

WYTRZYMAŁOŚĆ KOMPOZYTÓW WARSTWOWYCH

Zagadnienia wytrzymałościowe w przypadku materiałów kompozytowych, a mówiąc ściślej włóknistych kompozytów warstwowych (np. laminaty zbrojone włóknami) należy rozpatrywać na trzech poziomach obserwacji, wynikających z ich budowy.

Najniższy poziom obserwacji to poziom mikroskopowy (można też nazwać go materiałowym), na którym rozróżniamy składniki tworzące kompozyt tzn. włókna i matrycę. Ich własności wytrzymałościowe decydują bezpośrednio o cechach wytrzymałościowych warstwy kompozytowej. Temu zagadnieniu, wymagającemu odmiennego podejścia od tego stosowanego w dotychczasowych rozważaniach poświęcony jest wykład 7 (pkt.7.3).

Kolejny poziom obserwacji to poziom warstwy, rozumianej jako podstawowy "budulec" kompozytu warstwowego, ale jednocześnie będącej już elementem zdolnym do samodzielnego przenoszenia obciążenia. Pojawia się zatem problem określenia jej nośności, czyli wartości obciążenia, jakie jest ona w stanie bezpiecznie przenieść.

I wreszcie najwyższy poziom analizy wytrzymałościowej to poziom laminatu jako zbioru warstw, których własności i sposób ułożenia decydują bezpośrednio o nośności kompozytu.

Z praktycznego punktu widzenia najbardziej istotny jest ten ostatni przypadek, gdyż zadaniem konstruktora jest zaprojektowanie do określonego celu odpowiedniego laminatu z warstw, rzadko natomiast zajmuje się on doбором składu samej warstwy, co jest domeną inżynierii materiałowej oraz technologii i w zasadzie jest zadaniem dla producentów materiałów kompozytowych.

W tym wykładzie przedstawione będą podstawowe koncepcje odnoszące się do analizy wytrzymałościowej warstwy, a następnie na tej podstawie omówione będą podstawowe zagadnienia dotyczące wytrzymałości laminatów warstwowych.

6.1. Nośność warstwy ortotropowej, jednokierunkowo zbrojonej

Określenie nośności warstwy ortotropowej jednokierunkowo zbrojonej (kompozytu jednokierunkowego) jest pojęciowo znacznie bardziej złożone niż dla materiału izotropowego. W tym ostatnim, powszechnie używanymi narzędziami są różnorakie hipotezy wyężeniowe, z których większość zdefiniowana jest poprzez naprężenia lub odkształcenia główne, bądź ich niezmienniki. W tle takiego podejścia stoi zawsze współosiowość tensorów naprężenia i odkształcenia. W przypadku materiałów anizotropowych, a w szczególności ortotropowych takie podejście jest bezużyteczne, gdyż kierunki główne obu tensorów są różne. Innym ważnym czynnikiem różniącym pod względem analizy wytrzymałościowej materiały anizotropowe od izotropowych jest, że w tych ostatnich w celu określenia stanów bezpiecznych w oparciu o większość kryteriów wyężeniowych, wystarczy znać wartość pewnej umownej granicy niebezpiecznej naprężeń, wyznaczanej z testu jednoosiowego rozciągania. W przeciwieństwie do tego w przypadku np. warstwy kompozytowej jednokierunkowo zbrojonej włóknami, granice niebezpieczne naprężeń przy rozciąganiu wzdłuż kierunku włókien i w kierunku do nich prostopadłym są zasadniczo różne. Podobna sytuacja ma miejsce dla ściskania. Dochodzi do tego jeszcze granica naprężeń niebezpiecznych przy ścinaniu. Tak więc w miejsce jednej granicy niebezpiecznej, jak w przypadku materiałów izotropowych, mamy pięć różnych charakterystyk wytrzymałościowych, a mianowicie

- ◆ $X_t (\sigma_{Lt})$ - wytrzymałość warstwy na rozciąganie w kierunku włókien (*ang. longitudinal tensile strength*),
- ◆ $X_c (\sigma_{Lc})$ - wytrzymałość warstwy na ściskanie w kierunku włókien (*ang. longitudinal compressive strength*),
- ◆ $Y_t (\sigma_{Tt})$ - wytrzymałość warstwy na rozciąganie w kierunku poprzecznym do włókien (*ang. transverse tensile strength*),
- ◆ $Y_c (\sigma_{Tc})$ - wytrzymałość warstwy na ściskanie w kierunku poprzecznym do włókien (*ang. transverse compressive strength*),
- ◆ $S (\tau_{LT})$ - wytrzymałość warstwy na ścinanie w płaszczyźnie głównych osi materiałowych (1,2) (*ang. longitudinal shear strength* lub krótko *shear strength*)

Powyżej podano podwójną symbolikę stosowaną przez różnych autorów. W niniejszym wykładzie stosowane będą pierwsze oznaczenia (za monografią R. Jonesa).

Można również podawać jako charakterystyki wytrzymałościowe zamiast naprężeń granicznych odkształcenia graniczne (niszczące) (*ang. ultimate strains*) ϵ_{Lt} , ϵ_{Lc} , ϵ_{Tt} , ϵ_{Tc} , γ_{LT} , których określenia wynikają wprost z tych dla naprężeń granicznych.

Wartości naprężeń i odkształceń granicznych dla niektórych kompozytów podane są w tabeli 6.1.

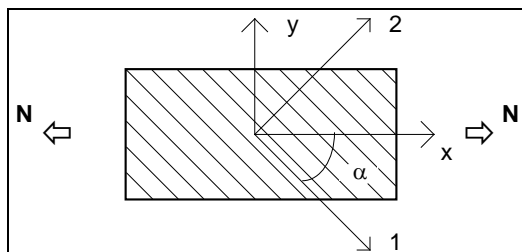
Niezależnie od typu kompozytu jednokierunkowego, widoczne jest, że jego wytrzymałości poprzeczne (w kierunku poprzecznym do włókien) są wielokrotnie mniejsze od wytrzymałości podłużnych (w kierunku włókien). Wynika to wprost z charakterystyk wytrzymałościowych składników kompozytu, tzn. włókien i matrycy (patrz skrypt - rozdz.1, tab. 1.1, 1.3) oraz ich roli w kompozycie. W przenoszeniu obciążenia podłużnego podstawową rolę pełnią włókna, a te mają w porównaniu z matrycą wytrzymałość na rozciąganie o 2 rzędy wielkości większą, co bezpośrednio rzutuje na podłużną wytrzymałość kompozytu. Z kolei w kierunku poprzecznym podstawowe znaczenie dla zachowania się kompozytu ma matryca, charakteryzująca się niską wytrzymałością. Tak więc i kompozyt w kierunku poprzecznym musi być mało wytrzymały. Analogiczny wniosek można wysnuć w stosunku do wytrzymałości na ścinanie, również wielokrotnie mniejszej od podłużnej, gdyż przy obciążeniu ścinającym główną rolę także odgrywa matryca.

KOMPOZYT		WYTRZYMAŁOŚĆ [MPa]					ODKSZTAŁCENIA NISZCZĄCE [%]				
MATERIAŁ	v_f	X_t	X_c	Y_t	Y_c	S	ϵ_{Lt}	ϵ_{Lc}	ϵ_{Tt}	ϵ_{Tc}	γ_{LT}
T300/5208 (włókna węglowe / epoksyd)	0.70	1500	1500	40	246	68	1.24	1.23	0.39	2.41	1.42
Scotch ply 1002 (wł. szklane E / epoksyd)	0.45	1062	610	31	118	72	2.36	1.36	0.26	0.98	1.31
boron / epoksyd	0.50	1260	2500	61	202	67	0.60	1.19	0.32	1.06	1.40
kevlar 49 / epoksyd	0.60	1400	235	12	53	34	1.84	0.31	0.22	0.96	1.62

Tabela 6.1. Charakterystyki wytrzymałościowe dla kompozytów jednokierunkowych

Kluczowym pytaniem w analizie wytrzymałościowej kompozytu jednokierunkowo zbrojonego (warstwy lub zbioru warstw jednakowo zorientowanych) jest pytanie - jak w oparciu o podanych pięć charakterystyk wytrzymałościowych określić nośność warstwy, w której występuje wieloosiowy stan naprężenia w układzie współrzędnych określonym przez główne osie materiałowe. Podkreślimy to wyraźnie - w analizie wytrzymałościowej jest nim zawsze właśnie układ osi głównych, co wiąże się wprost ze znajomością charakterystyk wytrzymałościowych wyłączone w tym układzie.

Zwróćmy uwagę na to, że wieloosiowość stanu naprężenia nie musi być w przypadku warstwy ortotropowej wywołana działaniem obciążenia złożonego. Wystarczy, aby jej obciążenie stanowiło np. obciążenie jednokierunkowe, ale działające wzdłuż kierunku nie pokrywającego się z żadną z głównych osi materiałowych. Pokazano to na rys. 6.1.



Rys. 6.1

W ukł. (x, y) jedyną niezerową składową tensora naprężenia jest oczywiście σ_x , ale przechodząc do ukł. głównych osi materiałowych $(1, 2)$ poprzez ujemną transformację tensora naprężenia otrzymamy tensor, którego wszystkie trzy składowe są niezerowe, a ich wartości zależą od kąta α . Nie wnikając w kryteria wytrzymałościowe dla złożonych stanów naprężenia, nie trudno sobie wyobrazić, że przy tym samym co do wartości obciążeniu, dla pewnych kątów α warstwa może ulec zniszczeniu, a dla innych nie. Tak więc należy podkreślić, iż wytrzymałość warstwy zależy od orientacji naprężeń w niej występujących (czy też orientacji obciążenia). Jest to efekt, który nie występuje w materiałach izotropowych.

Wróćmy do zasadniczego problemu tzn. kryteriów wytrzymałościowych dla wieloosiowego stanu naprężenia w warstwie. Podobnie jak w przypadku znanych z analizy materiałów izotropowych hipotez wyężeniowych, tak i w przypadku kompozytów żadne z nich nie ma uzasadnienia teoretycznego. Wszystkie wynikają z obserwacji doświadczalnych i jako takie mogą być nazwane kryteriami empirycznymi. Biorąc pod uwagę różnorodność materiałów kompozytowych i wręcz nieograniczoną swobodę w doborze ich konfiguracji trudno oczekiwać uniwersalności tych kryteriów i precyzji wyników uzyskiwanych na ich podstawie w każdym przypadku. Podobne zastrzeżenie można jednak zgłosić także i pod adresem hipotez wyężeniowych dla izotropii, a przecież są one powszechnie stosowane i akceptowane.

Podstawowe kryteria wytrzymałościowe (zwane czasami kryteriami dwuosiowymi, ze względu na to, że dotyczą stanów dwuosiowych naprężenia) w kolejności odpowiadającej częstości ich stosowania w projektowaniu (klasyfikacja ta pokrywa się z podziałem wedle prostoty kryterium) to :

1. **kryterium maksymalnego naprężenia,**
2. **kryterium maksymalnego odkształcenia,**
3. **kryterium Azzi'ego - Tsai'a - Hill'a,**
4. **kryterium Tsai'a - Wu.**

Wszystkie te kryteria, jakkolwiek różne, mają tę cechę wspólną, że są kryteriami "makroskopowymi", nie uwzględniającymi żadnych mechanizmów mikrouszkodzeń wewnątrz kompozytu, tak więc poziomem obserwacji przez nie wykorzystywanym jest warstwa, a nie jej składniki i ich możliwe różnorodne uszkodzenia prowadzące do zniszczenia warstwy.

W dalszej części wykładu przedstawione będą wymienione kryteria. Porównanie wyników uzyskanych na ich podstawie przedstawione jest w pełnej wersji podręcznika, a także w prezentacji PowerPoint, dostępnej na stronie internetowej Autora.

6.1.1. Kryterium naprężenia maksymalnego

Kryterium naprężenia maksymalnego mówi, że warunkiem stanu bezpiecznego kompozytu jednokierunkowego jest, aby naprężenia normalne σ_1 i σ_2 oraz naprężenie styczne σ_6 nie przekraczały wartości wytrzymałości odpowiadających im kierunkom. Formalny zapis tego kryterium ma postać:

$$-X_c \leq \sigma_1 \leq X_t \quad (6.1)$$

$$-Y_c \leq \sigma_2 \leq Y_t \quad (6.2)$$

$$|\sigma_6| \leq S \quad (6.3)$$

W wypadku, gdy którykolwiek z warunków (6.1) - (6.3) nie jest spełniony to w myśl kryterium naprężenia maksymalnego uważa się, że materiał ulega zniszczeniu w wyniku mechanizmu zniszczenia związanego z naprężeniami normalnymi lub stycznymi. Tak więc pozwala ono na identyfikację sposobu zniszczenia kompozytu. Jego wadą jest natomiast to, że nie uwzględnia ono sprzężenia między tymi mechanizmami. W istocie zatem powinno się mówić o trzech oddzielnych i nie związanych ze sobą sub-kryteriach.

Krytyczny czytelnik zauważy z pewnością, że "filozofia" kryterium maksymalnego naprężenia ma swe źródło w znanej z analizy wyężeniowej materiałów izotropowych hipotezie Galileusza - maksymalnych naprężeń głównych.

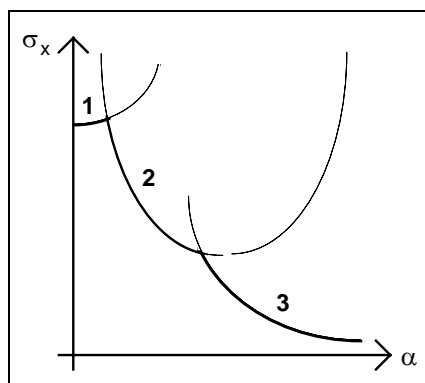
W celu ilustracji omawianego kryterium przeanalizujemy przypadek obciążenia w postaci jednoosiowego rozciągania pokazany na rys. 6.1. Obciążenie to w ukł. (x, y) wywołuje stan naprężenia o jedynej składowej niezerowej σ_x . Wykorzystując ujemną transformację tensora naprężenia do ukł. (1, 2) (równanie (3.4)) otrzymujemy tensor w postaci

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \sigma_x \sin^2 \alpha \\ -\sigma_x \cos \alpha \sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Stosując kryterium naprężenia maksymalnego (6.1), (6.2) i (6.3) otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{aligned} \sigma_x &< \frac{X_t}{\cos^2 \alpha} \\ \sigma_x &< \frac{Y_t}{\sin^2 \alpha} \\ \sigma_x &< \frac{S}{\cos \alpha \sin \alpha} \end{aligned} \quad (6.5)$$

W układzie współrzędnych (σ_x) otrzymujemy zatem trzy krzywe. Wytrzymałość dla analizowanego obciążenia otrzymujemy jako linię powstałą z części tych krzywych. Pokazano to schematycznie na rys. 6.2. Krzywa oznaczona na rys. 6.2. jako "1" odpowiada zniszczeniu wskutek przekroczenia wytrzymałości na rozciąganie podłużne X_t , krzywa "2" - zniszczeniu w wyniku przekroczenia wytrzymałości na ścinanie S , zaś krzywa "3" - wytrzymałości na rozciąganie poprzeczne Y_t .



Rys. 6.2. Schematyczny obraz kryterium naprężenia maksymalnego.

Dane doświadczalne w wielu wypadkach odbiegają od przewidywań teoretycznych wynikających z omawianego kryterium, szczególnie dla kompozytów typu włókno szklane/epoksyd. Niezależnie od rodzaju kompozytu nie obserwuje się wzrostu wytrzymałości kompozytu w stosunku do wytrzymałości na rozciąganie podłużne X_t dla małych kątów α , na co wskazywałaby krzywa "1", jak również punktów nieciągłości na krzywej (σ_x, α) , widocznych na rys. 6.2.

6.1.2. Kryterium odkształcenia maksymalnego

Kryterium odkształcenia maksymalnego jest koncepcyjnie bardzo zbliżone do kryterium naprężenia maksymalnego. Różnica między nimi polega jedynie na tym, że warunki graniczne nałożone są nie na naprężenia, jak w przypadku tego ostatniego, ale na odkształcenia. Mają one następujące postaci

$$-\varepsilon_{Lc} \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{Lt} \quad (6.6)$$

$$-\varepsilon_{Tc} \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_{Tt} \quad (6.7)$$

$$|\varepsilon_6| \leq \gamma_{LT} \quad (6.8)$$

Odształcenia muszą być zapisane w układzie głównych osi materiałowych.

Graniczne wartości odkształceń, w przypadku liniowej teorii sprężystości mogą być wyznaczone z odpowiadających im naprężeniowych charakterystyk wytrzymałościowych ze związków

$$\varepsilon_{Lt} = \frac{X_t}{E_1} \quad \varepsilon_{Lc} = \frac{X_c}{E_1} \quad (6.9)$$

$$\varepsilon_{Tt} = \frac{Y_t}{E_2} \quad \varepsilon_{Tc} = \frac{Y_c}{E_2} \quad (6.10)$$

$$\gamma_{LT} = \frac{S}{G_{12}} \quad (6.11)$$

Wartości odkształceń granicznych można też wziąć bezpośrednio z badań doświadczalnych.

Dla zilustrowania kryterium odkształcenia maksymalnego posłużymy się tym samym przykładem co poprzednio. Odształcenia w osiach materiałowych wyznaczamy ze związku fizycznego dla konfiguracji osiowej (rów. (2.18)) w postaci

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} (\sigma_1 - \nu_{12} \sigma_2) \quad (6.12)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} (\sigma_2 - \nu_{21} \sigma_1) \quad (6.13)$$

$$\varepsilon_6 = \frac{1}{G_{12}} \sigma_6 \quad (6.14)$$

Wstawiając naprężenia σ_1 , σ_2 i σ_6 z rów. (6.4) - kryteria (6.6), (6.7) i (6.8), po wykorzystaniu związków (6.9) - (6.11) dają odpowiednio

$$\sigma_x < \frac{X_t}{\cos^2 \alpha - \nu_{12} \sin^2 \alpha}$$

$$\sigma_x < \frac{Y_t}{\sin^2 \alpha - \nu_{21} \cos^2 \alpha} \quad (6.15)$$

$$\sigma_x < \frac{S}{\cos \alpha \sin \alpha}$$

Krzywa wytrzymałości kompozytu w ukł. (σ_x, α) składa się, podobnie jak to miało miejsce w kryterium naprężenia maksymalnego, z trzech linii określonych związkami (6.15). Wszystkie wady i zalety kryterium naprężeniowego odnoszą się w równym stopniu do kryterium odkształcenia maksymalnego. Bez trudu także można wskazać jego "protoplastę" wśród izotropowych hipotez wytrzymałościowych, a mianowicie hipotezę de Saint-Venanta - maksymalnych odkształceń głównych.

6.1.3. Kryterium Azzi'ego - Tsai'a - Hill'a

Kryterium Azzi'ego - Tsai'a - Hill'a (A-T-H) należy do grupy kryteriów empirycznych uwzględniających sprzężenie między różnymi mechanizmami zniszczenia kompozytu, określone w postaci jawnej poprzez zależność kryterium wytrzymałościowego od wszystkich składowych stanu naprężenia.

Warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego został uogólniony na materiały ortotropowe przez Hill'a w 1950 roku. Uogólnienie to ma postać

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1 \quad (6.16)$$

Warunek plastyczności został jednocześnie uznany za kryterium wytrzymałościowe dla kompozytu, tak więc *de facto* zakłada się, że o wytrzymałości kompozytu decyduje osiągnięcie granicznego stanu liniowo sprężystego. Parametry F, G, H, L, M, N , związane z plastycznym zachowaniem kompozytu zostały zastąpione standardowymi charakterystykami wytrzymałościowymi X, Y, S , bez uwzględnienia różnic w ich wartościach dla rozciągania i ściskania.

Rozpatrując jednoosiowe przypadki stanu naprężenia -Tsai uzyskał związki między parametrami F, G, H, L, M, N i charakterystykami wytrzymałościowymi X, Y, S . Rozumowanie Tsai'a przedstawiono poniżej

- ◆ jeżeli jedyną składową stanu naprężenia jest σ_1 , o maksymalnej dopuszczalnej wielkości $\sigma_1=X$, z (6.16) wynika zależność

$$G + H = 1/X^2 \quad (6.17)$$

- ◆ jeżeli jedyną składową stanu naprężenia jest σ_2 , o maksymalnej dopuszczalnej wielkości $\sigma_2=Y$, z (6.16) wynika zależność

$$F + H = 1/Y^2 \quad (6.18)$$

- ◆ jeżeli jedyną składową stanu naprężenia jest σ_3 , o maksymalnej dopuszczalnej wielkości $\sigma_3=Z$, z (6.16) wynika zależność

$$F + G = 1/Z^2 \quad (6.19)$$

- ◆ jeżeli jedyną składową stanu naprężenia jest σ_6 , o maksymalnej dopuszczalnej wielkości $\sigma_6=S$, z (6.16) wynika zależność

$$2N = 1/S^2 \quad (6.20)$$

Rozwiązując układ równań (6.17) - (6.19) otrzymujemy

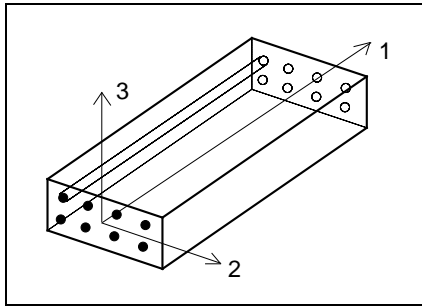
$$2F = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}$$

$$2G = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \quad (6.21)$$

$$2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}$$

W warunkach płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie (1, 2) kompozytu - rys. 6.3 - zachodzą warunki

$$\tau_{13} = \tau_{23} = \sigma_3 = 0 \quad (6.22)$$



Rys. 6.3.

Z symetrii własności mechanicznych kompozytu w płaszczyźnie jego przekroju poprzecznego (2, 3) (płaszczyzna poprzecznie izotropowa) wynika, że wytrzymałości w kierunku osi 2 i 3 muszą być takie same, tzn.

$$Y = Z \quad (6.23)$$

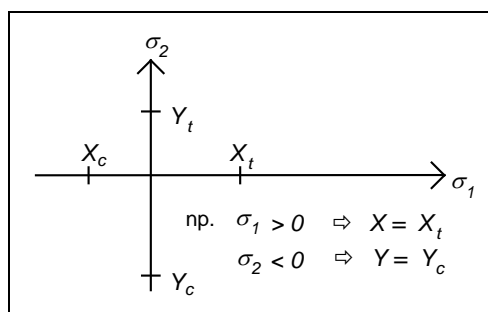
Kryterium (6.16) po wykorzystaniu związków (6.20) i (6.21) oraz zależności (6.23), przyjmuje dla płaskiego stanu naprężenia postać

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} = 1 \quad (6.24)$$

Azzi i Tsai wykazali, że kryterium w postaci (6.24) zachowuje ważność również wówczas, gdy materiał kompozytowy ma różne charakterystyki wytrzymałościowe na rozciąganie i ściskanie. Modyfikacja kryterium polega wówczas na wstawieniu w miejsce X i (lub) Y - w zależności od znaku naprężeń σ_1, σ_2 - wartości wytrzymałości na rozciąganie X_t, Y_t lub na ściskanie X_c, Y_c . Sposób wyboru odpowiedniej charakterystyki wytrzymałościowej w zależności od znaku naprężeń normalnych pokazany jest na rys. 6.4. Kryterium, z tak pomyślanymi modyfikacjami nazywane jest w literaturze kryterium Azzi'ego - Tsai'a - Hill'a, bądź Tsai'a - Hill'a.

W celu ilustracji tego kryterium, posłużymy się ponownie przykładem kompozytu obciążonego nie osiowo, analizowanym przy dwu poprzednich kryteriach. Wstawiając do kryterium A-T-H naprężenia określone przez (6.4), otrzymamy równanie linii, określającej wytrzymałość σ_x w zależności od kąta, pod jakim działa obciążenie. Ma ono postać:

$$\sigma_x = \left[\frac{\cos^4 \alpha}{X_t^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X_t^2} \right) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{Y_t^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (6.25)$$



Rys. 6.4. Sposób wyboru charakterystyk wytrzymałościowych w kryterium Azzi'ego-Tsai'a-Hill'a w zależności od znaku naprężeń normalnych.

Przewaga kryterium A-T-H nad kryteriami naprężenia i odkształcenia maksymalnego przejawia się tym, że :

- ◆ pozostaje w lepszej zgodności z wynikami doświadczalnymi,
- ◆ uwzględnia interakcję składowych stanu naprężenia,
- ◆ jego obrazem jest jedna gładka krzywa, a nie trójodcinkowa krzywa z punktami nieciągłości.

6.1.4. Kryterium Tsai'a - Wu.

U podstaw tego kryterium leżało dążenie do jak najlepszego dopasowania teoretycznych krzywych zniszczenia do wyników doświadczalnych. Jest to więc kolejne kryterium empiryczne. Tsai i Wu zaproponowali w 1971 roku nowe charakterystyki wytrzymałościowe związane głównie ze współzależnościami naprężeń w wieloosiowych stanach naprężenia w formie tzw. tensorów wytrzymałości - rzędu II F_{ij} i rzędu IV F_{ijkl} .

W notacji zwężonej (zapis Voigta) kryterium Tsai'a-Wu opisujące powierzchnię zniszczenia w przestrzeni naprężeń ma postać

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (6.26)$$

W płaskim stanie naprężenia w kompozycie ortotropowym (6.26) redukuje się do postaci

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (6.27)$$

W przypadku płaskim wszystkie występujące w (6.27) elementy tensorów wytrzymałości, z wyjątkiem F_{12} , można wyznaczyć w próbach jednoosiowego rozciągania i ściskania oraz próbie ścinania.

◆ Jednoosiowe rozciąganie i ściskanie w kierunku osi 1

Wytrzymałość kompozytu na rozciąganie podłużne wynosi X_t , zaś na ściskanie X_c . W stanie granicznym, z równ. (6.27) otrzymujemy dla rozciągania i ściskania odpowiednio*)

$$F_1 X_t + F_{11} X_t^2 = 1 \quad (6.28)$$

$$F_1 (-X_c) + F_{11} (-X_c)^2 = 1 \quad (6.29)$$

W wyniku rozwiązania układu równań (6.28), (6.29) otrzymujemy F_1 i F_{11} w postaci

$$F_{11} = \frac{1}{X_c X_t} \quad F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \quad (6.30)$$

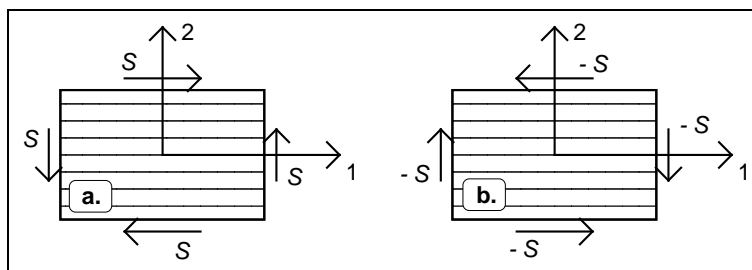
◆ Jednoosiowe rozciąganie i ściskanie w kierunku osi 2

Procedura odnosząca się do rozciągania i ściskania w kierunku poprzecznym do włókien, w pełni analogiczna do tej przedstawionej powyżej, prowadzi do następujących postaci składowych F_2 i F_{22} *)

$$F_{22} = \frac{1}{Y_c Y_t} \quad F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \quad (6.31)$$

◆ Ścinanie w płaszczyźnie (1, 2)

Wytrzymałość na ścinanie w głównych osiach materiałowych (1, 2) nie zależy od zwrotu naprężeń ścinających. Bez względu na to czy działają one tak, jak pokazano na rys. 6.5a, czy na rys. 6.5b zniszczenie kompozytu nastąpi przy tej samej wielkości naprężeń ścinających, których graniczna wartość wynosi S .



Rys. 6.5. Naprężenia ścinające w osiach materiałowych kompozytu.

*)W części literatury człony zawierające wytrzymałość na ściskanie X_c , Y_c występują z przeciwnymi znakami. Wynika to stąd, że X_c i Y_c jako graniczne wartości naprężeń ściskających uważane są za liczby ujemne. W tym skrypcie X_c i Y_c uważa się za dodatnie stałe materiałowe. Chcąc zatem uwzględnić to, że odpowiadają one ujemnym naprężeniom ściskającym, poprzedzone są w odpowiednich równaniach znakiem "-".

Konsekwencją tego faktu jest, że muszą zachodzić następujące związki, wynikające z (6.27)

$$F_6 S + F_{66} S^2 = 1 \quad (6.32)$$

$$F_6(-S) + F_{66}(-S)^2 = 1 \quad (6.33)$$

Układ równań (6.32), (6.33) spełniony jest wówczas, gdy składowe F_6 i F_{66} tensorów wytrzymałości wynoszą

$$F_{66} = 1/S^2 \quad F_6 = 0 \quad (6.34)$$

Wykazaliśmy zatem, że składowe F_1 , F_2 , F_{11} , F_{22} i F_{66} wyrażają się poprzez standardowe charakterystyki wytrzymałościowe, a F_6 musi się zerować. Do pełnego opisu tensorów wytrzymałości brakuje jedynie składowej F_{12} . Związana jest ona z interakcją naprężeń normalnych σ_1 i σ_2 . Jej wyznaczenie możliwe jest w zasadzie jedynie w teście dwuosiowym, o programie obciążenia np. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Dla takiego obciążenia kryterium Tsai'a-Wu przyjmuje postać

$$(F_1 + F_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1 \quad (6.35)$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma^2} - \frac{(F_1 + F_2)}{\sigma} - (F_{11} + F_{22}) \right] \quad (6.36)$$

Widać zatem, że do wyznaczenia składowej F_{12} nie wystarcza znajomość standardowych charakterystyk wytrzymałościowych, ale należy dodatkowo określić doświadczalnie wartość obciążenia σ , przy którym kompozyt ulega zniszczeniu.

W przypadku braku danych doświadczalnych dotyczących składowej F_{12} , można skorzystać z następującego równania

$$F_{12} = -\sqrt{F_{11}F_{22}}/2 \quad (6.37)$$

W przypadku kompozytu obciążonego jednokierunkowym obciążeniem nieosiowym (przykład ten analizowany był we wszystkich przedstawionych dotąd kryteriach wytrzymałościowych), kryterium Tsai'a-Wu przybiera postać

$$\sigma_x (F_1 \cos^2 \alpha + F_2 \sin^2 \alpha) + \sigma_x^2 [F_{11} \cos^4 \alpha + F_{22} \sin^4 \alpha + (F_{66} + 2F_{12}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha] = 1 \quad (6.38)$$

Równanie (6.38) będzie wykorzystane w przykładzie 1 w pkt. 6.3 - "Przykłady".

6.2. Wytrzymałość warstwowych laminatów kompozytowych

W pkt. 6.1 omówione zostały kryteria wytrzymałościowe dla warstwy kompozytowej jednokierunkowo zbrojonej włóknami. Podano także parametry wytrzymałościowe dla warstwy - naprężeniowe i odkształceniowe charakterystyki wytrzymałościowe oraz tensory wytrzymałości. Procedura określenia nośności tzn. obciążenia zewnętrznego jakie jest w stanie przenieść warstwa jest w tym przypadku jasna i może być przedstawiona w następujący sposób :

- ◆ wyznaczyć składowe stanu naprężenia i odkształcenia (w przypadku kryterium odkształcenia maksymalnego) w funkcji obciążenia zewnętrznego,
- ◆ wstawić wyznaczone składowe do jednego z kryteriów wytrzymałościowych i określić poszukiwaną nośność.

W przypadku laminatu, a więc zbioru warstw, które mogą różnić się między sobą zarówno parametrami geometrycznymi jak i materiałowymi sytuacja jest znacznie bardziej złożona. Różnorodność materiałów kompozytowych, mnogość różnych mechanizmów ich zniszczenia, wzajemne powiązania między nimi, trudności z doświadczalną weryfikacją kryteriów wytrzymałościowych (duże rozrzuty wyników, brak ujednoczonych procedur badawczych, nieodpowiednie niekiedy techniki eksperymentalne) sprawiają, że w chwili obecnej nie istnieje uniwersalna teoria wytrzymałościowa dla laminatów. Mówiąc inaczej - nie sposób jest określić ich wytrzymałość przyjmując jako poziom obserwacji laminat jako całość. Konieczne jest zejście na poziom poszczególnych warstw i dopiero w oparciu o ich własności

wytrzymałościowe zbudować algorytm analizy wytrzymałościowej odnoszący się do laminatu. To sprawia, że istnieje w tym zakresie pewna dowolność, której odzwierciedleniem jest istnienie różnych metod wyznaczania wytrzymałości laminatów. Analizę komplikuje także fakt, że wszystkie kryteria dotyczące warstwy bazują na wytrzymałościach określonych w jej głównych osiach materiałowych. W analizie laminatu stosuje się natomiast dowolnie przyjęty globalny układ odniesienia. Nieograniczone możliwości orientacji poszczególnych warstw względem tego układu, powodują że z reguły mamy do czynienia z wielością układów współrzędnych, co może prowadzić do pewnych komplikacji obliczeniowych.

O wytrzymałości laminatu decydują następujące czynniki:

- 1) charakterystyki wytrzymałościowe warstwy,
- 2) charakterystyki sztywnościowe warstwy
- 3) charakterystyki temperaturowe (współczynniki rozszerzalności cieplnej) warstwy,
- 4) sekwencja ułożenia warstw,
- 5) grubości warstw.

Znaczenie pierwszego z nich jest oczywiste i nie wymaga komentarza. Czynniki 2), 4) i 5) decydują o postaciach macierzy sztywności i podatności laminatu, niezbędnych do określenia naprężeń i odkształceń warstwowych w laminacie. Te z kolei są konieczne przy określaniu wytrzymałości poszczególnych warstw, a w dalszej kolejności również i laminatu.

Osobnego komentarza wymaga czynnik 3). W rozdziale 1, omawiając skrótowo proces laminacji na przykładzie laminatu wykonanego z taśmy "pre-preg" podano m.in. temperaturę laminacji, która wynosiła $\sim 120^{\circ}\text{C}$. Temperatura pracy laminatu z reguły różni się od temperatury laminacji. Wynikająca stąd różnica temperatur jest źródłem powstawania naprężeń reszkowych (*ang. residual stresses*), które mają wpływ na wytrzymałość laminatu i powinny być uwzględniane w jego całościowej analizie wytrzymałościowej, choć niewątpliwie ją komplikują.

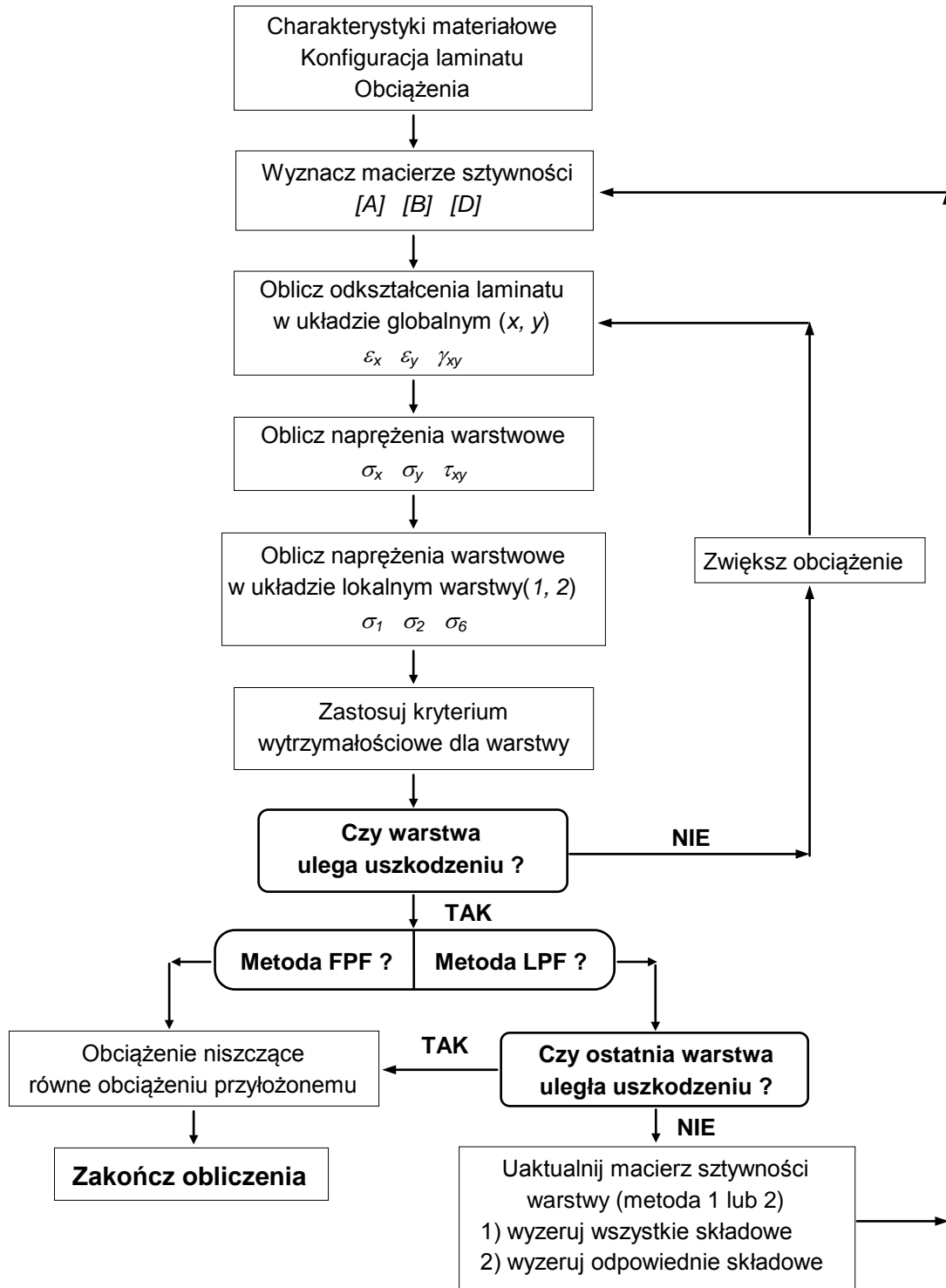
Wspomniano już wcześniej, że u podstaw wyznaczania wytrzymałości laminatu leży analiza wytrzymałości tworzących go warstw, a uściślając to stwierdzenie - analiza naprężeń i odkształceń warstwowych, które wyznacza się z zależności wynikających z klasycznej teorii laminacji, przedstawionej w rozdziale 4. Stosując w odniesieniu do każdej z warstw wybrane kryterium wytrzymałościowe można określić wytrzymałość każdej z nich, a tym samym znaleźć warstwę, która ulegnie zniszczeniu (wedle przyjętego kryterium) jako pierwsza. Można zatem wyznaczyć także obciążenie, przy którym nastąpi zniszczenie tej warstwy. Nosi ono nazwę obciążenia niszczącego pierwszą warstwę (w literaturze anglosaskiej ogólnie przyjętym określeniem jest **First Ply Failure load**, przy czym używa się skrótu tego określenia - **FPF**. Choć można by się pokusić o polski odpowiednik tego określenia, będziemy tu używać skrótu angielskiego).

Z reguły zniszczenie pierwszej warstwy nie oznacza wyczerpania nośności laminatu. W większości przypadków może on nadal bezpiecznie przenosić obciążenie, czasem znacznie większe niż obciążenie odpowiadające FPF. Zazwyczaj jest tak, że zniszczeniu ulegają kolejne warstwy, a laminat jako całość nadal może przejmować zwiększone obciążenie i dopiero zniszczenie ostatniej warstwy jest równoznaczne z wyczerpaniem jego nośności. Obciążenie, przy którym to następuje nosi nazwę obciążenia niszczącego ostatnią warstwę (w literaturze anglosaskiej ogólnie przyjętym określeniem jest **Last Ply Failure load**, przy czym używa się skrótu tego określenia - **LPF**. Również my będziemy używać skrótu angielskiego, rezygnując z poszukiwania polskiego odpowiednika).

W analizie wytrzymałościowej laminatu bazującej na koncepcji LPF musi być rozpatrywane zachowanie wszystkich warstw, prowadzące do wykluczania z laminatu kolejno niszczących się warstw. Tak więc mamy tu do czynienia z zadaniem, w którym konieczne jest wielokrotne jego "redefiniowanie". Stosowane są dwa podejścia do uwzględniania wpływu zniszczonej warstwy na własności wytrzymałościowe laminatu. Pierwsze z nich polega na całkowitym wykluczeniu zniszczonej warstwy z laminatu, tzn. przyjęciu, że wszystkie jej sztywności są zerowe (w literaturze ang. podejście to nosi nazwę *total ply discount approach*). Drugie podejście, obliczeniowo bardziej pracochłonne, uwzględnia mechanizm, zgodnie z którym następuje zniszczenie danej warstwy i wyklucza się jedynie te spośród jej charakterystyk sztywnościowych, które związane są z danym mechanizmem. Takie podejście sprowadza się zatem do częściowego wykluczenia warstwy uszkodzonej z dalszej analizy (*ang. partial ply discount approach*). Jeżeli mechanizm zniszczenia związany jest z uszkodzeniem matrycy, to przyjmuje się jako zerowy tylko poprzeczny moduł sprężystości i moduł ścinania, zachowując niezmienną wartość podłużnego modułu sprężystości warstwy. W przypadku, gdy

mechanizm zniszczenia związany jest ze zniszczeniem włókien, wówczas wszystkie sztywności przyjmuje się jako zerowe (w tym wypadku znika różnica między metodą częściowej i całkowitej eliminacji warstwy).

Dalsza analiza wytrzymałości, bez względu na to, który sposób eliminacji warstwy został zastosowany, przebiega w ten sposób, że należy wyznaczyć dla "nowego" laminatu macierze sztywności, a następnie dokonać sprawdzenia czy pozostałe nieuszkodzone warstwy "nowego" laminatu mogą bezpiecznie przenieść obciążenie, przy którym nastąpiło zniszczenie warstwy analizowanej jako ostatnia. Jeżeli tak jest to oznacza to, że laminat jest w stanie przejąć zwiększone obciążenie - całą procedurę wyznaczania jego wytrzymałości należy zacząć od początku. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z ostatecznym zniszczeniem laminatu, a obciążeniem niszczącym, odpowiadającym LPF, jest obciążenie niszczące warstwę analizowaną jako ostatnia. Opisaną powyżej procedurę przedstawiono w formie schematu blokowego na rys. 6.6.



Rys. 6.6. Algorytm analizy wytrzymałościowej warstwowego laminatu kompozytowego.

6.3. Przykłady

POKAZ POWERPOINT + pełna wersja podręcznika + ćwiczenia