



WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

DR MAŁGORZATA JANUS-MICHALSKA, DR DOROTA JASIŃSKA, INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI, WYDZIAŁ INŻYNIERII LĄDOWEJ, POLITECHNIKA KRAKOWSKA

ZAGADNIENIE KONTAKTU SPRĘŻYSTEGO OŚRODKA ANIZOTROPOWEGO NA PRZYKŁADZIE MATERIAŁU KOMÓRKOWEGO O UJEMNYM WSPÓŁCZYNNIKU POISSONA

CONTACT PROBLEM FOR A CLASS OF ANISOTROPIC ELASTIC CELLULAR BODIES WITH NONPOSITIVE POISSON'S RATIO

1. Wstęp

W zagadnieniach mechaniki kontakt jest jednym z podstawowych problemów, ze względu na fakt, że jest to główny sposób przekazywania obciążeń. Większość prac poświęconych temu tematowi skupia się nad wyznaczeniem naprężeń w strefie kontaktu, których maksymalne wartości określają zakres obciążeń zewnętrznych. Rzeczywiste powierzchnie rozważane w zadaniach inżynierskich są szorstkie, a właściwość tą określa się w skali makroskopowej przez współczynnik tarcia. Najprostszy model tarcia zakłada, że w strefie kontaktu może występować szczytowanie lub poślizg zależnie od wielkości powstałych naprężeń stycznych albo całkowite zerwanie kontaktu. O zachowaniu się ciał w strefie kontaktu decyduje zarówno sposób i wielkość obciążenia, wartość współczynnika tarcia jak również własności ośrodka sprężystego określone między innymi przez współczynnik Poissona. Kwazistatyczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla kontaktu z ośrodkami anizotropowymi wskazuje na możliwość istotnej zmiany rozkładu naprężeń w strefie kontaktu w porównaniu z ośrodkiem izotropowym [6,8,9]. Również występowanie stref szczytowania i poślizgu jest zależne od własności anizotropowych ośrodka sprężystego. W pracy [6] pokazano na przykładzie ciał komórkowych o różnorodnej symetrii materiałowej problem projektowania struktury wewnętrznej materiału w celu uzyskania redukcji koncentracji naprężeń normalnych. Wnioski wyraźnie wskazują na materiały o

ujemnym współczynnikiem Poissona, tzw. „auxetic materials” jako te, dla których przy kontakcie powstaje najkorzystniejszy rozkład naprężeń. Dla rozważanych materiałów komórkowych za efekt ujemnego współczynnika odpowiada budowa szkieletu materiału tworząca wielokąty wklęsłe. Taka struktura wewnętrzna daje ponadto tzw. materiał dylatacyjny podatny na odkształcenia objętościowe i stosunkowo sztywny na odkształcenia postaciowe. Sztywności te mierzy się odpowiednio modułem ściśliwości objętościowej i modułem na ścinanie. Wpływa to istotnie na postać deformacji ciała anizotropowego dla zadania z kontaktem oraz na zachowanie w strefie kontaktu. Jednak należy podkreślić, że współczynnik Poissona jak i inne moduły sprężyste dla materiału anizotropowego są scharakteryzowane przez rozkłady kierunkowe. Ponadto własności materiału opisują wszystkie niezależne stałe materiałowe, których liczba zależy od typu symetrii i składowych tensora sztywności. Stąd dla wskazanej grupy materiałów komórkowych można dobrać parametry struktury wewnętrznej, które określą materiał odpowiednio wytrzymały i najkorzystniej pracujący ze względu na zachowanie w strefie kontaktu jak i redukcji naprężeń. Poszukiwaniom tych zależności jest poświęcona niniejsza praca.

2. Zagadnienie kontaktu

Rozważane jest zagadnienie płaskie kontaktu statycznego anizotropowego liniowo sprężystego ośrodka ze sztywnym szorstkim podłożem. Sformułowanie problemu brzegowego w postaci układu równań jest następujące [1]:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = s_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2 \quad \text{w obszarze } \Omega \quad (1.1)$$

z przemieszczeniowymi i statycznymi warunkami brzegowymi

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{na brzegu } \Gamma_D, \quad \sigma_{ij} n_j = t_i \quad \text{na brzegu } \Gamma_F \quad (1.2)$$

oraz warunkami w strefie kontaktu Γ_C

$$\sigma_n u_n = 0, \quad \sigma_n \leq 0 \quad (1.3)$$

i warunkami dla tarcia na powierzchni kontaktu Γ_C

$$|\sigma_T| < \mu |\sigma_n| \Rightarrow \Delta \mathbf{u}_T = 0, \quad |\sigma_T| = \mu |\sigma_n| \Rightarrow \exists \lambda > 0; \Delta \mathbf{u}_T = -\lambda \sigma_T \quad (1.4)$$

gdzie:

σ_{ij} - tensor naprężeń Cauchyego, ε_{ij} - tensor małych odkształceń, s_{ijkl} - tensor sztywności anizotropowego ciała sprężystego, \hat{u}_i - wektor przemieszczeń, f_i - wektor sił masowych, \hat{u}_i - zadane przemieszczenia na brzegu Γ_D , t_i - wektor sił brzegowych na brzegu Γ_F , n_i - wektor normalny, $\Gamma_D \cup \Gamma_F \cup \Gamma_C$ - brzeg obszaru Ω , $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$ - naprężenie normalne w strefie kontaktu, $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ - przemieszczenie normalne do brzegu, $\sigma_{Ti} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i$ - naprężenie styczne, $\Delta \mathbf{u}_T = \Delta(\mathbf{u} - u_n \mathbf{n})$ - przyrost przemieszczenia stycznego.

Dla rozważanego przypadku zadania dwuwymiarowego rozwiązanie istnieje, gdy współczynnik tarcia μ i współczynnik Poissona ν sprężystego ośrodka spełniają pewien warunek. Dla ciała izotropowego w zadaniu dwuwymiarowym jest on następujący [6]:

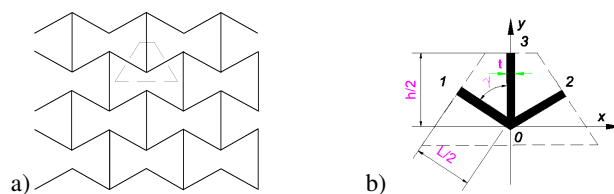
$$\mu \leq \frac{\sqrt{3-4\nu}}{(2-2\nu)}.$$

Przedstawiony problem brzegowy nieliniowy ze względu na warunki (1.3) and (1.4) jest rozwiązywany za pomocą programu MES - ANSYS.

3. Materiały komórkowe o ujemnym współczynniku Poissona

3.1. Anizotropowe własności efektywnego continuum

Jako ośrodek anizotropowy przyjęto materiał komórkowy o komórkach otwartych i masywnym szkielecie o płaskiej strukturze periodycznej. Struktura ta wyznaczona jest przez topologię węzłów (wspólnych punktów ścian szkieletu) i to ona przesądza o rodzaju anizotropii, w tym również o efekcie ujemnego współczynnika Poissona. Typowy przykład struktury auksetycznej tzn. tworzącej materiał o ujemnym współczynniku Poissona wraz z komórką reprezentatywną jest pokazany na rys. 1.



Rys. 1. a) Struktura materiału komórkowego o ujemnym współczynniku Poissona, b) komórka reprezentatywna.

Fig. 1. a) Reentrant cellular structure, b) Representative unit cell.

Jeśli dodatkowo rozważamy materiał o niskiej gęstości względnej (dużej porowatości) to szkielet może być modelowany przez płaską strukturę belkową połączoną w sztywnych węzłach [11]. Wyznaczenie wszystkich własności sprężystych materiału komórkowego jako efektywnego continuum oparte jest na modelowaniu dwuskalowym. W skali mikro rozważana jest komórka reprezentatywna wraz z fragmentem zawartego w niej szkieletu belkowego gromadzącego energię sprężystą. Komórkę reprezentatywną opisują geometryczne parametry mikrostruktury: L , h - długości elementów belkowych t - szerokość przekroju belek, γ - kąt (rys.1.b.) oraz materiałowe parametry mikrostruktury: E_s - moduł Younga, ν_s - współczynnik Poissona, R_e - granica plastyczności dla materiału szkieletu. Modelem mechanicznym struktury szkieletu materiału komórkowego jest belka Timoshenki (belki szkieletu typowych materiałów są krępe). Dzięki zastosowaniu modelu belkowego dla dowolnej deformacji w zakresie liniowo sprężystym komórki reprezentatywnej opisanej tensorem odkształceń można wyznaczyć rozkład sił wewnętrznych w belkach szkieletu. Numeryczne rozwiązania dla zadawanych deformacji uzyskano metodą elementów skończonych (program ANSYS).

Kontinuum zastępcze definiuje się poprzez ekwiwalentność potencjału sprężystego zgromadzonego w szkielecie belkowym, który wyraża się wzorem:

4

$$U = \int_{V_s} ({}^s\Phi_E) dV_s = \sum_{i=1}^3 \left(\int_0^{l_{0,i}} \frac{(F_{in}(\xi_i))^2}{2E_s A} d\xi_i + \mu \int_0^{l_{0,i}} \frac{(F_{ir}(\xi_i))^2}{2G_s A} d\xi_i + \int_0^{l_{0,i}} \frac{(M_i(\xi_i))^2}{2E_s J} d\xi_i \right) \quad (2.1)$$

gdzie:

$F_{in}(\xi_i), F_{ir}(\xi_i), M_i(\xi_i), i = 1, 2, 3$ - funkcje sił przekrojowych (podłużnych, poprzecznych i momentu zginającego) w belkach szkieletu, ξ_i - oś podłużna i-tej belki

A, J - pole i moment bezwładności przekroju belkowego

μ - energetyczny współczynnik ścinania (dla przekroju prostokątnego $\mu = 1.2$).

Gęstość energii dla continuum zastępczego odpowiada uśrednieniu po objętości komórki reprezentatywnej potencjału sprężystego zgromadzonego w szkielecie belkowym:

$$\Phi_E = \frac{1}{V} \int_{V_s} ({}^s\Phi_E) dV_s \quad (2.2)$$

Podejście to szczegółowo jest opisane w pracach [11,12]. Dla rozważanych struktur periodycznych na podstawie analizy reprezentatywnej komórki wyznaczane są: tensor sztywności oraz wielkości pomocnicze służące do sformułowania hipotezy wyciężeniowej. Macierz sztywności (w notacji Kelvina S_{ij}) dla ekwiwalentnego continuum o podanej strukturze i symetrii na następującą postać macierzową równoważną z zapisem wskaźnikowym s_{ijkl} :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1111} & s_{1122} & 0 \\ s_{1122} & s_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & 2s_{1212} \end{bmatrix} \quad (3)$$

3.2. Hipoteza wyciężeniowa oparta na kryterium energetycznym

Zastosowanie kryterium stanów granicznych w strukturze szkieletu wraz z podejściem dwuskalowym pozwala na wyznaczenie granicznych naprężeń w materiale [11,12]. Wyznacza się je numerycznie dla stanów własnych tensora sztywności na podstawie analizy komórki reprezentatywnej wg algorytmu podanego w pracy [11].

Dla materiału komórkowego jako ciała anizotropowego przyjęto hipotezę wyciężeniową jako energetyczne kryterium w postaci energii ważonych zgromadzonych w stanach własnych tensora sztywności [16,17]:

$$\sum_{\alpha=1}^{\text{III}} \frac{{}^{\alpha}\Phi_E}{{}^{\alpha}\Phi_E^{gr}} = 1 \quad (4.1)$$

Energie krytyczne ${}^{\alpha}\Phi_E^{gr}$ zgromadzone w stanach własnych wyrażone są wzorami:

$${}^{\alpha}\Phi_E^{gr} = \frac{1}{2\lambda_{\alpha}} ({}^{\alpha}\sigma^{gr}) ({}^{\alpha}\sigma^{gr}) \quad (4.2)$$

gdzie:

λ_α – wartości własne tensora sztywności (załącznik).

${}^\alpha \sigma^{gr}$ - graniczne stany własne naprężeń wyznaczone numerycznie, odpowiadające pojawieniu się pierwszych uplastycznień w szkielecie belkowym [17].

W dowolnym stanie sprężystym można wprowadzić energetyczny współczynnik, który jest tu obraną miarą wyężenia materiału [8,9]:

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{\text{III}} \frac{{}^\alpha \Phi_E}{{}^\alpha \Phi_E^{gr}} \quad (4.3)$$

gdzie: ${}^\alpha \Phi_E$ - energie sprężyste zgromadzone w stanach własnych.

${}^\alpha \Phi_E^{gr}$ - graniczne energie sprężyste (algorytm ich obliczania podano w pracy [17].)

W stanie sprężystym spełniona jest nierówność: $\varphi \leq 1$. Współczynnik φ pozwala na wyznaczenie wartości maksymalnego obciążenia w zakresie sprężystym. Ponadto analiza mapy wyężenia materiału pozwala przewidzieć miejsca, w których spodziewane są pierwsze uplastycznienia materiału.

4. Przykłady

Obliczenia numeryczne dotyczące tensora sztywności i parametrów wyężenia materiałów komórkowych o różnych mikrostrukturach przeprowadzono w/g algorytmu podanego w pracy [8]. Przyjęto materiału szkieletu o następujących parametrach: $E_s = 10$ GPa, $\nu_s = 0.3$, $R_c = 100$ MPa .

4.1. Kwadratowy blok obciążony ciśnieniem

Przyjęto blok o wymiarach $B \times H = 1\text{m} \times 1\text{m}$ na sztywnym szorstkim podłożu o współczynniku tarcia $\mu = 0.3$, obciążony ciśnieniem $p = 0.025$ MPa przyłożonym do górnej krawędzi jak na rys. 2.a. Przyład ten zacytowano z pracy [9].

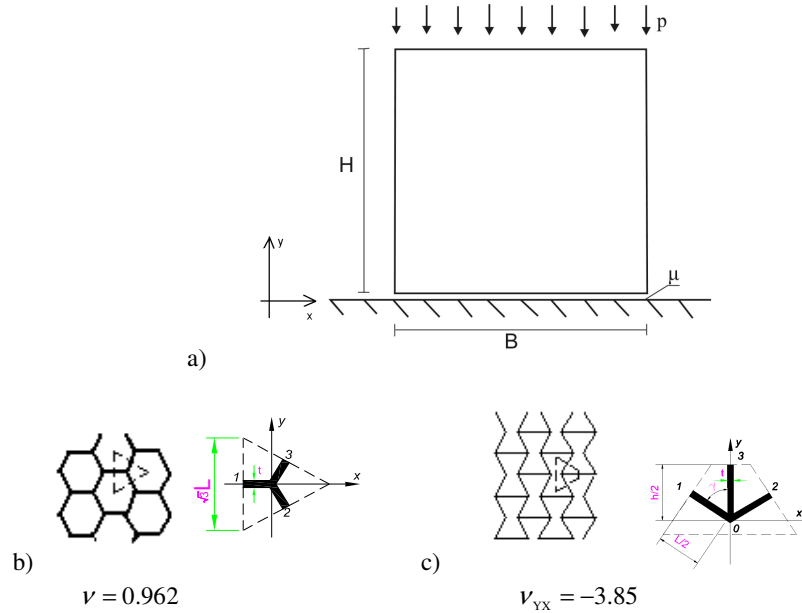
Inspiracją do dalszych obliczeń numerycznych był uzyskany rozkład naprężeń dla materiału o strukturze plastra miodu (honeycomb) rys. 2.b, dającej materiał izotropowy oraz materiału o strukturze wielokątów wklęsłych ('inverted honeycomb') rys. 2.c, dającej materiał auksetyczny.

Przyjęto następujące dane geometryczne struktur materiałów:

'honeycomb' $l_{0,1} = 0.75$ mm , $l_{0,2} = 0.75$ mm , $l_{0,3} = 0.75$ mm , $t = 0.15$ mm .

'inverted honeycomb' $L = h = 1.575$ mm , $\gamma = 70^\circ$, $t = 0.15$ mm

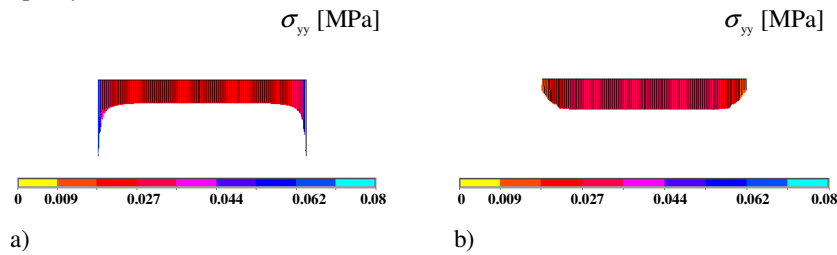
ze względu na nośność przyjęto ustawienie pionowe struktury rys. 2.c.



Rys. 2. a) Blok obciążony ciśnieniem, b) struktura materiału izotropowego o dodatnim współczynniku Poissona, c) struktura materiału komórkowego o ujemnym współczynniku Poissona.

Fig. 2. a) Square block under vertical pressure, b) 'honeycomb' material structure, c) 'inverted honeycomb' material structure.

Rozwiązanie zadania wskazuje na inny jakościowo rozkład naprężeń σ_{yy} w strefie kontaktu dla materiału o ujemnym współczynniku Poissona, charakteryzujący się redukcją koncentracji naprężeń. Inne będą też przewidywane obszary powstania pierwszych uplastycznień.



Rys. 3. Rozkład naprężeń normalnych w strefie kontaktu, a) dla materiału o dodatnim współczynniku Poissona, b) dla materiału o ujemnym współczynniku Poissona.

Fig. 3. Contact pressure distribution a) for material with positive Poisson's ratio, b) for material with negative Poisson's ratio.

4.2. Kwadratowy blok obciążony ciśnieniem – studium parametryczne

Rozważono materiały auksetyczne o różnych właściwościach otrzymanych poprzez dobór parametrów mikrostruktury. Dane geometryczne poszczególnych mikrostruktur podano w Tabelcy 1.

T a b l i c a 1

Specyfikacja struktury materiału komórkowego

Struktura	L [mm]	h [mm]	γ	t [mm]
I	1.50	1.50	80°	0.15
II	1.50	2.00	60°	0.15
III	1.575	1.575	70°	0.15
IV	1.5	3.0	60°	0.15

Otrzymane numerycznie moduły sztywności efektywnego continuum zestawiono poniżej w Tabelcy 2. (Wyniki dotyczą pionowej orientacji struktury względem układu współrzędnych XY jak na rys 2.) Macierze sztywności uzyskanych materiałów oraz wzory na moduły sztywności podano w załączniku.

T a b l i c a 2

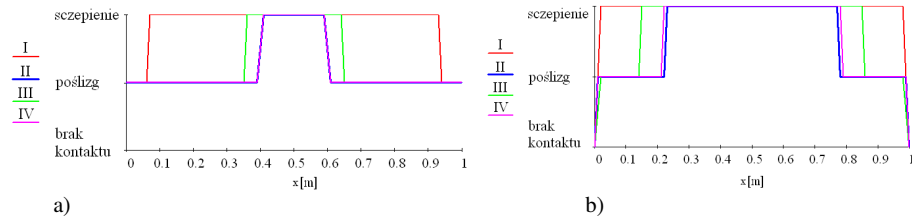
Moduły sztywności

Struktura	E_x [kPa]	E_y [kPa]	ν_{xy}	ν_{yx}	max(G/K)
I	1.2970	46.1831	-0.142	-5.058	5.52
II	1.9410	6.270	-0.532	-1.718	28.9
III	0.1311	1.951	-0.261	-3.850	2.23
IV	3.4074	3.6713	-0.912	-0.982	108.3

Materiały o otrzymanych sztywnościach są użyte do obliczeń w zadaniach kontaktowych MES (program ANSYS) . Do testów ustawiano materiały strukturą w pionie na rys. 2.c. Orientacja pionowa jest zazwyczaj wybierana ze względu na większą nośność (dla zadania z ciśnieniem pionowym). Obliczenia przeprowadzono dla zadania ze współczynnikiem tarcia $\mu = 0.1$ oraz $\mu = 0.2$.

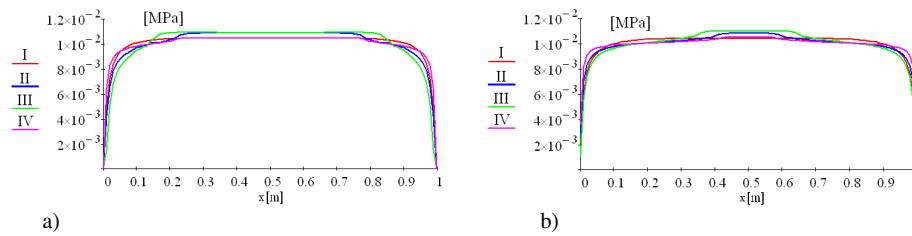
Do dyskretyzacji continuum użyto płaskie czworokątne ośmiowęzłowe elementy drugiego rzędu (PLANE 183). Obliczenia przeprowadzono dla dwóch gęstości regularnych siatek, podstawowej (10000 elementów) oraz zagęszczonej (40000 elementów). Strefę kontaktu zamodelowano trójwęzłowymi elementami kontaktowymi „surface to surface” (CONTA 172 i TARGE 169).

Wyniki wskazują, że zachowanie w strefie kontaktu zależne jest od wielkości współczynnika tarcia oraz jego relacji ze współczynnikiem Poissona (rys. 4). Analiza naprężeń normalnych wskazuje natomiast praktycznie na brak zależności rozkładu od wartości współczynnika tarcia oraz współczynnika Poissona w zakresie jego ujemnych wartości (rys.5).



Rys. 4. Rodzaj kontaktu dla rozważanych materiałów (pionowa orientacja struktur) dla danego współczynnika tarcia, a) $\mu=0.1$, b) $\mu=0.2$.

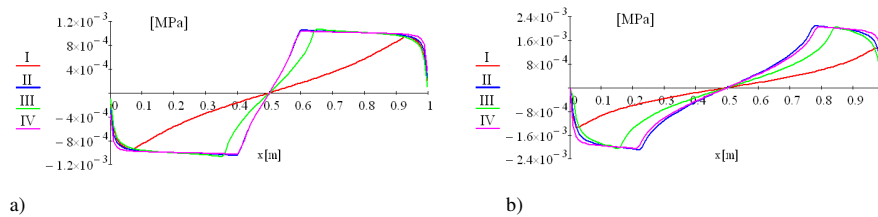
Fig. 4. Contact status along contact line for considered types of materials (vertical orientation) for friction coefficient a) $\mu=0.1$, b) $\mu=0.2$.



Rys. 5. Rozkład naprężeń normalnych σ_{yy} w strefie kontaktu a) $\mu=0.1$, b) $\mu=0.2$.

Fig. 5. Contact pressure σ_{yy} distribution a) $\mu=0.1$, b) $\mu=0.2$.

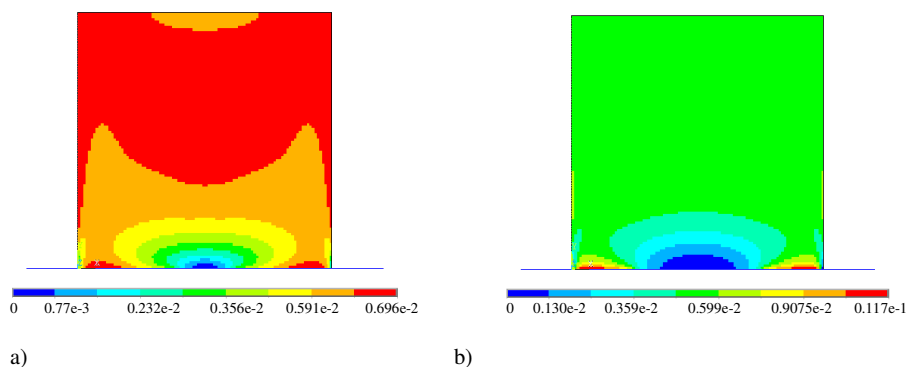
Wartość maksymalnych naprężeń stycznych jest większa dla wyższych wartości współczynnika tarcia (rys. 6) a rozkład zależy od rodzaju kontaktu (wg rys. 3).



Rys. 6. Rozkład naprężeń stycznych w strefie kontaktu a) $\mu=0.1$, b) $\mu=0.2$.

Fig. 6. Contact tangent stress distribution a) $\mu=0.1$, b) $\mu=0.2$.

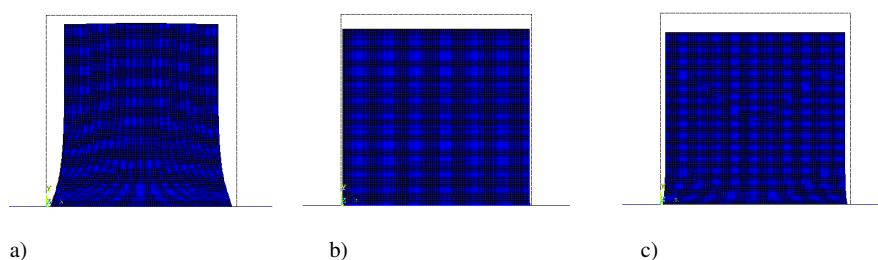
Analiza map wyężenia materiału wskazuje na koncentrację w strefie kontaktu (w strefach poślizgu) dla wyższych wartości współczynnika tarcia z równoczesnym ociążeniem pozostałej części materiału. Dla niższych wartości współczynnika tarcia wyężenie jest bardziej rozłożone w całym materiale. Do celów porównawczych wybrano materiał o strukturze II pionowa orientacja dla współczynnika tarcia kolejno: $\mu=0.1$, $\mu=0.2$.



Rys. 7. Obraz wyężenia w materiale (rozkład współczynnika ϕ), a) $\mu=0.1$, b) $\mu=0.2$.

Fig. 7. Distribution of material effort coefficient ϕ , a) $\mu=0.1$, b) $\mu=0.2$.

Deformacja bloku przy zadanym ociążeniu zależy od relacji współczynnika Poissona i współczynnika tarcia. Dla niższych wartości współczynnika Poissona deformacja ma kształt „dzwonu” (rys. 8a i 8c, dla większego współczynnika tarcia deformacja ta bardziej wyraźna rys. 8b. i 8c.)

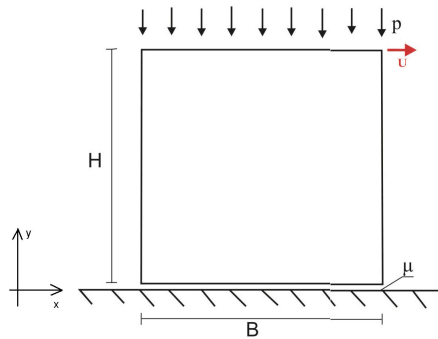


Rys. 8. Deformacja dla wybranych przykładów, a) materiał o strukturze III, $\mu=0.2$, b) materiał strukturze II, $\mu=0.1$, c) materiał o strukturze II, $\mu=0.2$.

Fig. 8. Deformation type for choosen examples a) material of structure III, $\mu=0.2$ b) material of structure II, $\mu=0.1$. c) material of structure II, $\mu=0.2$.

4.1 Złożony stan obciążeń z udziałem deformacji postaciowej –studium parametryczne.

Blok z poprzedniego zadania jest dodatkowo obciążony przemieszczeniem geometrycznym prawego górnego naroża $u=0.1$ m (rys. 9).



Rys. 9. Blok obciążony ciśnieniem pionowym oraz przemieszczeniem poziomym.

Fig. 9. Square block under vertical pressure and horizontal displacement.

Ze względu na wymuszoną deformację postaciową oraz objętościową należy spodziewać się również wpływu sztywności postaciowej i objętościowej oraz ich wzajemnej relacji na rozwiązanie. Istotną

ERROR: syntaxerror
OFFENDING COMMAND: --nostringval--

STACK: