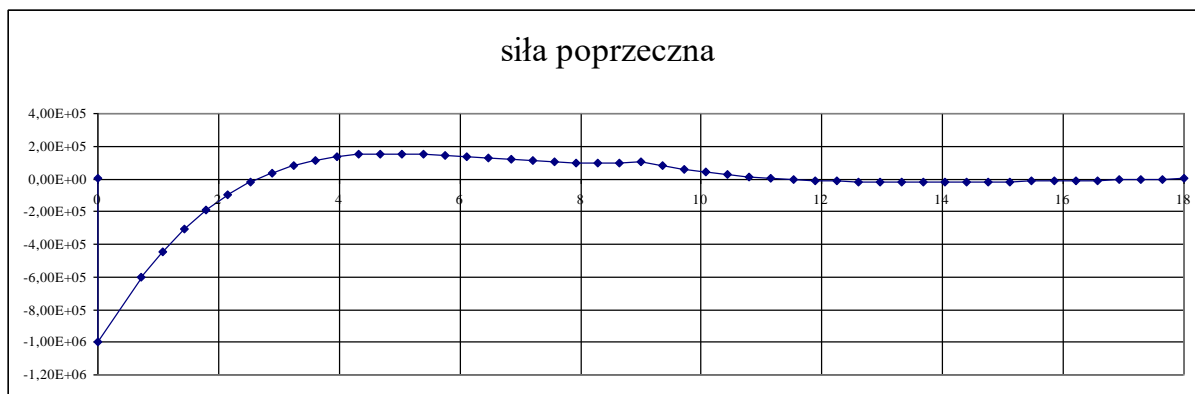
$$M_B = 0 \text{ dla } \xi = 7.882,$$

$$Q_B = 0 \text{ dla } \xi = 7.882.$$

Z rozwiązania układu równań otrzymujemy: $R_1 = 3.806 \text{ MN}$, $R_2 = 2.762 \text{ MN}$, $R_3 = 0.384 \text{ MN}$, $R_4 = 0.005 \text{ MN}$. Wykresy ugięć, momentów zginających oraz sił poprzecznych przedstawia poniższa tabela i wykresy.

x, m	0.0	3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	18.0
w, mm	6.45	1.35	-0.24	0.133	0.70	0.88	0.90
M, MNm	0.3	-0.75	-0.35	-0.014	0.08	0.026	0.0
Q, MN	-1.0	0.05	0.14	0.10	-0.01	-0.02	0.0





Wykres oporu podłoża jest proporcjonalny do wykresu ugięć. Belka musi pozostawać w równowadze, tzn. że obciążenie zewnętrzne musi być równoważone odporem podłoża.