

NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W LAMINACIE KLASYCZNA TEORIA LAMINATÓW

Laminat, jako zbiór warstw trwale ze sobą połączonych.

Własności laminatu w zależności od cech indywidualnych warstw (sekwencji ułożenia warstw w laminacie).

Klasyczna teoria laminatów (klasyczna teoria płyt laminatowych) - teoria płyt cienkich.

4.1. Klasyczna teoria laminatów

4.1.1. Założenia i podstawy teorii płyt cienkich

Założenia klasycznej teorii laminatów:

1. warstwy laminatu połączone są ze sobą w sposób nierozdzielny, a połączenia są nieskończenie cienkie (mają zerową grubość) i nie zezwalają na ścinanie międzywarstwowe. Oznacza to, że żadna warstwa nie może przemieszczać się względem innej (nie występują poślizgi). Kompozyt jako całość tworzy makroskopowo jedną warstwę, ale o własnościach będących „wypadkową” własności tworzących go warstw,
2. obowiązuje teoria płyt cienkich, tzn. przyjmuje się hipotezę Kirchhoffa-Love'a:
 - linia prosta i prostopadła do powierzchni środkowej pozostaje prosta i prostopadła po przyłożeniu obciążenia działającego w płaszczyźnie środkowej (tzw. **stan tarczowy**), jak i obciążenia wywołującego zginanie (tzw. **stan giętny**), co oznacza, że w ukł. (x, y, z) - rys. 4.1

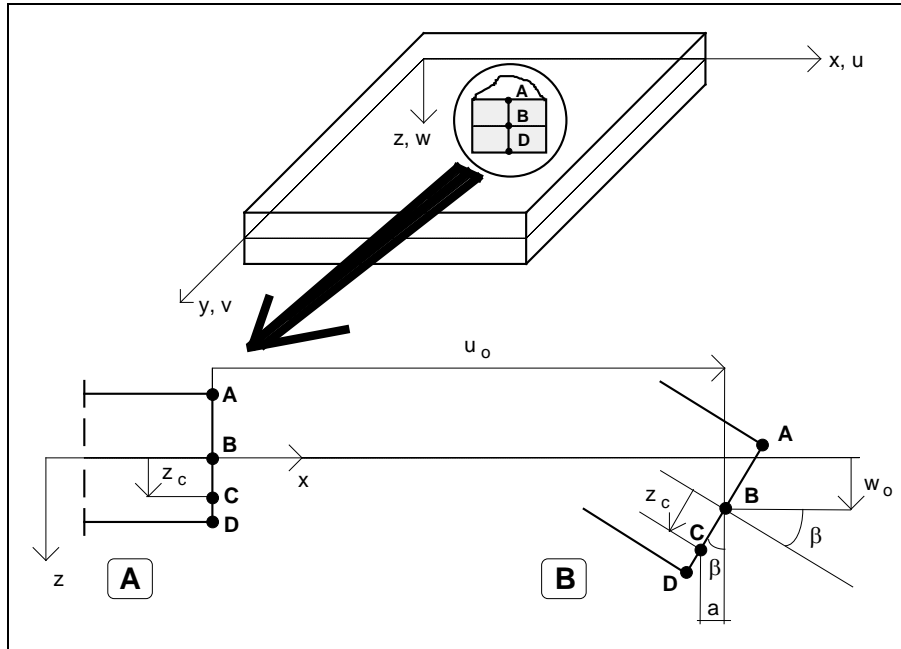
$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.1)$$

- odcinek normalny do powierzchni środkowej nie zmienia swojej długości, tzn.

$$\varepsilon_z = 0 \quad (4.2)$$

3. obowiązuje założenie o małych przemieszczeniach.

Na rys. 4.1 u, v, w oznaczają przemieszczenia w kierunku osi odpowiednio x, y, z . Przemieszczenia punktów powierzchni środkowej w kierunku osi x oznaczono jako u_0 , a w kierunku osi z - w_0 .



Rys. 4.1. Przesunięcie punktów w płaszczyźnie (x, y): A. stan początkowy, B. stan odkształcony

Przesunięcie dowolnego punktu C w kierunku osi x wynosi

$$u_c = u_o - a \quad (4.3)$$

Na mocy założenia o małych przemieszczeniach

$$a = z_c \sin \beta \cong z_c \beta \quad (4.4)$$

Równanie (4.3) ma wówczas postać

$$u_c = u_o - z_c \beta \quad (4.5)$$

gdzie β oznacza kąt nachylenia stycznej do powierzchni środkowej do osi x i wynosi

$$\beta = \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (4.6)$$

Dla dowolnego punktu "z" leżącego wzdłuż grubości laminatu, przemieszczenie w kierunku x wynosi

$$u = u_o - z \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (4.7)$$

Identyczne rozumowanie dla płaszczyzny (y, z) pozwala zapisać przemieszczenie punktu w kierunku osi y w postaci

$$v = v_o - z \frac{\partial w_o}{\partial y} \quad (4.8)$$

Powyższe zależności wynikające z hipotezy Kirchhoffa powodują, że zlinearyzowane równania geometryczne Cauchy'ego przyjmują (w odniesieniu do płyt) następujące postaci

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \quad (4.10)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \quad (4.11)$$

Odształcenia określone równaniami (4.9)-(4.11) można zdekomponować na odkształcenia powierzchni środkowej i krzywizny powierzchni środkowej, a odpowiadające im tensory odkształcenia zapisać w następującej postaci

- ♦ tensor odkształceń powierzchni środkowej

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

- ♦ tensor krzywizn powierzchni środkowej

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Ostatecznie zatem tensor odkształcenia zapiszemy w postaci sumy dwóch powyższych

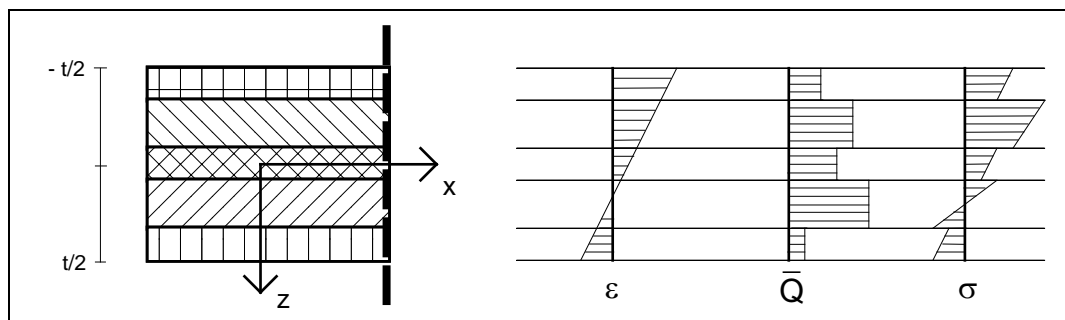
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Istotnym wnioskiem płynącym z równania (4.14) jest ten, że odkształcenia zmieniają się po grubości laminatu liniowo. W dalszej części rozdziału będzie pokazane, że w przypadku stanów tarczowych (brak zginania) i dla określonych klas laminatów są wręcz stałe po grubości.

Korzystając z (4.14), równania fizyczne (3.14) można zapisać dla "k-tej" warstwy laminatu w postaci

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + [\bar{Q}]_k Z \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Jeśli uwzględnić liniową zmianę odkształceń po grubości laminatu, fakt że sztywności warstw go tworzących mogą być (i prawie zawsze są) różne, a także związek (4.15), to dla hipotetycznego laminatu o zmiennych sztywnościach warstw, rozkłady odkształceń i naprężeń po grubości laminatu mogą wyglądać tak, jak pokazano na rys. 4.2.



Rys. 4.2. Przykładowy rozkład naprężeń po grubości laminatu.

4.1.2. Wypadkowe siły i momenty w laminacie

Naprężenia w laminacie określa się jako wielkość uśrednioną naprężeń warstwowych po grubości laminatu, tzn.

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_i^k dz \quad (4.16)$$

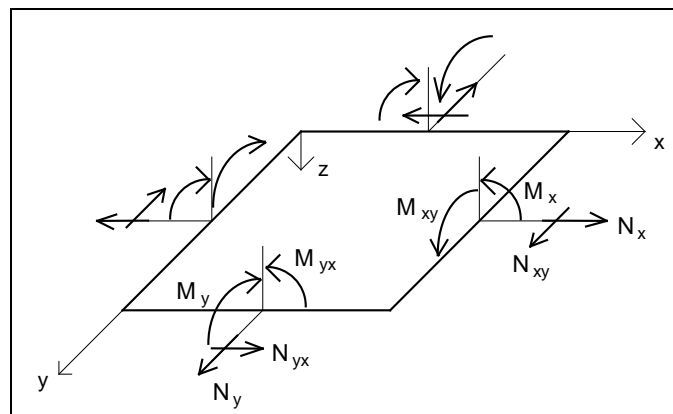
gdzie $\bar{\sigma}_i$ oznacza "i-tą" składową naprężenia średniego w laminacie, σ_i^k - "i-tą" składową naprężenia w "k-tej" warstwie laminatu, zaś t jest grubością laminatu.

Zazwyczaj w miejsce naprężeń średnich wprowadza się pojęcie **sił i momentów wypadkowych** (sił i momentów na jednostkę szerokości przekroju). Siły i momenty wypadkowe w płaszczyźnie laminatu pokazano na rys. 4.3.

Siły i momenty wypadkowe określone są następującymi równaniami

$$N_i = \bar{\sigma}_i t = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_i^k dz \quad \text{siły wypadkowe w laminacie} \quad (4.17)$$

$$M_i = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_i^k z dz \quad \text{momenty wypadkowe w laminacie} \quad (4.18)$$



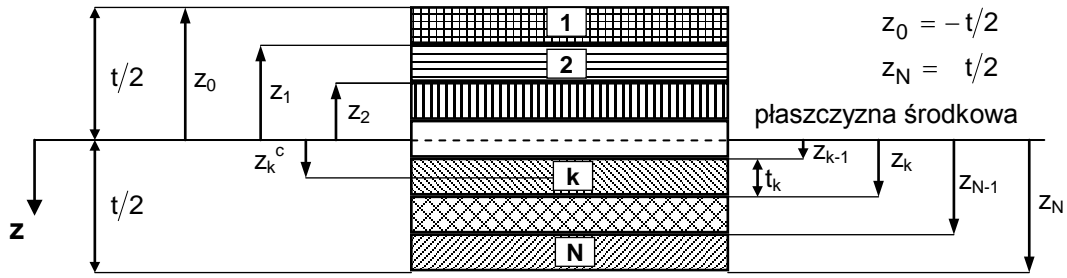
Rys. 4.3. Siły i momenty wypadkowe w płaszczyźnie laminatu.

Korzystając z addytywności całkowania i oznaczeń jak na rys. 4.4 - przedstawiającym układ warstw w przekroju laminatu - równania (4.17) i (4.18) można zapisać następująco

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (4.19)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (4.20)$$

Na rys. 4.4 wprowadzono następujące oznaczenia: z_k^c - środek ciężkości "k-tej" warstwy, t_k - grubość "k-tej" warstwy, t - całkowita grubość laminatu, N - ilość warstw w laminacie.



Rys. 4.4. Przekrój laminatu.

Po uwzględnieniu związków fizycznych dla "k-tej" warstwy (równanie (4.15))- równania wypadkowych sił i momentów - (4.19) i (4.20) - przyjmują poniższe postaci

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz \right) + \sum_{k=1}^N \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz \right) \quad (4.21)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz \right) + \sum_{k=1}^N \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} z^2 dz \right) \quad (4.22)$$

Biorąc pod uwagę, że transformowana macierz sztywności dla dowolnej "k-tej" warstwy nie zmienia się po jej grubości (choć oczywiście może się zmieniać od warstwy do warstwy), można wyłączyć ją przed znaki całek. Dalsze uproszczenia wynikają z faktu, że odkształcenia i krzywizny powierzchni środkowej są takie same dla wszystkich warstw i nie zależą od zmiennej z. Mogą więc być wyłączone zarówno przed znaki sumowania jak i całek. Równania (4.21) i (4.22) przyjmą wówczas postaci

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k - z_{k-1}) \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right) \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

W klasycznej teorii laminacji wprowadza się następujące określenia na wyrażenia ujęte w nawiasy w równaniach (4.23) i (4.24)

◆ **macierz sztywności tarczowej**

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k t_k \quad (4.25)$$

◆ **macierz sztywności sprężen**

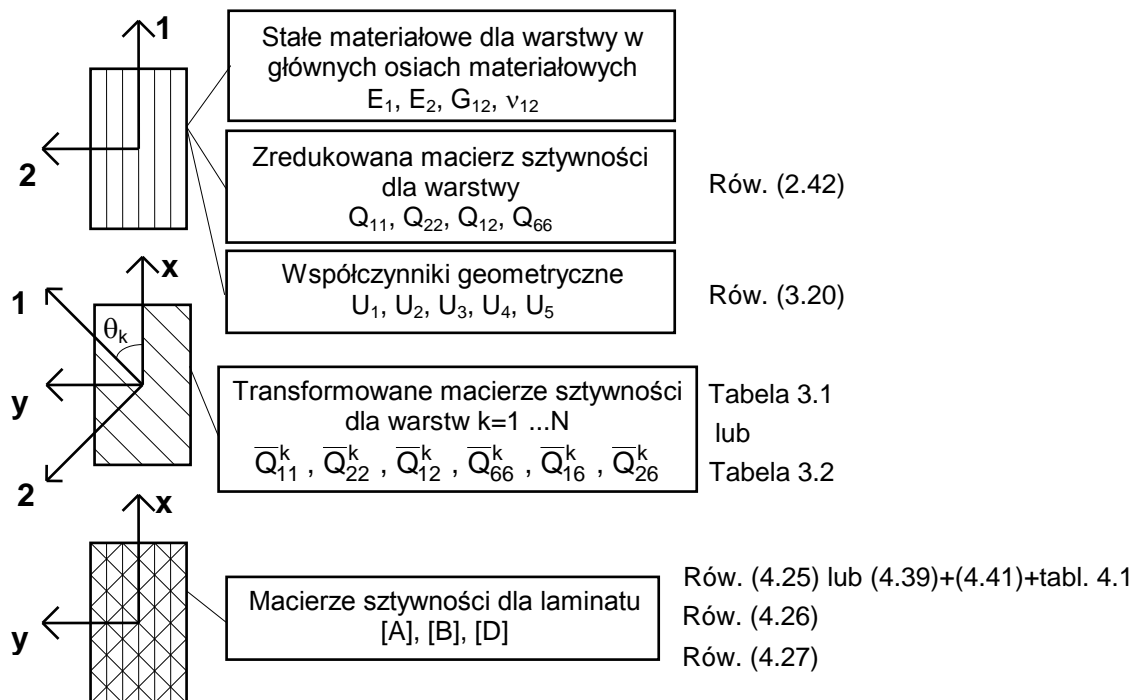
$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k t_k z_k^c \quad (4.26)$$

◆ **macierz sztywności zginania**

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \left(t_k z_k^c{}^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \quad (4.27)$$

Ze względu na symetrię transformowanej macierzy sztywności i postaci równań określających macierze $[A]$, $[B]$, $[D]$, wszystkie te macierze są oczywiście, również symetryczne.

Ogólną procedurę wyznaczania macierzy sztywności dla laminatu, składającego się z warstw tego samego materiału o stałych inżynierskich E_1 , E_2 , G_{12} i ν_{12} pokazano na rysunku 4.5.



Rys. 4.5. Ogólna procedura wyznaczania macierzy sztywności dla laminatu.

Ostatecznie wypadkowe siły i momenty dla laminatu można przedstawić w postaci

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

lub też w skróconej postaci symbolicznej

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa^o \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Macierz B_{ij} wywołuje sprzężenie stanu tarczowego i giętnego w laminacie. Tak więc w ogólnym przypadku laminatu o całkowicie dowolnej budowie - stanom tarczowym (dla przykładu siła skupiona działająca w płaszczyźnie laminatu) towarzyszą stany giętne (zginanie, zwichrzenie) i odwrotnie.

W większości przypadków, typowych i najczęściej stosowanych klas laminatów (przez klasę rozumie się tu grupę laminatów o specyficznym układzie kątowym warstw i sekwencji ich ułożenia), przedstawionych w dalszej części rozdziału, sprzężenie stanów tarczowych i giętnych nie występuje, w wyniku czego stany tarczowe można opisać macierzą sztywności tarczowej $[A]$, a stany giętne macierzą $[D]$.

4.1.3. Podatność w laminatach

Poprzednio określono macierze sztywności dla laminatu. Pojawia się naturalne pytanie o postać macierzy podatności.

W przypadku pojedynczej warstwy, czy to w konfiguracji osiowej, czy też zupełnie dowolnej, odpowiedź była oczywista i prosta - macierz podatności jest macierzą odwrotną do macierzy sztywności, odpowiednio - zredukowanej i transformowanej. Podano odpowiednie "przepisy" określające macierze podatności.

W przypadku laminatu sytuacja jest bardziej skomplikowana. Aby to wykazać, wystarczy odwrócić związki fizyczne w postaci (4.30). Odwrócenie pierwszego z równań daje

$$\{\varepsilon^o\} = [A]^{-1}\{N\} - [A]^{-1}[B]\{\kappa^o\} \quad (4.31)$$

Podstawiając ten związek do drugiego z równań (4.30) i dokonując elementarnych przekształceń otrzymujemy związek między krzywiznami powierzchni środkowej i wypadkowymi siłami i momentami

$$\{\kappa^o\} = [H]^{-1}\{M\} - [H]^{-1}[B][A]^{-1}\{N\} \quad ; \quad [H] = [D] - [B][A]^{-1}[B] \quad (4.32)$$

Równanie (4.31) po wykorzystaniu (4.32) przyjmuje postać

$$\{\varepsilon^o\} = ([A]^{-1} + [A]^{-1}[B][H]^{-1}[B][A]^{-1})\{N\} + (-[A]^{-1}[B][H]^{-1})\{M\} \quad (4.33)$$

Wprowadzając następujące oznaczenia macierzy występujących w równaniach (4.32) i (4.33)

$$[A'] = [A]^{-1} + [A]^{-1}[B][H]^{-1}[B][A]^{-1} \quad [B'] = -[A]^{-1}[B][H]^{-1} \quad (4.34)$$

$$[B''] = -[H]^{-1}[B][A]^{-1} = [B'] \quad [D'] = [H]^{-1}$$

otrzymujemy poszukiwane równania odwrotne do (4.30) w postaci

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

Otrzymane rezultaty pokazują, że żadna z macierzy $[A']$, $[B']$, $[D']$ nie jest macierzą odwrotną do "odpowiadającej" jej macierzy sztywności. Z tego względu w odniesieniu do laminatu nie operuje się w ogólnym przypadku pojęciem macierzy podatności.

Powyższe komplikacje znikają w przypadku laminatów, w których nie występuje sprzężenie stanu tarczowego i giętnego, tzn. gdy macierz sztywności $[B] = [0]$. Z równań (4.34) wynika, że wówczas

$$[A'] = [A]^{-1} \quad [B'] = [0] \quad [D'] = [D]^{-1} \quad (4.36)$$

4.1.4. Macierze sztywności jako funkcje niezmienników

Bardzo "zgrabny", a przy tym ułatwiający zrozumienie charakterystyk sprężystych laminatu, sposób wyznaczania składowych macierzy $[A]$, $[B]$ i $[D]$ wynika z zastosowania funkcji kątów wielokrotnych i wielkości niezmienniczych dla warstwy kompozytowej (rozdział 3.2.1.).

Zilustrowany on będzie na przykładzie macierzy sztywności tarczowej $[A]$. Odgrywa ona w mechanice kompozytów specjalną rolę, gdyż w przypadku laminatów o budowie, która eliminuje sprzężenie stanu tarczowego i giętnego (tzn. $[B] = [0]$), obciążonych wyłącznie siłami działającymi w płaszczyźnie laminatu, daje pełny opis jego cech sprężystych - z równań (4.28), (4.29) pozostaje bowiem wówczas jedynie równanie

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Z sytuacją opisaną powyżej mamy często do czynienia w badaniach doświadczalnych kompozytów, w których z reguły znane są siły, a mierzone odkształcenia.

Ogólne określenie elementów macierzy $[A]$ podaje równanie (4.25). Widać, że w celu wyznaczenia sztywności tarczowej należy skorzystać z transformowanych macierzy sztywności dla wszystkich warstw tworzących laminat. W charakterze przykładu, obliczymy składową A_{11} . Korzystając ze wzorów transformacyjnych podanych w tab. 3.2 i równania (4.25) otrzymujemy

$$A_{11} = \bar{Q}_{11}^1 t_1 + \dots + \bar{Q}_{11}^N t_N = U_1 t_1 + \dots + U_1 t_N + (U_2 \cos 2\theta_1 t_1 + \dots + U_2 \cos 2\theta_N t_N) + (U_3 \cos 4\theta_1 t_1 + \dots + U_3 \cos 4\theta_N t_N) = U_1 t + U_2 (\cos 2\theta_1 t_1 + \dots + \cos 2\theta_N t_N) + U_3 (\cos 4\theta_1 t_1 + \dots + \cos 4\theta_N t_N) \quad (4.38)$$

Wprowadźmy pojęcie **objętościowego udziału warstwy** w całym laminacie, zdefiniowanego jako

$$v_w = \frac{V_w}{V_L} = \frac{At_w}{At} = \frac{t_w}{t} \quad \sum_{k=1}^N v_k = 1 \quad (4.39)$$

Równanie (4.38) można wówczas zapisać w postaci

$$A_{11} = t [U_1 + U_2 (v_1 \cos 2\theta_1 + \dots + v_N \cos 2\theta_N) + U_3 (v_1 \cos 4\theta_1 + \dots + v_N \cos 4\theta_N)] \quad (4.40)$$

Wprowadźmy następujące współczynniki, zależne tylko od konfiguracji i udziału objętościowego warstw

$$V_1^* = \sum_{k=1}^N v_k \cos 2\theta_k \quad V_2^* = \sum_{k=1}^N v_k \cos 4\theta_k \quad (4.41)$$

$$V_3^* = \sum_{k=1}^N v_k \sin 2\theta_k \quad V_4^* = \sum_{k=1}^N v_k \sin 4\theta_k$$

Każdy z powyższych współczynników, ze względu na warunek (4.39), musi spełniać nierówności

$$-1 \leq V_i^* \leq 1 \quad (4.42)$$

Pierwsza składowa macierzy sztywności tarczowej (4.40) ma wówczas postać

$$A_{11}/t = U_1 + U_2 V_1^* + U_3 V_2^* \quad (4.43)$$

W analogiczny sposób można wyznaczyć pozostałe składowe macierzy $[A]$. Przedstawiono je w tabeli 4.1, która ma identyczną strukturę, jak tabela 3.2 dla transformowanej macierzy sztywności warstwy. Tak więc sztywności tarczowe laminatu można bezpośrednio porównywać z odpowiednimi sztywnościami tworzących go warstw, co daje dobry obraz wpływu poszczególnych warstw na sztywność globalną laminatu.

Warto tu poczynić krótką uwagę dotyczącą terminologii. Macierz $[A]$ określa się mianem **macierzy sztywności tarczowej**, natomiast macierz powstałą przez podzielenie wszystkich jej wartości przez grubość laminatu t - **unormowaną macierzą sztywności tarczowej**, tzn. taką, że jej elementy mają taki sam wymiar, jak elementy macierzy zredukowanej i transformowanej (tzn. wymiar naprężenia).

	1	U_2	U_3
A_{11}/t	U_1	V_1^*	V_2^*
A_{22}/t	U_1	$-V_1^*$	V_2^*
A_{12}/t	U_4	0	$-V_2^*$
A_{66}/t	U_5	0	$-V_2^*$
A_{16}/t	0	$1/2 V_3^*$	V_4^*
A_{26}/t	0	$1/2 V_3^*$	$-V_4^*$

TABELA 4.1. Unormowana macierz sztywności tarczowej laminatu.

4.1.5. Stałe inżynierskie

Ze względu na możliwości doświadczalnej weryfikacji stałych inżynierskich, zostanie tu podany sposób określania tych stałych tylko dla laminatów, w których nie występuje sprzężenie stanu tarczowego i giętnego. Zakłada się jednocześnie, że obciążenie laminatu działa w jego płaszczyźnie. Mówiąc bardzo precyzyjnie, należałoby zatem mówić o tarczowych stałych inżynierskich.

Korzystając z odwróconego równania (4.27), związku między siłą wypadkową i naprężeniem średnim w laminacie (4.17), a także wykonując dla laminatu serię testów, analogicznych do tych, pokazanych na rys. 3.5 dla pojedynczej warstwy, otrzymamy następujące związki określające stałe inżynierskie:

$$E_x^L = \frac{1}{A'_{11} t} \quad E_y^L = \frac{1}{A'_{22} t} \quad G_{xy}^L = \frac{1}{A'_{66} t} \quad (4.44)$$

$$\nu_{xy}^L = -A'_{21} t E_x^L \quad \eta_{x,xy}^L = A'_{61} t E_x^L \quad \eta_{y,xy}^L = A'_{62} t E_y^L$$

Pozostałe inżynierskie wynikają z symetrii macierzy $[A']$ i wynoszą

$$\nu_{yx}^L = \nu_{xy}^L \frac{E_y^L}{E_x^L} \quad \eta_{xy,x}^L = \eta_{x,xy}^L \frac{G_{xy}^L}{E_x^L} \quad \eta_{xy,y}^L = \eta_{y,xy}^L \frac{G_{xy}^L}{E_y^L} \quad (4.45)$$

Procedura wyznaczenia stałych inżynierskich w płaszczyźnie laminatu jest następująca

- ◆ wyznaczyć macierz sztywności tarczowej $[A]$ wg procedury pokazanej na rys. 4.5,
- ◆ wyznaczyć macierz $[A']$ jako odwrotną do macierzy $[A]$,
- ◆ wyznaczyć stałe inżynierskie wg (4.44) i (4.45).

4.2. Teoria laminacji z uwzględnieniem wpływu temperatury

Technologia wytwarzania laminatów powoduje, że w analizie odkształceń i naprężeń powinny być uwzględnione efekty wywołane różnicą między temperaturą laminacji i eksploatacji. W liniowej teorii sprężystości odkształcenia całkowite są sumą odkształceń mechanicznych i odkształceń cieplnych tzn.:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j + \alpha_i \Delta T \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (4.46)$$

gdzie ΔT oznacza różnicę między temperaturą eksploatacji, a temperaturą utwardzania, zaś α_i są współczynnikami rozszerzalności cieplnej. W głównych osiach materiałowych istnieją tylko współczynniki rozszerzalności liniowej tzn. α_1 i α_2 .

Związek odwrotny do (4.46) ma postać

$$\sigma_i = Q_{ij} (\varepsilon_j - \alpha_j \Delta T) \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (4.47)$$

Człon $Q_{ij} \alpha_j \Delta T$ oznacza naprężenia termiczne w stanie bezodkształceniowym laminatu - tzw. naprężenia resztkowe.

Tak więc związek fizyczny dla warstwy w głównych osiach materiałowych ma postać

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

Biorąc pod uwagę laminat, naprężenia w jego "k-tej" warstwie, wyrażają się w osiach laminatu (x, y) związkiem

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix}_k \quad (4.49)$$

gdzie α_x , α_y i α_{xy} to tzw. pozorne współczynniki rozszerzalności cieplnej, które otrzymuje się poprzez zastosowanie odpowiedniej transformacji (dodatniej lub ujemnej) współczynników α_1 i α_2 , analogicznie jak dla tensora odkształceń.

Związek fizyczny (4.49) zapisany macierzowo w postaci

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \{\varepsilon\}_k - [\bar{Q}]_k \{\alpha\}_k \Delta T \quad (4.50)$$

wraz z równaniem (4.13), zapisanym dla "k-tej" warstwy

$$\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon^o\} + Z \{\kappa^o\} \quad (4.51)$$

po zastosowaniu procedury identycznej z tą dla klasycznej teorii laminacji (rozdz. 4.1.2), prowadzi w efekcie do wypadkowych sił i momentów w postaci

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

gdzie

$$\{N^T\} = \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} = \Delta T \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k t_k \quad (4.54)$$

oznacza wektor wypadkowych sił termicznych, natomiast

$$\{M^T\} = \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} = \Delta T \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k t_k Z_k^C \quad (4.55)$$

oznacza wektor **wypadkowych momentów termicznych**.

Przenosząc w równaniach (4.52) i (4.53) wypadkowe siły i momenty termiczne na lewe strony, można je traktować jak równoważne siły i momenty mechaniczne. Równania te przyjmują wówczas postaci

$$\{\bar{N}\} = \{N + N^T\} = [A] \{\varepsilon^o\} + [B] \{\kappa^o\} \quad (4.56)$$

$$\{\bar{M}\} = \{M + M^T\} = [B] \{\varepsilon^o\} + [D] \{\kappa^o\} \quad (4.57)$$

Wielkości \bar{N}_i i \bar{M}_i noszą nazwy, odpowiednio - **fikcyjnych sił i momentów wypadkowych**. Podobnie jak w klasycznej teorii laminacji - (4.56) i (4.57) można zapisać wspólnie w postaci

$$\begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa^o \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

lub też po odwróceniu

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

przy czym macierze $[A']$, $[B']$, $[D']$ określone są równaniami (4.34).