

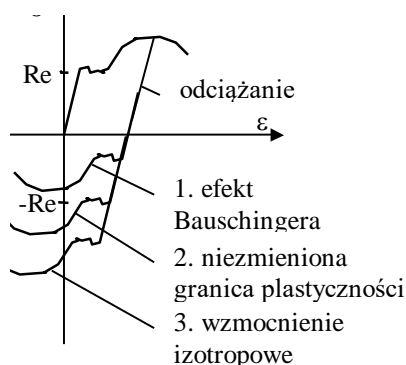
Elementy teorii plastyczności

procesy czynne i bierne, zginanie pręta o jednej osi symetrii, front plastyczny, nośność przekroju i belki

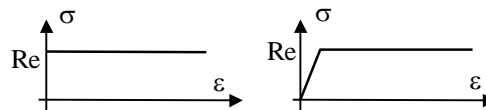
Procesy czynne i bierne

W trakcie statycznej próby rozciągania stali miękkiej po przekroczeniu pewnego poziomu naprężenia pojawiają się odkształcenia plastyczne (trwałe). Jeżeli w takim momencie dokonamy odciążenia, proces będzie praktycznie przebiegał sprężysto i może być opisany zmodyfikowanymi związkami Hooke'a, zapisanymi przyrostowo, z zastosowaniem stycznego modułu Younga. Widać, że w zależności od stanu mechanicznego materiału mamy do czynienia z dwoma różnymi procesami których opis matematyczny istotnie się różni.

Wyróżnia się dwa zasadnicze rodzaje procesów: *procesy czynne* i *procesy bierne* w zależności od tego czy w trakcie ich trwania następuje dyssypacja energii (w postaci odkształceń plastycznych). Warunek dyssypacji energii zwany jest *warunkiem plastyczności*. Pozwala on na rozróżnienie procesów czynnych i biernych. Z reguły jest to funkcja niezmienników stanu naprężenia bądź odkształcenia.



Odciążanie w trakcie statycznej próby rozciągania wykazuje pewne osobliwości - krzywe 1,2,3 na rys. obok. Rzeczywiste materiały wykazują właściwości opisywane krzywą pomiędzy krzywymi 1 i 3.



Najprostsze schematyzacje wykresu rozciągania to: ciało idealnie plastyczne *Levy'ego* (zwane też często modelem *de Saint-Venanta*) i ciało idealnie sprężysto-plastyczne *Prandtla*. Stosowane są także bardziej skomplikowane schematyzacje, uwzględniające w szerszym zakresie właściwości materiału (wzmacnienie, efekt Bauschingera, itp.). W dalszym ciągu wykładu zakładamy schematyzację Prandtla.

W dalszym ciągu wykładu zakładamy schematyzację Prandtla.

Sprężysto-plastyczne zginanie z rozciąganiem pręta o jednej osi symetrii

założenia technicznej teorii zginania; warunki równoważności; etapy pracy przekroju; parametry opisujące rozkład odkształceń normalnych

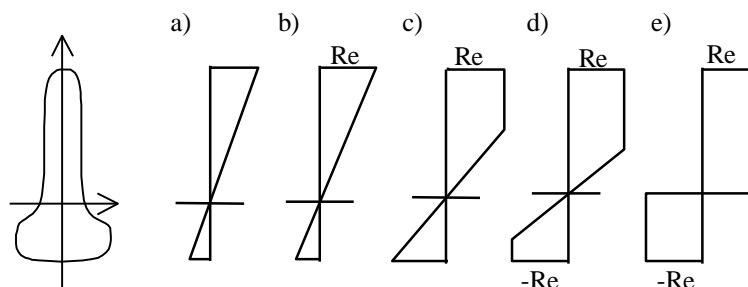
Założenia technicznej teorii zginania, którą będziemy się posługiwać są następujące:

$$\text{jednoosiowy stan naprężenia: } \sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{dla } \sigma < R_e \\ \pm R_e \end{cases}$$

hipoteza płaskich przekrojów Bernoulliego,

$$\text{Korzystać będziemy również z warunków równoważności: } \iint \sigma dF = N, \iint \sigma z dF = M$$

Wyróżniamy następujące etapy pracy przekroju, w którym działa moment i siła osiowa (por. rysunek):



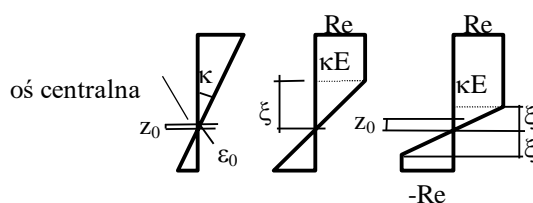
- *zakres sprężysty*, jedynie w tym zakresie obowiązuje superpozycja naprężeń od momentu zginającego i siły osiowej
- uplastycznienie pierwszych skrajnych włókien, czyli osiągnięcie *nośności granicznej sprężystej*,
- jednostronne uplastycznienie w zakresie sprężysto-plastycznym,
- obustronne uplastycznienie, zakres sprężysto-plastyczny,
- pełne uplastycznienie przekroju i powstanie przegubu plastycznego, czyli osiągnięcie *granicznej nośności plastycznej* przekroju.

W zakresie sprężysto-plastycznym, w związku z brakiem superpozycji naprężeń od obciążeń, obliczenia poważnie się komplikują. Problem sprowadza się do wyznaczenia takich dwu parametrów, opisujących rozkład odkształceń w przekroju, aby wynikające z nich naprężenia spełniały warunki równoważności. Istnieją dwa obszary pracy przekroju: sprężysty i uplastyczniony, rozdzielone linią *frontu plastycznego*. Nieznane a priori położenie frontu plastycznego pojawia się w granicach całkowania.

Z hipotezy płaskich przekrojów wynika:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa z.$$

Rozkład odkształceń opisują więc 2 niezależne parametry: odkształcenie i krzywizna osi



pręta. Często jednak wygodniej jest posługiwać się innymi parametrami, które można wyrazić poprzez dwa pierwsze.

Są to:

- położenie osi obojętnej

$$\varepsilon(z_0) = 0 \Rightarrow z_0 = -\frac{\varepsilon_0}{\kappa},$$

- położenie frontu plastycznego

$$\varepsilon_0 + \kappa z_p = \pm R_e / E \Rightarrow z_p = \pm \frac{R_e}{E\kappa} - \frac{\varepsilon_0}{\kappa},$$

- zakres strefy sprężystej pracy przekroju

$$\xi \kappa E = \pm R_e \Rightarrow \xi = \frac{R_e}{E \kappa}$$

Podsumowując, parametrami opisu odkształceń mogą być: krzywizna osi pręta, κ , odkształcenie osi centralnej, ε_0 , położenie osi obojętnej, z_0 , położenie frontu plastycznego, z_p , zakres strefy sprężystej pracy przekroju, ξ . Jedyne dwa z nich są niezależne.

Nośność sprężysta i plastyczna przekroju

Nośność sprężysta przekroju zginanego jest to układ sił przekrojowych powodujący uplastycznienie skrajnych włókien.

Dla prostego zginania wartość momentu powodującą wyczerpanie nośności sprężystej przekroju łatwo jest określić z warunku naprężeń w skrajnych włóknach równych granicy plastyczności w zakresie sprężystym.

Nośność plastyczna przekroju jest to układ sił przekrojowych powodujący pełne uplastycznienie przekroju i powstanie przegubu plastycznego.

Dla prostego zginania wartość momentu powodującego wyczerpanie całkowitej nośności przekroju można wyznaczyć z warunków równoważności dla prostokątnego rozkładu naprężenia normalnego. Z pierwszego warunku braku siły podłużnej:

$$\iint \sigma dF = 0, \Rightarrow \iint_{A_1} R_e dF + \iint_{A_2} (-R_e) dF = 0, \Rightarrow A_1 = A_2$$

wynika, że oś obojętna przy pełnym uplastycznieniu przekroju połowi przekrój.

Z drugiego warunku otrzymujemy, że nośność plastyczna przekroju jest równa sumie bezwzględnych wartości momentów statycznych części przekroju na jakie dzieli go oś obojętna:

$$\overline{M} = \iint \sigma z dF \Rightarrow \iint_{A_1} R_e z dF - \iint_{A_2} R_e z dF = R_e (S_{A1} - S_{A2}) = R_e (|S_{A1}| + |S_{A2}|).$$

Powyższy warunek zachodzi dla momentów liczonych względem dowolnej osi. Jeśli będzie nią oś centralna, to momenty statyczne różnią się jedynie znakiem i warunek ten można zapisać:

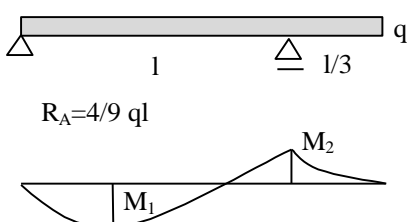
$$\overline{M} = 2R_e |S_{A1,A2}^0|.$$

Używa się również pojęcia *wskaznik plastyczny*, analogicznego do wskaźnika w zakresie sprężystym, a zdefiniowanego:

$$\overline{W} \equiv 2 |S_{A1,A2}^0|.$$

Przykłady obliczania nośności sprężystej i plastycznej belek

obciążenie jednoparametrowe



$$M_1 = \frac{8}{81} ql^2, \quad M_2 = -\frac{1}{18} ql^2 < M_1,$$

$$M_{\max} = M_1 = \frac{8}{81} ql^2$$

$$W_{\text{spr}} = \frac{bh^3}{36} \frac{3}{2h} = \frac{bh^2}{24}$$

oś obojętna: $A_1 = \frac{1}{2}A = \frac{1}{4}bh \Rightarrow h_1 = \frac{h}{\sqrt{2}}, b_1 = \frac{b}{\sqrt{2}}$, a więc:

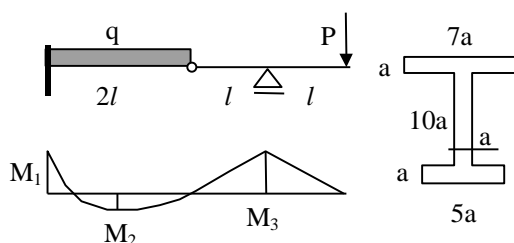
$$\bar{W} = 2S_{A1} = 2 \cdot \frac{1}{2} b_1 h_1 \left(\frac{2}{3}h - \frac{2}{3}h_1 \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{6} bh^2$$

nośność sprężysta: $\bar{M} = M_{\max} \Rightarrow R_e \frac{bh^2}{24} = \frac{8}{81} ql^2 \Rightarrow \bar{q} = \frac{27}{64} \frac{bh^2}{l^2} R_e$

nośność plastyczna: $\bar{M} = M_{\max} \Rightarrow R_e \frac{2 - \sqrt{2}}{6} bh^2 = \frac{8}{81} ql^2 \Rightarrow \bar{q} = \frac{27}{16} (2 - \sqrt{2}) \frac{bh^2}{l^2} R_e$,

przyrost nośności: $\frac{\bar{q}}{q} = 2.34$

obciążenie dwuparametrowe



położenie osi centralnej i osi obojętnej:

$$z_c = 6.5a, \quad z_0 = 7a, \quad \bar{W} = 90a^3 R$$

ekstremalne momenty zginające:

$$M_1 = 2l(P - ql), \quad M_2(x = \frac{P}{q}) = \frac{P^2}{2q}, \quad (\text{dla } 0 \leq \frac{P}{q} \leq 2l), \quad M_3 = -Pl$$

belka zamieni się w mechanizm, jeśli utworzy się jeden przegub plastyczny - zakładamy jego istnienie w kolejnych przekrojach ekstremalnych momentów, otrzymując:

$$|M_1| \leq \bar{M} \Rightarrow |2l(P - ql)| \leq \bar{W} R_e,$$

$$|M_2| \leq \bar{M} \Rightarrow \left| \frac{P^2}{2q} \right| \leq \bar{W} R_e, \text{ jeśli ponadto } 0 \leq \frac{P}{q} \leq 2l,$$

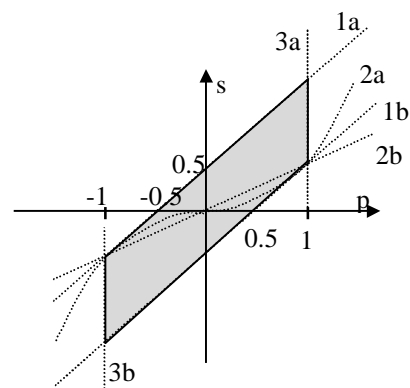
$$|M_3| \leq \bar{M} \Rightarrow |Pl| \leq \bar{W} R_e$$

Po wprowadzeniu bezwymiarowych parametrów obciążeń:

$$p \equiv \frac{Pl}{\bar{W} R_e}, \quad s \equiv \frac{ql^2}{\bar{W} R_e},$$

ograniczenia możemy zapisać:

$$|p - s| \leq 0.5, \text{ skąd:}$$



$$p - s \leq 0.5, \quad p \geq s, \quad (1a)$$

oraz:

$$-p + s \leq 0.5, \quad s > p, \quad (1b),$$

$$\frac{p^2}{|s|} \leq 2, \quad (2a), \quad \text{gdy} \quad 0 \leq \frac{P}{s} \leq 2, \quad (2b)$$

$$|p| \leq 1 \Rightarrow p \leq 1, \quad p \geq -1, \quad (3).$$

Ograniczenia przedstawiono na wykresie. Warunek (2b), istnienia ekstremum momentu w przekroju (2), oraz warunek (2a), przekroczenia nośności w tym przekroju, dają ograniczenia poza zaznaczonym obszarem: (2a) ma zastosowanie jedynie dla spełnionego (2b), tj. wtedy gdy linia (2a) jest "ponad" (2b) - na lewo i na prawo od zaznaczonego obszaru. Tak więc oba warunki (2) łącznie nie wnoszą dodatkowego ograniczenia na rozwiązanie i obszar zakresowany na wykresie wyznacza zakres dopuszczalnych obciążeń.

Równanie frontu plastycznego zginanego przekroju prostokątnego

Obliczenia upraszczają się z uwagi na istnienie dwu osi symetrii. Oś obojętna pokrywa się z osią zginania (główną centralną): $\varepsilon_0 = z_0 = 0$.

Nośność sprężysta przekroju wynosi: $\overline{M} = R_e W_{\text{spr}} = \frac{bh^2}{6} R_e$, a jego nośność plastyczna (ze wzoru): $\overline{\overline{M}} = \frac{bh^2}{4} R_e$, co oznacza wzrost o 50%. Dla momentu zginającego przekraczającego nośność sprężystą: $\overline{M} < M < \overline{\overline{M}}$, obliczamy:

$$M = b \int_{-\xi}^{\xi} E \kappa z^2 dz + 2 \left[b \int_{\xi}^{\frac{h}{2}} R_e z dz \right] = \dots = b R_e \left(\frac{h^2}{4} - \frac{1}{3} \xi^2 \right), \quad \text{skąd:} \quad \xi = \pm \sqrt{3 \left(\frac{h^2}{4} - \frac{M}{b R_e} \right)}$$

Funkcja $\xi = \xi(M)$ jest równaniem frontu plastycznego.