

ZWIĄZKI FIZYCZNE DLA MATERIAŁÓW ORTOTROPOWYCH KONFIGURACJA NIEOSIOWA

Równanie fizyczne dla ortotropowej warstwy kompozytu zbrojonego włóknami jednokierunkowymi w płaskim stanie naprężenia, w układzie nieosiowym (*off-axis*)

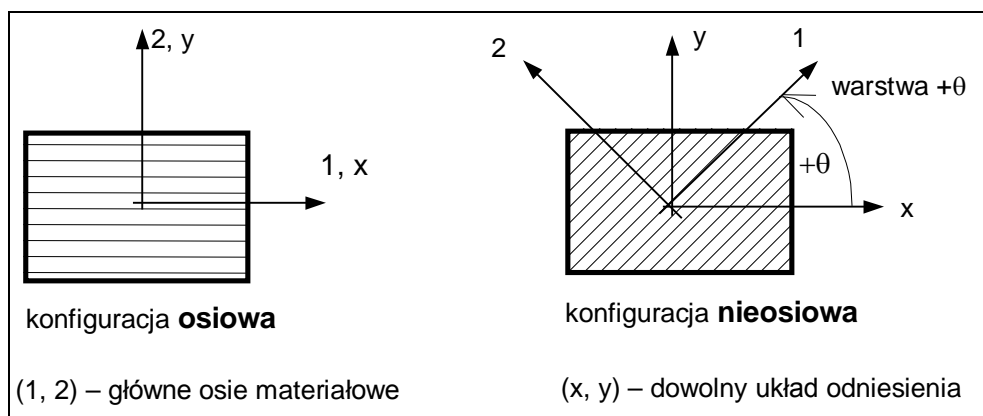
Relacje transformacyjne z konfiguracji osiowej do nieosiowej

Macierze sztywności i podatności w konfiguracji nieosiowej

Składowe macierze sztywności i podatności w funkcji stałych inżynierskich.

3.1. Transformacje tensorów naprężenia i odkształcenia

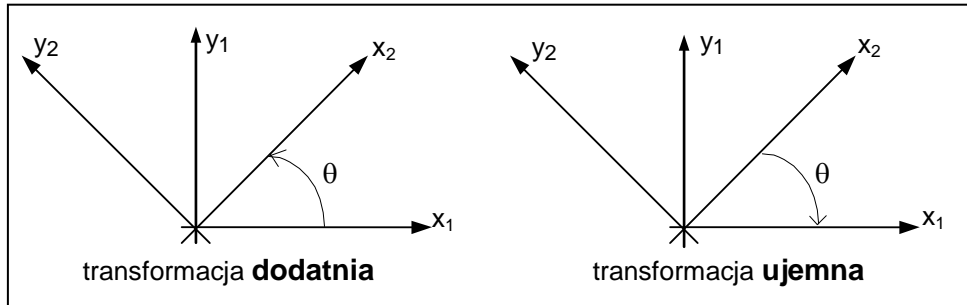
Przypomnijmy, że uprzednio wprowadzone zostały pojęcia **konfiguracji osiowej** i **nieosiowej** warstwy kompozytu. O typie konfiguracji decyduje ustawienie włókien, czyli zarazem położenie głównych osi materiałowych (1, 2) względem dowolnego układu odniesienia (x, y) - rys. 3.1.



Rys. 3.1. Konfiguracja osiowa i nieosiowa warstwy kompozytu.

W kompozytach - będących zbiorem warstw o dowolnej orientacji względem przyjętego układu odniesienia, określonej w kodzie laminatu kątem dodatnim lub ujemnym (np. położenie warstwy w prawej części rys. 3.1 określa w układzie odniesienia (x, y) dodatni kąt θ) - istotnym czynnikiem we wszelkich przekształceniach związanych z transformacjami tensorów naprężenia i odkształcenia jest bardzo staranne podejście do znaków tych kątów. Wprowadzono w związku z tym pojęcia tzw. dodatniej i ujemnej transformacji tensora, związane wyłącznie z transformacjami tensorowymi i w żadnym stopniu nie należy ich traktować jako pojęć wynikających z mechaniki kompozytów.

W celu wyjaśnienia tych pojęć przyjmijmy dwa dowolne układy współrzędnych (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , obrócone względem siebie o dowolny kąt θ - pokazano to na rys. 3.2. O **transformacji dodatniej** mówimy wówczas, gdy obrót wyjściowego układu współrzędnych do układu, do którego transformujemy dowolny tensor, następuje **przeciwnie do ruchu wskazówek zegara**. W przeciwnym przypadku mówimy o **transformacji ujemnej**. Obie transformacje pokazano na rys. 3.2.



Rys. 3.2. Dodatnia i ujemna transformacja układu współrzędnych.

W mechanice kompozytów transformacje te stosuje się dla tensorów odkształcenia i naprężenia, a więc symetrycznych tensorów II rzędu. Przypomnijmy, że składowe dowolnego tensora a_{ij} rzędu II, transformują się przy obrocie układu współrzędnych zgodnie z następującą zależnością

$$a'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} a_{kl} \quad (3.1)$$

gdzie α_{ij} są elementami macierzy przejścia, a iloczyny $\alpha_{ik} \alpha_{jl}$ tworzą **macierz transformacyjną** dla tensora II rzędu, przy obrocie układu współrzędnych.

Macierze przejścia dla obu transformacji mają postaci

- ♦ dla transformacji dodatniej

$$[\alpha_+] = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix} \quad (3.2a)$$

- ♦ dla transformacji ujemnej

$$[\alpha_-] = \begin{bmatrix} m & -n \\ n & m \end{bmatrix} \quad (3.2b)$$

gdzie

$$m = \cos \theta \quad n = \sin \theta$$

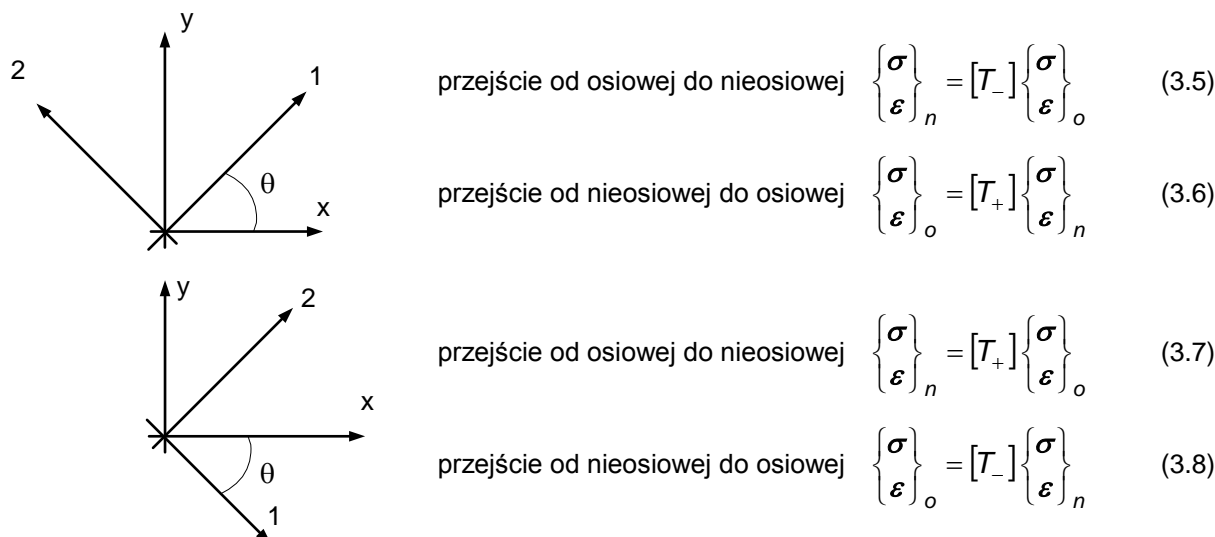
Rozpisując równania (3.1) dla obu wymienionych transformacji i korzystając z podanych macierzy przejścia otrzymamy następujące postaci macierzy transformacyjnych

- ♦ dla transformacji dodatniej (3.3), a dla ujemnej (3.4)

$$[T_+] = [T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$[T_-] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

W laminatach warstwowych, główne osie materiałowe (1, 2) poszczególnych warstw mogą przyjmować względem dowolnego układu odniesienia (x, y) jedno z dwóch położeń, pokazanych na rys. 3.3. Dla jasności dalszych wywodów celowe jest wyraźne określenie tych dwóch sytuacji, wraz z podaniem wzorów transformacyjnych dla tensorów naprężenia i odkształcenia. Dolny indeks "n" towarzyszący nawiasom klamrowym oznacza, że tensory naprężenia i odkształcenia umieszczone w tych nawiasach określone są w konfiguracji **nieosiowej** tzn. w ukł. (x, y). Indeks "o" oznacza, że tensory określone są w konfiguracji **osiowej**, tzn. w ukł. (1, 2).



Rys. 3.3. Równania transformacyjne dla tensorów naprężenia i odkształcenia.

Tensory występujące w równaniach (3.5) - (3.8) mają następujące składowe (w zapisie Voigta)

$$\{\sigma\}_n = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} ; \quad \{\sigma\}_o = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\{\epsilon\}_n = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} ; \quad \{\epsilon\}_o = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6/2 \end{Bmatrix} \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{12} = \frac{1}{2}\epsilon_6 ; \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad (3.10)$$

Zauważmy, że tensor odkształcenia w konfiguracji osiowej, występujący w równaniu (3.10) różni się od tego, który występuje w związkach fizycznych (2.35) i (2.36) oraz dalszych równaniach z nich wynikających, bowiem w związkach fizycznych występują odkształcenia kątowe (tzw. "inżynierskie" odkształcenia kątowe), podczas gdy w (3.10) "tensorowe" odkształcenia kątowe. W celu ujednoczenia notacji wygodnie jest skorzystać z następujących relacji

$$\{\epsilon\}_n^R = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \{\epsilon\}_n ; \quad \{\epsilon\}_o^R = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = [R] \{\epsilon\}_o \quad (3.11)$$

gdzie

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{macierz Reutera} \quad (3.12)$$

3.2. Macierz sztywności warstwy w konfiguracji nieosiowej

Zredukowana macierz sztywności warstwy w płaskim stanie naprężenia, określona w jej głównych osiach materiałowych - równanie (2.35) - nie jest tensorem, mimo że jest macierzą symetryczną II rzędu. Taka jej postać jest jednak wynikiem jedynie czysto formalnego zapisu Voigta, umożliwiającego "upakowanie" elementów tensora IV rzędu (takim obiektem jest macierz sztywności) w macierz rzędu II. Dzięki temu upraszcza się zapis macierzy, ale z drugiej strony traci ona charakter tensorowy, co z kolei powoduje, że przy obrocie układu współrzędnych nie można skorzystać z prawa transformacji tensora. Chcąc zatem określić macierz sztywności w dowolnym układzie (x, y) obróconym względem układu osi materiałowych $(1, 2)$ (zarazem określić postać równań fizycznych $\sigma = \sigma(\varepsilon)$) należy wykorzystać inną drogę.

Powyższe stwierdzenia wymagają szerszego komentarza krytycznego. Nasuwa się bowiem pytanie czy nie należałoby zrezygnować z notacji zwężonej na rzecz pełnego zapisu tensorowego równań fizycznych w postaci (2.2a) i wykorzystać możliwości wynikające z tensorowego charakteru macierzy sztywności i podatności. Wyznaczenie wartości ich składowych w dowolnym układzie współrzędnych na podstawie znajomości tych składowych w głównych osiach materiałowych sprowadza się wówczas do zastosowania prawa transformacji tensora IV rzędu w postaci

$$Q'_{ijkl} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{ko} \alpha_{lp} Q_{mnop} \quad (3.13)$$

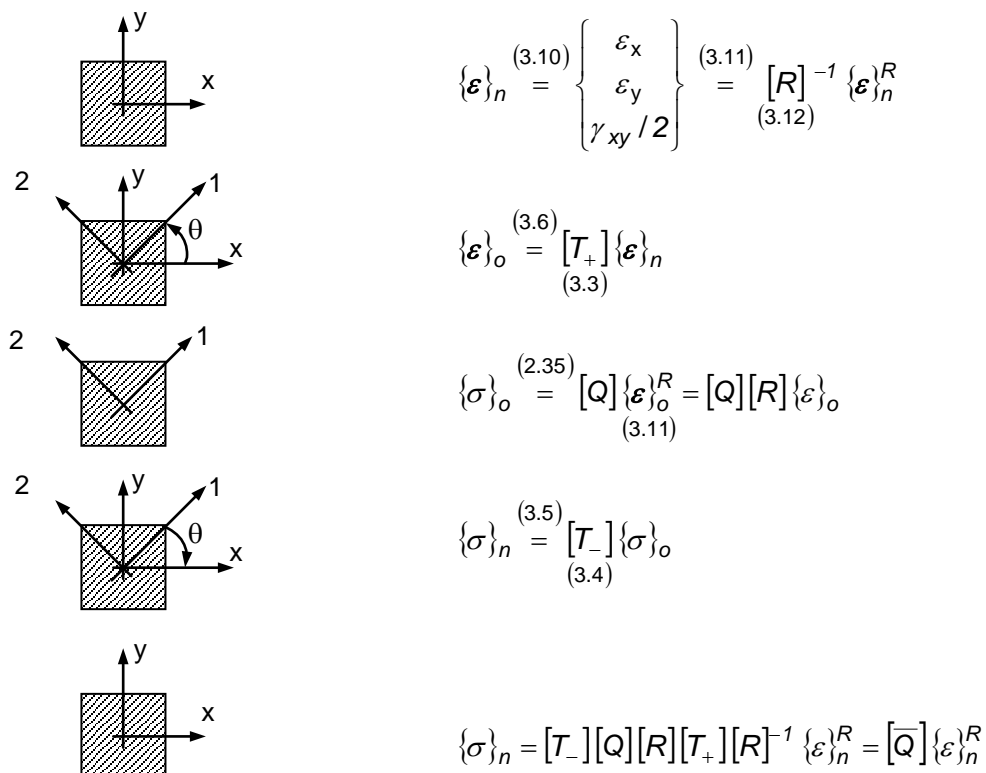
Równanie (3.13) formalnie bardzo proste, w praktyce nadaje się wyłącznie do obliczeń wykonywanych z pomocą komputera. Pociąga to za sobą konieczność wprowadzenia całkowicie odmiennego sposobu formułowania zadań mechaniki kompozytów, wykorzystującego metody numeryczne. Możliwe to jest jednak tylko wówczas, gdy dysponuje się odpowiednią wiedzą teoretyczną, a tę można nabyć jedynie w tradycyjny sposób, nawet gdyby wiązało się to z rezygnacją z ogólności rozważań. Zrozumienie podstawowych zależności rządzących zachowaniem się kompozytów pozwala budować ogólne algorytmy numeryczne, ale rozwiązanie nawet złożonego zagadnienia za pomocą dostępnych programów komercyjnych z pewnością nie pozwala na nabycie ogólnej wiedzy o przedmiocie. To sprawia, że mimo tak zaawansowanej komputeryzacji, klasyczny wykład mechaniki kompozytów nadal opiera się na "niekomputerowej" notacji Voigta, pozwalającej stosunkowo prosto uzyskać relacje analityczne, niezmiernie ułatwiające zrozumienie pracy materiałów kompozytowych, choć ceną, jaką się płaci jest ograniczenie rozważań do zagadnień z reguły dwuwymiarowych.

Korzystając w dalszym ciągu z notacji Voigta, chcąc wyznaczyć macierz sztywności warstwy w dowolnym układzie współrzędnych musimy zrezygnować z równania (3.13) i skorzystać z innego sposobu jej określenia.

Wykorzystamy w tym celu procedurę składającą się z następujących kroków:

1. transformacja odkształceń z konfiguracji nieosiowej do konfiguracji osiowej,
2. zapisanie równań fizycznych $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ w konfiguracji osiowej,
3. transformacja naprężeń z konfiguracji osiowej do nieosiowej,
4. zapisanie równań fizycznych $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ w konfiguracji nieosiowej.

Przedstawiona powyżej procedura, wraz z podaniem równań, z których należy skorzystać, została pokazana na rys. 3.4.



Rys. 3.4. Schemat wyznaczania macierzy sztywności w konfiguracji nieosiowej.

Związek fizyczny w konfiguracji nieosiowej (ostatnie równanie na rys. 3.4) ma postać

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

$$[\bar{Q}] = [T_-][Q][R][T_+][R]^{-1} = [T_-][Q][T_-]^T \quad (3.15)$$

Macierz sztywności (3.15) jest poszukiwaną macierzą określoną w dowolnym układzie odniesienia (x,y). Nosi ona nazwę **transformowanej, zredukowanej macierzy sztywności**, a warstwa kompozytu o takiej macierzy sztywności - **warstwy ogólnie ortotropowej**.

Z rozważań energetycznych przytoczonych w rozdziale 2.1 wynika symetria macierzy $[\bar{Q}]$, tzn.

$$\bar{Q}_{ij} = \bar{Q}_{ji} \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (3.16)$$

Macierz (3.15) wyraża się poprzez składowe zredukowanej macierzy sztywności w ukł. *on-axis* (równanie 2.35) i macierz transformacji ujemnej (równanie 3.4). Pracochłonne operacje rachunkowe prowadzące do jawnej postaci składowych transformowanej macierzy sztywności, zostaną tu pominięte. Efekt końcowy tych operacji przedstawiono w postaci tabelarycznej 3.1.

| | Q_{11} | Q_{22} | Q_{12} | Q_{66} |
|----------------|-----------|-----------|-----------------|---------------------|
| \bar{Q}_{11} | m^4 | n^4 | $2 m^2 n^2$ | $4 m^2 n^2$ |
| \bar{Q}_{22} | n^4 | m^4 | $2 m^2 n^2$ | $4 m^2 n^2$ |
| \bar{Q}_{12} | $m^2 n^2$ | $m^2 n^2$ | $m^4 + n^4$ | $- 4 m^2 n^2$ |
| \bar{Q}_{66} | $m^2 n^2$ | $m^2 n^2$ | $- 2 m^2 n^2$ | $(m^2 - n^2)^2$ |
| \bar{Q}_{16} | $m^3 n$ | $- m n^3$ | $m n^3 - m^3 n$ | $2 (m n^3 - m^3 n)$ |
| \bar{Q}_{26} | $m n^3$ | $- m^3 n$ | $m^3 n - m n^3$ | $2 (m^3 n - m n^3)$ |

TABELA 3.1. Wzory transformacyjne dla macierzy sztywności w konfiguracji nieosiowej (transformowanej, zredukowanej macierzy sztywności).

W celu uzyskania poszczególnych składowych macierzy transformowanej należy wysumować iloczyny kolejnych składowych macierzy zredukowanej i funkcji trygonometrycznych leżących w tym samym wierszu co poszukiwana składowa. Dla przykładu

$$\bar{Q}_{11} = m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2 m^2 n^2 Q_{12} + 4 m^2 n^2 Q_{66} \quad (3.17)$$

Zwróćmy uwagę na istotną różnicę między zredukowaną macierzą sztywności (tzn. w osiach głównych materiałowych) i transformowaną, zredukowaną macierzą sztywności (tzn. w dowolnym układzie odniesienia). W tej drugiej występują dodatkowe wyrazy

- ♦ $\bar{Q}_{16}, \bar{Q}_{26}$ - składowe odpowiadające tzw. **sprężeniu stycznemu**, wiążące naprężenie normalne z odkształceniami stycznymi
- ♦ $\bar{Q}_{61}, \bar{Q}_{62}$ - składowe odpowiadające tzw. **sprężeniu normalnemu**, wiążące naprężenie styczne z odkształceniami normalnymi .

Zauważmy również, że macierz transformowana dla warstwy ortotropowej i macierz sztywności dla materiału o dowolnej anizotropii, (rozdział 2) są formalnie takie same. To co je różni to liczba niezależnych składowych. W przypadku anizotropii wynosi ona - w płaskim stanie naprężenia - sześć. W przypadku ortotropii - macierz transformowana nadal ma cztery niezależne składowe (sześć "różnoimiennych" składowych wyraża się przez cztery niezależne składowe macierzy zredukowanej).

Tak więc, warstwa, która w konfiguracji osiowej była ortotropowa, mimo że w konfiguracji nieosiowej charakteryzuje się macierzą sztywności całkowicie wypełnioną i pozornie staje się warstwą o dowolnej anizotropii, w rzeczywistości nadal jest ortotropowa, gdyż do jej pełnego opisu wystarczają cztery niezależne stałe materiałowe.

3.2.1. Transformacja macierzy sztywności do konfiguracji nieosiowej z wykorzystaniem niezmienniczych charakterystyk warstwy

Bardzo wygodny, a przy tym niezwykle ułatwiający zrozumienie wpływu obrotu warstwy względem głównych osi materiałowych na wartości transformowanej macierzy sztywności podali Tsai i Pagano. Wykorzystując tożsamości trygonometryczne:

$$\begin{aligned}
 m^4 &= 1/8 (3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta) & m &= \cos \theta & n &= \sin \theta \\
 n^4 &= 1/8 (3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta) \\
 m^3 n &= 1/8 (2\sin 2\theta + \sin 4\theta) \\
 mn^3 &= 1/8 (2\sin 2\theta - \sin 4\theta) \\
 m^2 n^2 &= 1/8 (1 - \cos 4\theta)
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

wzory transformacyjne podane w tabeli 3.1 można przekształcić do postaci, którą przedstawiono w formie tabelaryzowanej - tabela 3.2.

Można wykazać, że U_1 , U_4 i U_5 są wielkościami **niezmienniczymi** dla warstwy kompozytu (patrz skrypt pkt. 3.6, przykład 1), **niezależnymi od jej orientacji kątowej**.

| | 1 | U_2 | U_3 |
|----------------|-------|--------------------|-----------------|
| \bar{Q}_{11} | U_1 | $\cos 2\theta$ | $\cos 4\theta$ |
| \bar{Q}_{22} | U_1 | $-\cos 2\theta$ | $\cos 4\theta$ |
| \bar{Q}_{12} | U_4 | 0 | $-\cos 4\theta$ |
| \bar{Q}_{66} | U_5 | 0 | $-\cos 4\theta$ |
| \bar{Q}_{16} | 0 | $1/2 \sin 2\theta$ | $\sin 4\theta$ |
| \bar{Q}_{26} | 0 | $1/2 \sin 2\theta$ | $-\sin 4\theta$ |

TABELA 3.2. Transformacja macierzy sztywności poprzez funkcje kątów wielokrotnych i wielkości niezmiennicze warstwy kompozytu.

Sposób korzystania z tabeli ilustruje poniższy przykład

$$\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \quad (3.19)$$

Wielkości występujące w tabeli 3.2 mają postaci

$$U_1 = 1/8 (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

$$U_2 = 1/2 (Q_{11} - Q_{22})$$

$$U_3 = 1/8 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \quad (3.20)$$

$$U_4 = 1/8 (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$U_5 = 1/8 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

Cennym spostrzeżeniem wynikającym z tabeli 3.2 jest to, że w czterech pierwszych składowych macierzy transformowanej dają się wyróżnić człony niezależne od kąta obrotu warstwy. Biorąc dla przykładu pierwszą składową macierzy transformowanej - równanie (3.19) - widzimy, że wartość \bar{Q}_{11} jest superpozycją niezależnej od kąta wielkości U_1 , na którą nakładają się "zakłócenia" kątowe o okresie π i $\pi/2$. Można powiedzieć, że U_1 jest dobrym wskaźnikiem sztywności w kierunku osi "x", niezależnie od jej orientacji względem osi materiałowych, gdyż nie zależy od tej orientacji.

3.3. Macierz podatności w konfiguracji nieosiowej

Procedura wyznaczanie macierzy podatności w dowolnym układzie odniesienia, obróconym względem układu głównych osi materiałowych jest w pełni analogiczna do procedury wyznaczania transformowanej macierzy sztywności. Składają się na nią następujące etapy:

1. transformacja naprężeń z dowolnego układu (x, y) do układu (1, 2),
2. zapisanie równań fizycznych $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ w układzie (1, 2),
3. transformacja odkształceń z układu (1, 2) do układu (x, y),
4. zapisanie równań fizycznych $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ w układzie (x, y) tzn. w konfiguracji nieosiowej.

Postępując się schematem analogicznym do tego pokazanego na rys. 3.4 otrzymujemy równania fizyczne w układzie (x, y) w postaci

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{61} & \bar{S}_{62} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

$$[\bar{S}] = [T_+]^T [S] [T_+] \quad (3.22)$$

Macierz sztywności (3.22) jest poszukiwaną macierzą w konfiguracji nieosiowej. Wyraża się poprzez składowe macierze podatności w konfiguracji osiowej - równanie (2.36) - i macierz transformacji dodatniej - równanie (3.3).

Z rozważań energetycznych przytoczonych w rozdziale 2.1 wynika symetria macierzy $[\bar{S}]$, tzn.

$$\bar{S}_{ij} = \bar{S}_{ji} \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (3.23)$$

Zależności transformacyjne dla macierzy podatności zestawiono w tabeli 3.3. Sposób korzystania z tabeli pokazano wcześniej na przykładzie transformowanej macierzy sztywności.

| | S_{11} | S_{22} | S_{12} | S_{66} |
|----------------|-------------|-------------|---------------------|-----------------|
| \bar{S}_{11} | m^4 | n^4 | $2 m^2 n^2$ | $m^2 n^2$ |
| \bar{S}_{22} | n^4 | m^4 | $2 m^2 n^2$ | $m^2 n^2$ |
| \bar{S}_{12} | $m^2 n^2$ | $m^2 n^2$ | $m^4 + n^4$ | $- m^2 n^2$ |
| \bar{S}_{66} | $4 m^2 n^2$ | $4 m^2 n^2$ | $- 8 m^2 n^2$ | $(m^2 - n^2)^2$ |
| \bar{S}_{16} | $2 m^3 n$ | $- 2 m n^3$ | $2 (m n^3 - m^3 n)$ | $m n^3 - m^3 n$ |
| \bar{S}_{26} | $2 m n^3$ | $- 2 m^3 n$ | $2 (m^3 n - m n^3)$ | $m^3 n - m n^3$ |

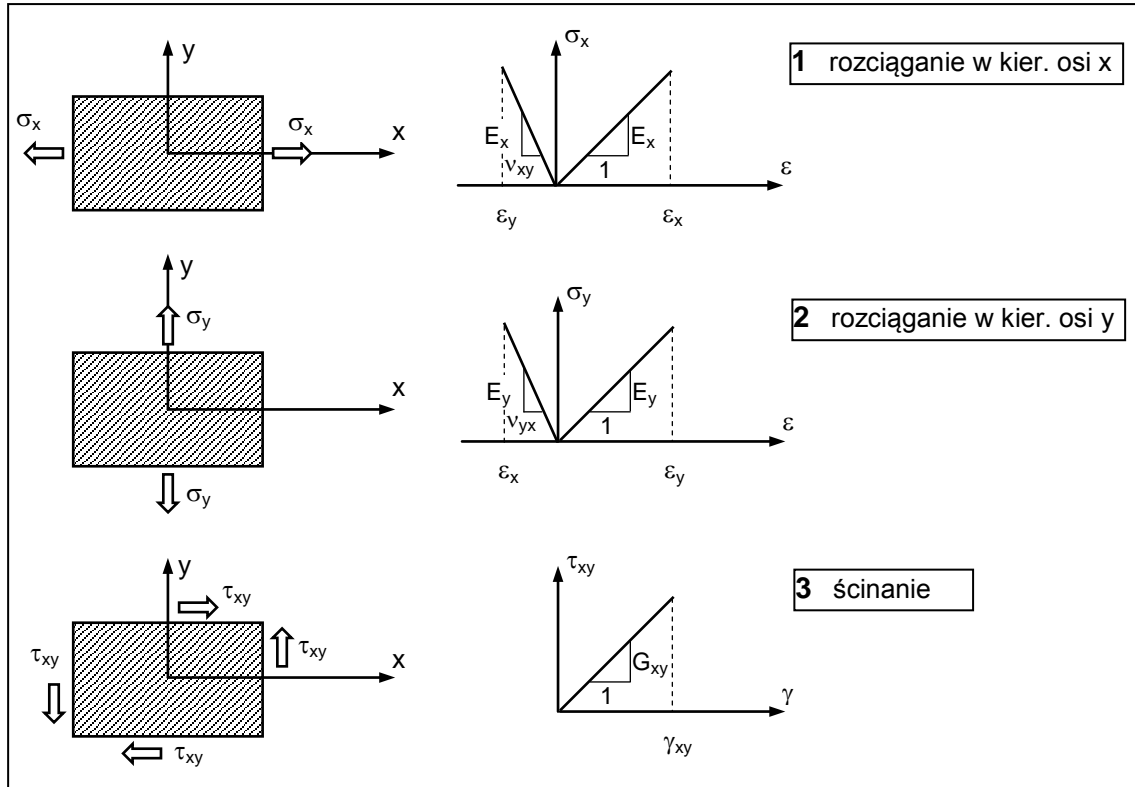
TABELA 3.3. Wzory transformacyjne dla macierzy podatności w konfiguracji nieosiowej

3.4 Stałe inżynierskie w konfiguracji nieosiowej

3.4.1. Macierz podatności w funkcji stałych inżynierskich

W celu wyznaczenia macierzy podatności w funkcji stałych inżynierskich w dowolnym układzie współrzędnych zastosujemy sposób podobny do tego, który wykorzystano przy analizie konfiguracji osiowej (rozdział 2). Wyobraźmy sobie serię trzech podstawowych prób wytrzymałościowych (dwa rozciągania i ścinanie) przeprowadzonych na próbce w konfiguracji nieosiowej (x, y). Próby te przedstawiono na rys. 3.5.

Korzystając z równań fizycznych w postaci (3.21), dla prób przedstawionych na rys. 3.5 można zapisać następujące związki



Rys. 3.5. Schemat wyznaczania stałych inżynierskich w płaszczyźnie (x, y).

◆ **próba 1**

$$\epsilon_x = \bar{S}_{11} \sigma_x = \frac{1}{E_x} \sigma_x \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{11} = \frac{1}{E_x} \quad (3.24)$$

$$\epsilon_y = \bar{S}_{21} \sigma_x \quad (3.25)$$

$$\gamma_{xy} = \bar{S}_{61} \sigma_x \quad (3.26)$$

◆ **próba 2**

$$\epsilon_x = \bar{S}_{12} \sigma_y \quad (3.27)$$

$$\epsilon_y = \bar{S}_{22} \sigma_y = \frac{1}{E_y} \sigma_y \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{22} = \frac{1}{E_y} \quad (3.28)$$

$$\gamma_{xy} = \bar{S}_{62} \sigma_y \quad (3.29)$$

◆ **próba 3**

$$\epsilon_x = \bar{S}_{16} \tau_{xy} \quad (3.30)$$

$$\epsilon_y = \bar{S}_{26} \tau_{xy} \quad (3.31)$$

$$\gamma_{xy} = \bar{S}_{66} \tau_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy} \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{66} = \frac{1}{G_{xy}} \quad (3.32)$$

Wprowadźmy następujące definicje tzw. współczynników sprzężonych ν_{ij} i $\eta_{i,j}$ odnoszących się do kolejnych rozpatrywanych prób

◆ **próba 1**

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\bar{S}_{21}}{\bar{S}_{11}} = -\bar{S}_{21}E_x \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{21} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \quad (3.33)$$

$$\eta_{x,xy} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x} = \frac{\bar{S}_{61}}{\bar{S}_{11}} = \bar{S}_{61}E_x \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{61} = \frac{\eta_{x,xy}}{E_x} \quad (3.34)$$

◆ **próba 2**

$$\nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{22}} = -\bar{S}_{12}E_y \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{12} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \quad (3.35)$$

$$\eta_{y,xy} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_y} = \frac{\bar{S}_{62}}{\bar{S}_{22}} = \bar{S}_{62}E_y \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{62} = \frac{\eta_{y,xy}}{E_y} \quad (3.36)$$

◆ **próba 3**

$$\eta_{xy,x} = \frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}} = \frac{\bar{S}_{16}}{\bar{S}_{66}} = \bar{S}_{16}G_{xy} \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{16} = \frac{\eta_{xy,x}}{G_{xy}} \quad (3.37)$$

$$\eta_{xy,y} = \frac{\varepsilon_y}{\gamma_{xy}} = \frac{\bar{S}_{26}}{\bar{S}_{66}} = \bar{S}_{26}G_{xy} \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_{26} = \frac{\eta_{xy,y}}{G_{xy}} \quad (3.38)$$

Powyższe współczynniki mają następujące definicje

- ◆ $\nu_{ij} = -\varepsilon_j/\varepsilon_i$ - współczynniki Poisson'a, charakteryzujące ściskanie w kierunku osi j wywołane przyłożonym obciążeniem, działającym w kierunku osi i .
- ◆ $\eta_{i,j} = \gamma_{ij}/\varepsilon_i$ - charakteryzują ścinanie w płaszczyźnie (i, j) wywołane obciążeniem, działającym w kierunku osi i . Są to tzw. współczynniki Lechnickiego, wzajemnego wpływu II rodzaju.
- ◆ $\eta_{ij,i} = \varepsilon_i/\gamma_{ij}$ - charakteryzują ściskanie (rozciąganie) w kierunku osi i wywołane ścinaniem w płaszczyźnie (i, j) . Są to tzw. współczynniki Lechnickiego, wzajemnego wpływu I rodzaju.

Zauważmy, że współczynniki wzajemnego wpływu nie mają swoich odpowiedników w materiałach izotropowych, a także i to, że nie występują w konfiguracji osiowej warstwy ortotropowej.

W literaturze można spotkać bardzo różne sposoby ich indeksowania, odmienne od zastosowanego powyżej. Sposób stosowany tutaj, pozwala na podanie bardzo prostej zasady, ułatwiającej zrozumienie i zapamiętanie zarówno tych współczynników, jak i współczynników Poisson'a. W każdym przypadku pierwszy indeks (lub para indeksów) określa przyczynę (rodzaj obciążenia), a drugi - skutek (efekt wywołany działającym obciążeniem).

Zestawiając zależności podane z prawej strony równań (3.24), (3.28), (3.32) i (3.33)-(3.38), otrzymujemy macierz podatności w funkcji stałych inżynierskich, określonych w dowolnym ukł. współrzędnych (x, y)

$$[\bar{S}] = \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{yx} & \eta_{xy,x} \\ E_x & E_y & G_{xy} \\ -\nu_{xy} & 1 & \eta_{xy,y} \\ E_x & E_y & G_{xy} \\ \eta_{x,xy} & \eta_{y,xy} & 1 \\ E_x & E_y & G_{xy} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \frac{\nu_{yx}}{E_y} &= \frac{\nu_{xy}}{E_x} \\ \frac{\eta_{xy,x}}{G_{xy}} &= \frac{\eta_{x,xy}}{E_x} \\ \frac{\eta_{xy,y}}{G_{xy}} &= \frac{\eta_{y,xy}}{E_y} \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.4.2. Transformacja stałych inżynierskich

W celu efektywnego wykorzystania macierzy (3.39) konieczna jest znajomość stałych inżynierskich, w funkcji "klasycznych" 4 niezależnych stałych inżynierskich, określanych w głównych osiach materiałowych warstwy kompozytu. Należy zatem wyznaczyć wzory transformacyjne stałych inżynierskich z konfiguracji osiowej do nieosiowej. W tym celu należy wykorzystać podane uprzednio zależności:

$$E_x = \frac{1}{\bar{S}_{11}} \quad E_y = \frac{1}{\bar{S}_{22}} \quad G_{xy} = \frac{1}{\bar{S}_{66}} \quad (3.40)$$

$$\nu_{xy} = -\bar{S}_{21} E_x \quad \eta_{x,xy} = \bar{S}_{61} E_x \quad \eta_{y,xy} = \bar{S}_{62} E_y \quad (3.41)$$

wraz z tabelą transformacyjną 3.3 i równaniem (2.37).

W efekcie otrzymamy wzory transformacyjne dla stałych inżynierskich, które podano w tabeli 3.4.

| | $1/E_1$ | $1/G_{12}$ | ν_{12}/E_1 | $1/E_2$ | x |
|---------------|-------------|-----------------|---------------------|-------------|-------|
| $1/E_x$ | m^4 | $m^2 n^2$ | $-2 m^2 n^2$ | n^4 | |
| ν_{xy} | $-m^2 n^2$ | $m^2 n^2$ | $m^4 + n^4$ | $-m^2 n^2$ | E_x |
| $1/E_y$ | n^4 | $m^2 n^2$ | $-2 m^2 n^2$ | m^4 | |
| $1/G_{xy}$ | $4 m^2 n^2$ | $(m^2 - n^2)^2$ | $8 m^2 n^2$ | $4 m^2 n^2$ | |
| $\eta_{x,xy}$ | $2 m^3 n$ | $m n^3 - m^3 n$ | $2 (m^3 n - m n^3)$ | $-2 m n^3$ | E_x |
| $\eta_{y,xy}$ | $2 m n^3$ | $m^3 n - m n^3$ | $2 (m n^3 - m^3 n)$ | $-2 m^3 n$ | E_y |

TABELA 3.4. Transformacja stałych inżynierskich z konfiguracji osiowej do nieosiowej.

Stosując tożsamości trygonometryczne (3.18) do wzorów transformacyjnych ujętych w tabeli 3.4, można uzyskać znacznie wygodniejsze zależności, których wyprowadzenie pominiemy ze względu na trywialność, a jednocześnie dużą ilość przekształceń rachunkowych.

Ostatecznie stałe inżynierskie, wyrażają się poprzez funkcje kątów wielokrotnych zgodnie ze związkami podanymi w tabeli 3.5.

| | 1 | $\sin 2\theta$ | $\sin 4\theta$ | $\cos 2\theta$ | $\cos 4\theta$ | x |
|---------------|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------|
| $1/E_x$ | W_2 | 0 | 0 | W_3 | W_1 | |
| $1/E_y$ | W_2 | 0 | 0 | $-W_3$ | W_1 | |
| $1/G_{xy}$ | W_4 | 0 | 0 | 0 | $-4 W_1$ | |
| ν_{xy} | W_5 | 0 | 0 | 0 | W_1 | E_x |
| $\eta_{x,xy}$ | 0 | W_3 | $2 W_1$ | 0 | 0 | E_x |
| $\eta_{y,xy}$ | 0 | W_3 | $-2 W_1$ | 0 | 0 | E_y |

TABELA 3.5. Transformacja stałych inżynierskich wyrażona poprzez funkcje kątów wielokrotnych.

Współczynniki W_i , występujące w tabeli 3.5 wyrażają się zależnościami

$$W_1 = \frac{1}{8} \left(\frac{1 + 2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right)$$

$$W_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{3-2\nu_{12}}{E_1} + \frac{3}{E_2} + \frac{1}{G_{12}} \right)$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \tag{3.42}$$

$$W_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1+2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{G_{12}} \right)$$

$$W_5 = -\frac{1}{8} \left(\frac{1-6\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right)$$

3.5. Zależność między macierzą sztywności i podatności w układzie nieosiowym

Odwracając transformowaną macierz sztywności (3.15) otrzymujemy składowe transformowanej macierzy podatności w postaci

$$\bar{S}_{11} = (\bar{Q}_{22} \bar{Q}_{66} - \bar{Q}_{26}^2) / \Delta \tag{3.43}$$

$$\bar{S}_{22} = (\bar{Q}_{11} \bar{Q}_{66} - \bar{Q}_{16}^2) / \Delta \tag{3.44}$$

$$\bar{S}_{66} = (\bar{Q}_{11} \bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12}^2) / \Delta \tag{3.45}$$

$$\bar{S}_{12} = (\bar{Q}_{16} \bar{Q}_{26} - \bar{Q}_{12} \bar{Q}_{66}) / \Delta \tag{3.46}$$

$$\bar{S}_{16} = (\bar{Q}_{12} \bar{Q}_{26} - \bar{Q}_{22} \bar{Q}_{16}) / \Delta \tag{3.47}$$

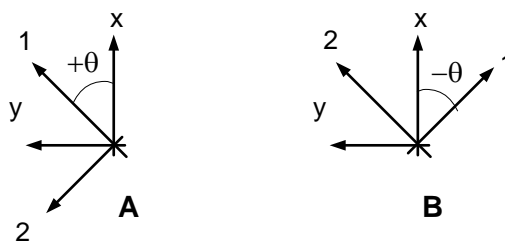
$$\bar{S}_{26} = (\bar{Q}_{12} \bar{Q}_{16} - \bar{Q}_{11} \bar{Q}_{26}) / \Delta \tag{3.48}$$

$$\Delta = \bar{Q}_{11} \bar{Q}_{22} \bar{Q}_{66} + 2\bar{Q}_{12} \bar{Q}_{26} \bar{Q}_{61} - \bar{Q}_{22} \bar{Q}_{16}^2 - \bar{Q}_{66} \bar{Q}_{12}^2 - \bar{Q}_{11} \bar{Q}_{62}^2 \tag{3.49}$$

3.6. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale podano szczegółowo sposoby określania macierzy sztywności, podatności oraz stałych technicznych w dowolnym układzie odniesienia (x, y), czyli w **konfiguracji nieosiowej**.

Wszystkie zależności transformacyjne zawarte w tabelach 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 zostały podane dla warstwy, której główne osie materiałowe (1, 2) zorientowane są względem układu odniesienia (x, y) tak, jak pokazano to na rys. 3.6 A, a zatem warstwy, którą w kodzie laminatu określa kąt $+\theta$ (np. $\theta=15^\circ$). Dla warstwy o osiach materiałowych zorientowanych tak, jak na rys. 3.6 B, którą w kodzie laminatu określa kąt $-\theta$ (np. $\theta=-15^\circ$), należy stosować te same tabele, wstawiając we wzorach ujemną wartość kąta.



Rys. 3.6

Nasuwa się w tym miejscu uwaga, że nawet w podstawowych podręcznikach panuje w tym zakresie pewien zamęt, a co gorsza zdarzają się również i błędy. Polegają one na tym, że te same zależności transformacyjne, zapisane w różnych postaciach, dają dla tego samego kąta wartości różniące się znakiem (dotyczy to elementów macierzy z indeksami "16" i "26").