

ANALIZA WPLYWU WYTRZYMAŁOŚCI PRĘTÓW SZEŚCIENNEJ STRUKTURY KOMÓRKOWEJ NA ROZKŁAD GRANICZNYCH ENERGII

Celem pracy jest zbudowanie efektywnego modelu sprężystego zachowania się materiałów komórkowych oraz zastosowanie energetycznego kryterium J. Rychlewskiego do określenia stanu granicznego, który w tym wypadku odpowiada osiągnięciu granicy liniowej sprężystości. Przyjęto sześcienną strukturę komórkową o powtarzającym się regularnym układzie sześciu prętów połączonych w sztywnym węźle. Pręty mogą odkształcać się sprężysto pod wpływem sił osiowych lub momentów gnących i sił poprzecznych. Wyznaczono w sposób analityczny moduły sprężyste oraz krytyczne energie dla trzech sprężystych stanów własnych. Zbadano możliwości modelowania rozkładu sztywności struktury z punktu widzenia energii krytycznych. Jako przykład do rozważań przyjęto na podstawie literatury strukturę kości gąbczastej, której budowa może być przynajmniej w przybliżeniu opisana omawianą sześcienną strukturą komórkową. Podobną analizę można przeprowadzić z większym lub mniejszym przybliżeniem także dla charakteryzujących się strukturą komórkową materiałów ceramicznych, polimerów oraz intermetalików.

ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF THE STRENGTH OF STRUTS FORMING A CUBIC CELL STRUCTURE ON THE DISTRIBUTION OF ENERGY LIMITS

The aim of the paper is to formulate an effective model of elastic behaviour of cellular materials and application of the energy-based Rychlewski criterion for determination of the limit state, which in our case corresponds to the limit of linear elasticity. A cubic cell structure is assumed with the repeating pattern of six struts connected in the rigid joint. The struts can deform elastically under the application of axial and transversal forces and bending moments. The elastic moduli and energy limits of three proper elastic states, pertinent to cubic symmetry, have been derived analytically. The modelling possibility of the influence of the strength of struts forming a cubic structure on the distribution of energy limits was studied. Basing on the available data, the structure of cancellous bone, which can be approximated by means of the discussed cubic cell structure, was chosen as an example. The similar analysis can be also conducted with the lesser or greater approximation in the case of cellular materials made of ceramics, polymers or intermetalics.

Wstęp

Do określenia kryterium sprężystego stanu granicznego dla materiałów anizotropowych stosuje się zazwyczaj hipotezy wyężeniowe o charakterze empirycznym. Energetyczne kryterium stanu granicznego zaproponowane przez J. Rychlewskiego dało podstawę do stworzenia teorii wyężenia materiałów, które w ogólności wykazują anizotropię własności mechanicznych [1-4]. W kryterium energetycznym należy określić graniczne energie dla poszczególnych sprężystych stanów własnych, których w ogólności może być, co najwyżej sześć. Te graniczne energie można wyznaczyć doświadczalnie lub obliczyć. Propozycję obliczania granicznych energii podano w [5] i dyskutowano dokładniej w [6, 7]. Obliczenie krytycznych energii wymaga stworzenia modelu efektywnego, przy pomocy, którego będzie można przewidywać sprężyste zachowanie się materiału na podstawie teoretycznego opisu jego struktury.

* mgr inż. Piotr Kordzikowski, dr inż. Małgorzata Janus-Michalska, dr hab. inż. Ryszard B. Pęcherski prof. PK, Katedra Wytrzymałości Materiałów, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Łądowej, Politechnika Krakowska.

Celem pracy jest zbudowanie efektywnego modelu sprężystego zachowania się materiałów komórkowych oraz zastosowanie energetycznego kryterium J. Rychlewskiego do określenia stanu granicznego, który w tym wypadku odpowiada osiągnięciu granicy liniowej sprężystości. W [7] sformułowano taki model dla metalicznej pianki, zakładając komórkę elementarną w kształcie czworościanu. Dało to podstawę do prezentowanej analizy, w której przyjęto sześcienną strukturę komórkową o powtarzającym się regularnym układzie sześciu prętów połączonych w sztywnym węźle. Pręty mogą odkształcać się sprężysto pod wpływem sił osiowych lub momentów gnących i sił poprzecznych. Wyznaczono w sposób analityczny, zakładając podejście kinematyczne, moduły sprężyste oraz krytyczne energie dla trzech sprężystych stanów własnych. Zbadano możliwości modelowania rozkładu sztywności struktury z punktu widzenia energii krytycznych. Jako przykład do rozważań przyjęto na podstawie literatury strukturę kości gąbczastej, której budowa może być przynajmniej w przybliżeniu opisana omawianą sześcienną strukturą komórkową, por. np. [8]. Podobną analizę można przeprowadzić z większym lub mniejszym przybliżeniem także dla charakteryzujących się strukturą komórkową materiałów ceramicznych, polimerów oraz intermetalików.

Podstawą analizy jest monografia [9] oraz publikacje [9-11]. W pracy [7] przedstawiono, stosując podejście kinematyczne dla modelu belkowego, sposób wyznaczenia modułów sprężystych oraz granicznych energii dla czworościennej struktury izotropowej. W [8] obliczono, wykorzystując program elementów skończonych ABAQUS, moduły sprężyste dla sześcienniej struktury kości gąbczastej w zależności od typu struktury. Analiza przeprowadzona w naszej pracy oparta jest na elementarnej komórce sześcienniej przedstawionej na rysunku 1. Analiza ta jest możliwa dzięki podobieństwu przemieszczeń punktów 1, 2, 3, 4, 5, 6. Podobieństwo to polega na tym, że w każdym punkcie środkowym kolejnych komórek sześciennych moment gnący jest równy zero. Ponadto przyjmujemy założenie o małych przemieszczeniach i jednorodnych stanach odkształceń.

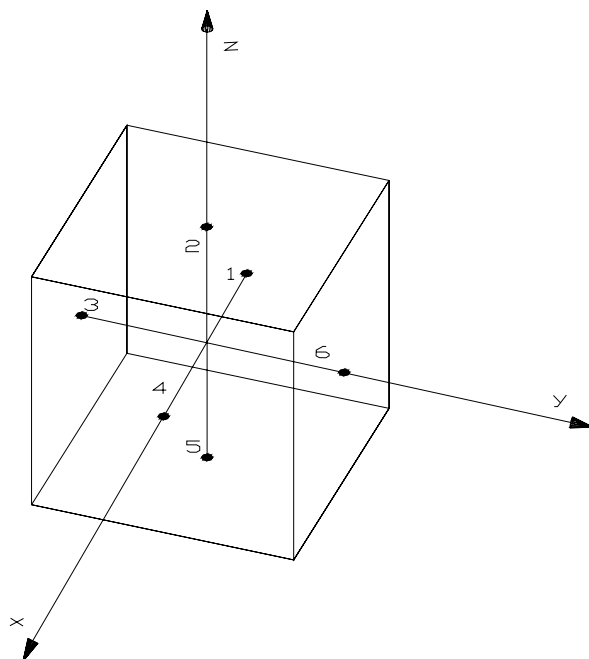
1. MODEL SZEŚCIENNEJ STRUKTURY KOMÓRKOWEJ

Do rozważań przyjęto model belkowy o sztywnym węźle dla powtarzalnej komórki o strukturze sześcienniej *rys. 1*. Długość elementu belkowego przyjęto jako $\frac{L}{2}$. Siły działające na układ belkowy zostaną wyznaczone podejściem kinematycznym. Aby wyznaczyć przemieszczenia końców elementów belkowych należy w ogólności zrealizować sześć stanów jednostkowych. W naszym wypadku wystarczy zrealizować jedno rozciągnięcie i jedno ścięcie. Będzie to jeden z trzech równoważnych stanów jednostkowych zrealizowanych przez jednoosiowe rozciągnięcie ε_α w kierunku $\alpha = x, y, z$, *rys.2*, który można przedstawić następująco:

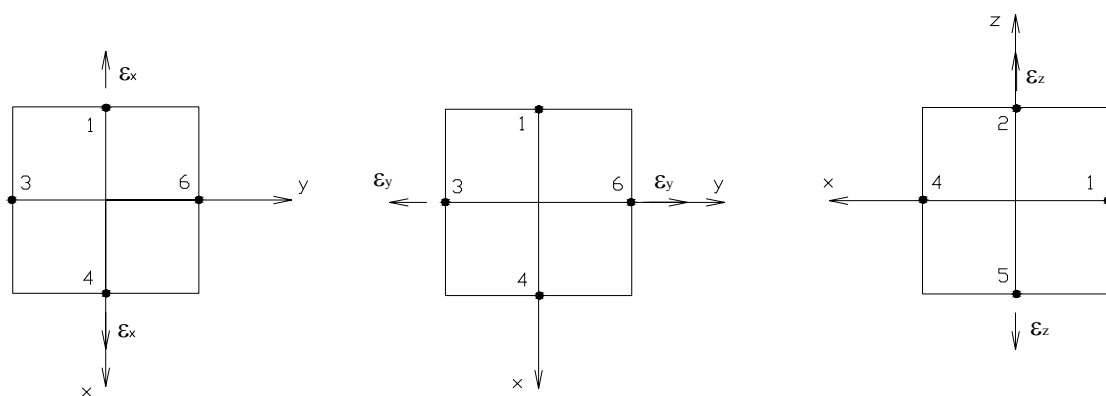
$$\bar{\Delta}_i(\varepsilon_\alpha) = \varepsilon_\alpha (\vec{b}_i \cdot \vec{e}_\alpha) \vec{e}_\alpha \quad \text{dla } i=1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (1)$$

gdzie \vec{b}_i oznaczają wektory położenia elementów belkowych w układzie x, y, z , a \vec{e}_α są jednostkowymi wektorami określającymi orientację elementów belkowych w układzie x, y, z oraz jeden z trzech równoważnych stanów jednostkowych zrealizowanych przez ścięcie $\gamma_{\alpha\beta}$ w płaszczyźnie $\alpha\beta$ *rys.3*, który można przedstawić następująco:

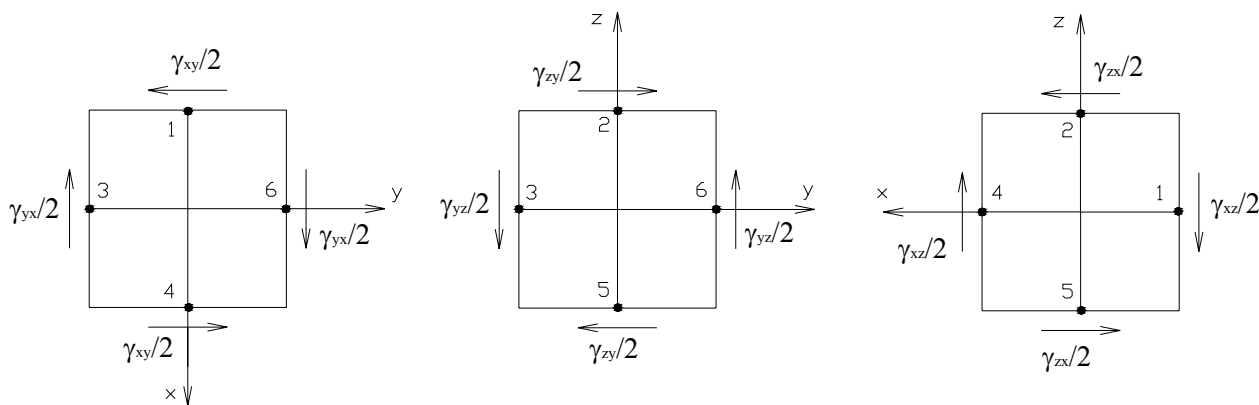
$$\bar{\Delta}_i(\gamma_{\alpha\beta}) = \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2} \left[(\vec{b}_i \cdot \vec{e}_\alpha) \vec{e}_\beta + (\vec{b}_i \cdot \vec{e}_\beta) \vec{e}_\alpha \right] \quad \text{dla } i=1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ oraz } \alpha \neq \beta \quad (2)$$



Rys. 1 Reprezentatywna komórka sześcienna – model belkowy.



Rys. 2 Jednoosiowe rozciągnięcia ϵ_α w kierunku $\alpha = x, y, z$.



Rys. 3 Ścięcie $\gamma_{\alpha\beta}$ w płaszczyźnie $\alpha\beta$.

Można wykazać, że jest to równoważne zrealizowaniu trzech stanów własnych, typowych dla symetrii kubicznej, to znaczy: I stanu własnego (kulistego) - odpowiadającego wszechstronnemu rozciąganiu lub ściskaniu, II stanu własnego – odpowiadającego izochorycznemu rozciągnięciu w kierunku np. osi X z równoczesnym ściśnięciem w kierunku osi Y i Z oraz III stanu własnego – odpowiadającego ścięciu w płaszczyźnie XY, YZ, ZX.

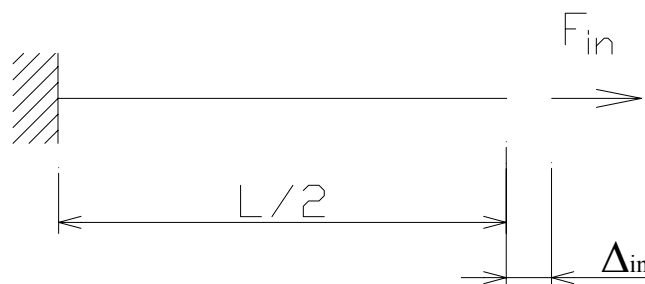
Całkowite przemieszczenie końców elementów belkowych przedstawia zależność:

$$\vec{\Delta}_i = \vec{\Delta}_{in} + \vec{\Delta}_{i\tau} \text{ dla } i=1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (3)$$

gdzie przemieszczenia normalne to $\vec{\Delta}_{in} = (\vec{\Delta}_i \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i$, a przemieszczenia styczne wyrażone są następująco:

$$\vec{\Delta}_{i\tau} = (\vec{e}_i \times \vec{\Delta}_i) \times \vec{e}_i.$$

Znając przemieszczenia końców elementów belkowych należy wyznaczyć sztywność na rozciąganie i zginanie tych elementów. Model belki rozciąganej siłą osiową F_{in} przedstawia rys.4.



Rys. 4 Model belki rozciąganej.

Sztywność s_n belki rozciąganej obliczamy z zależności:

$$\frac{d(\Delta_{in}(\xi))}{d\xi} = \frac{N(\xi)}{E_s A(\xi)} \quad (4)$$

$$\Delta_{in}(0) = 0$$

$$N(x) = F_{in}$$

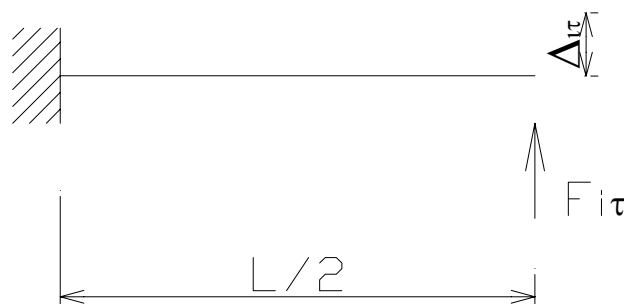
$$\Delta_{in}(x) = \Delta_{in}\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\Delta_{in} = F_{in} \frac{L}{2 E_s A}$$

$$c_n = \frac{L}{2 E_s A}$$

$$s_n = \frac{1}{c_n} = \frac{2 E_s A}{L} \quad (5)$$

gdzie A jest pole przekroju elementu belkowego, natomiast E_s określa moduł Younga dla elementu belkowego. Model belki zginanej przedstawia rys.5.



Rys. 5 Model belki zginanej.

Sztywność $s_{\tau M}$ belki zginanej przy założeniu płaskich przekrojów zgodnie z hipotezą Bernoulliego obciążonej siłą poprzeczną z uwzględnieniem rozkładu momentów na przemieszczenia poprzeczne końca belki obliczamy z zależności:

$$\frac{d^2(\Delta_{i\tau}^M(\xi))}{d\xi^2} = \frac{M(\xi)}{E_s I(\xi)} \quad (6)$$

$$\Delta_{i\tau}^M(0) = 0$$

$$\frac{d(\Delta_{i\tau}^M(0))}{d\xi} = 0$$

$$M(\xi) = F_{i\tau} \left(\frac{L}{2} - \xi \right)$$

$$\Delta_{i\tau}^M = \Delta_{i\tau}^M \left(\frac{L}{2} \right)$$

$$c_{\tau M} = \frac{L^3}{24 E_s I} \quad (7)$$

$$s_{\tau M} = \frac{I}{c_{\tau M}} = \frac{24 E_s I}{L^3}$$

gdzie I oznacza moment bezwładności na zginanie elementu belkowego.

Sztywność $s_{\tau Q}$ belki Timoshenki uwzględniająca dodatkowy wpływ rozkładu sił poprzecznych na przemieszczenie końca belki obliczamy z zależności:

$$\frac{d(\Delta_{i\tau}^Q(\xi))}{d\xi} = \frac{Q(\xi)}{G_s A_r(\xi)} \quad (8)$$

$$\Delta_{i\tau}^Q(0) = 0$$

$$Q(\xi) = F_{i\tau}$$

$$\Delta_{i\tau}^Q = \Delta_{i\tau}^Q \left(\frac{L}{2} \right)$$

$$c_{\tau Q} = \frac{L}{2 G_s A_r} \quad (9)$$

$$s_{\tau Q} = \frac{I}{c_{\tau Q}} = \frac{2 G_s A_r}{2}$$

Stąd sztywność s_τ wspornika jako konstrukcji na przemieszczenie poprzeczne jest odwrotnością sumy podatności od rozkładu momentów i dodatku od rozkładu sił poprzecznych. Sztywność tę wyraża zależność:

$$c_\tau = \frac{L^3}{24 E_s I} + \frac{L}{2 G_s A_\tau}$$

$$s_\tau = \frac{1}{c_\tau} = \frac{1}{\frac{L^3}{24 E_s I} + \frac{L}{2 G_s A_\tau}}, \quad (10)$$

gdzie G_s oznacza sztywność na ścinanie elementu belkowego oraz $A_\tau(\xi) = \frac{I(\xi) b(\xi)}{S(\xi)}$.

Mając przemieszczenia poszczególnych elementów belkowych oraz sztywności tych elementów możemy wyznaczyć wartości sił działających na elementy belkowe oraz sprawdzić równowagę układu:

$$F_{in} = \Delta_{in} s_n \quad \text{dla } i=1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (11)$$

$$F_{i\tau} = \Delta_{i\tau} s_\tau$$

stosując równania

$$\sum_{i=1}^6 \vec{F}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 \vec{F}_i \times \vec{b}_i = 0 \quad (12)$$

2. WYZNACZENIE MODUŁÓW SPRĘŻYSTYCH DLA SZEŚCIENNEJ STRUKTURY KOMÓRKOWEJ.

Znając wartości sił działających na sześcienną strukturę komórkową można wyznaczyć naprężenia otrzymane z rozkładu tych sił:

- dla przekroju komórki płaszczyzną $\pi : X=0$ otrzymujemy naprężenia:

$$A_x (\sigma_{xx} \vec{e}_x + \sigma_{xy} \vec{e}_y + \sigma_{xz} \vec{e}_z) + \vec{F}_1 + \frac{1}{2} \vec{F}_2 + \frac{1}{2} \vec{F}_5 + \frac{1}{2} \vec{F}_3 + \frac{1}{2} \vec{F}_6 = 0 \quad (13)$$

- dla przekroju komórki płaszczyzną $\pi : Y=0$ otrzymujemy naprężenia:

$$A_y (\sigma_{yx} \vec{e}_x + \sigma_{yy} \vec{e}_y + \sigma_{yz} \vec{e}_z) + \vec{F}_3 + \frac{1}{2} \vec{F}_2 + \frac{1}{2} \vec{F}_5 + \frac{1}{2} \vec{F}_1 + \frac{1}{2} \vec{F}_4 = 0 \quad (14)$$

- dla przekroju komórki płaszczyzną $\pi : Z=0$ otrzymujemy naprężenia:

$$A_z (\sigma_{zx} \vec{e}_x + \sigma_{zy} \vec{e}_y + \sigma_{zz} \vec{e}_z) + \vec{F}_5 + \frac{1}{2} \vec{F}_1 + \frac{1}{2} \vec{F}_4 + \frac{1}{2} \vec{F}_3 + \frac{1}{2} \vec{F}_6 = 0 \quad (15)$$

gdzie:

$$A_x = A_y = A_z = L^2,$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - wektory kierunkowe płaszczyzn $\pi : X=0, \pi : Y=0, \pi : Z=0$.

Znając naprężenia możemy wyznaczyć tensor sztywności \mathbf{S} komórki sześciennej dla symetrii kubicznej z zależności:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (16)$$

W celu wyznaczenia reprezentacji tensora sztywności \mathbf{S} w przyjętym układzie współrzędnych należy zrealizować sześć stanów jednostkowych, trzy równoważne stany jednostkowego rozciągania oraz trzy równoważne stany jednostkowego ścięcia:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = 1, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0, \gamma_{xy} = 0, \gamma_{yz} = 0, \gamma_{zx} = 0, \\ \varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 1, \varepsilon_z = 0, \gamma_{xy} = 0, \gamma_{yz} = 0, \gamma_{zx} = 0, \\ \varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 1, \gamma_{xy} = 0, \gamma_{yz} = 0, \gamma_{zx} = 0, \\ \varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0, \gamma_{xy} = 1, \gamma_{yz} = 0, \gamma_{zx} = 0, \\ \varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0, \gamma_{xy} = 0, \gamma_{yz} = 1, \gamma_{zx} = 0, \\ \varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0, \gamma_{xy} = 0, \gamma_{yz} = 0, \gamma_{zx} = 1, \end{aligned}$$

w wyniku czego otrzymujemy macierz sztywności:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{1111} & s_{1133} & s_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ s_{1133} & s_{1111} & s_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ s_{1133} & s_{1133} & s_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2s_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2s_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2s_{2323} \end{bmatrix} \quad (17)$$

gdzie: $s_{1111} = \frac{s_n}{2L}$, $s_{1133} = 0$, $s_{2323} = \frac{s_\tau}{4L}$.

Wartości własne powyższej macierzy sztywności przedstawiają zależności:

$$\begin{aligned} \lambda_I &= s_{1111} + 2s_{1133} = \frac{s_n}{2L} \\ \lambda_{II} &= s_{1111} - s_{1133} = \frac{s_n}{2L} \\ \lambda_{III} &= 2s_{2323} = \frac{2s_\tau}{4L} \end{aligned} \quad (18)$$

Znając macierz sztywności jak również macierz podatności można wyznaczyć następujące moduły sprężyste:

- moduł Helmholtza (sprężystości objętościowej, ściśliwości):

$$K = \frac{s_n}{6L} \quad (19)$$

- moduł Younga:

$$E = \frac{s_n}{2L} \quad (20)$$

- moduł Kirchoffa (sprężystości postaciowej, ścinania):

$$G = \frac{2s_\tau}{4L} \quad (21)$$

- współczynnik Poissona:

$$\nu = 0 \quad (22)$$

3. KRYTERIUM ENERGETYCZNE DLA SZEŚCIENNEJ STRUKTURY KOMÓRKOWEJ

Przez stan graniczny dla materiałów komórkowych, możemy rozumieć osiągnięcie granicy liniowej sprężystości. Ważnym i otwartym problemem jest wtedy określenie kryterium wyteżenia. Pojęcie wyteżenia jest pojmowane zazwyczaj intuicyjnie, jako osłabienie mechanicznych własności materiału spowodowane obciążeniem ciała i łączy się z poszukiwaniem miary wyteżenia, tzn. pewnej funkcji składowych naprężenia lub odkształcenia, której wartość mierzy odległość od przyjętego stanu granicznego. Energetyczne kryterium wyteżenia dla ciał izotropowych zostało sformułowane sto lat temu przez M.T. Hubera [12]. Koncepcja gęstości sprężystej energii odkształcenia postaciowego, jako miary wyteżenia, została sformułowana dużo wcześniej przez J.C. Maxwella w prywatnym liście do W. Thomsona z 18 grudnia 1856 r. oraz, w odniesieniu do całkowitej energii sprężystej, przez E. Beltramiego [13]. Praca Beltramiego była cytowana w [12], natomiast propozycję Maxwella opublikowano dopiero w 1936 r. [14].

Próbie określenia energetycznego kryterium wyteżenia dla materiałów anizotropowych podjął uczeń Hubera, W.T. Burzyński [15]. Założenie, że stałe sprężyste spełniają pewne dodatkowe związki pozwoliło rozdzielić energię sprężystą na część objętościową oraz postaciową dla materiałów anizotropowych z pewnymi więzami. Można wykazać, że jest to równoważne żądaniu, aby ciśnienie było stanem bezpiecznym [16]. R. von Mises [17] zaproponował kwadratowy warunek uplastycznienia dla materiałów anizotropowych, który w skróconym zapisie ma postać: $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = H_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \leq 1$, gdzie \mathbf{H} jest symetrycznym tensorem wyteżenia IV rzędu. W tym wypadku także ograniczono rozważania do sytuacji, kiedy ciśnienie hydrostatyczne jest stanem bezpiecznym. Redukuje to liczbę stałych materiałowych z 21 do 15. Mises wyrażał pogląd, że rozkład energii sprężystej na część objętościową i postaciową dla ciał anizotropowych jest niemożliwy i tym samym podejście energetyczne jest nieuzasadnione. Rezultaty Burzyńskiego [15] wykazują, że stwierdzenie to było zbyt pochopne. Pomysł Burzyńskiego o addytywnym rozkładzie energii sprężystej dla ciała anizotropowego pozostał jednak długo niezauważony. Podjął go dopiero J. Rychlewski, wprowadzając koncepcję stanów energetycznie ortogonalnych oraz energetycznego iloczynu skalarnego, [1], [2]. Udowodnił, że dla ciała liniowo-sprężystego o dowolnej anizotropii energię sprężystą można rozłożyć jednoznacznie, na co najwyżej sześć rozłącznych części, oraz, że kwadratowe kryterium Misesa ma sens energetyczny. Można je zapisać wtedy w postaci:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_1)}{\Phi_I^{gr}} + \dots + \frac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_p)}{\Phi_p^{gr}} \leq 1, \quad p \leq 6, \quad (23)$$

$$2\Phi(\boldsymbol{\sigma}_i) = \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = C_{klmn} \sigma_{kl}^{(i)} \sigma_{mn}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, p$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_p$ jest jednoznacznym rozkładem tensora naprężenia na p energetycznie ortogonalnych stanów własnych zdefiniowanych symetrią tensora \mathbf{H} , $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_i)$ jest gęstością energii sprężystej nagromadzonej w odpowiednim stanie własnym i , gdzie \mathbf{C} jest tensorem podatności, a Φ_i^{gr} jest graniczną wartością energii sprężystej w stanie własnym i . Te graniczne wartości energii należy wyznaczyć eksperymentalnie lub też, jak zaproponowano to w [5] i [6] obliczyć z teoretycznego modelu uwzględniającego strukturę materiału. Propozycję tę zastosowano w [7] w odniesieniu do pianek metalicznych.

Dla rozważanej w pracy sześcienniej struktury komórkowej kryterium (23) przyjmie postać, która była szczegółowo dyskutowana w [3, 4]:

$$\frac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_I)}{\Phi_I^{gr}} + \frac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_2)}{\Phi_{II}^{gr}} + \frac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_3)}{\Phi_{III}^{gr}} \leq 1, \quad (24)$$

gdzie Φ_I^{gr} , Φ_{II}^{gr} i Φ_{III}^{gr} oznaczają odpowiednio wartości granicznych energii dla I stanu własnego - hydrostatycznego, II stanu własnego - dewiatorowego związanego z rozciągnięciem wzdłuż krawędzi komórki elementarnej i jednoczesnym ściśnięciem wzdłuż dwóch pozostałych oraz dla III stanu własnego – dewiatorowego związanego ze zmianą kątów między kolejnymi parami krawędzi komórki elementarnej.

4. WYZNACZENIE ENERGII GRANICZNYCH DLA SPRĘŻYSTYCH STANÓW WŁASNYCH

Wartości krytycznych energii sprężystych otrzymujemy w wyniku realizacji wspomnianych trzech stanów własnych. Energię krytyczną dla pierwszego stanu własnego - stanu hydrostatycznego - przedstawia zależność:

$$\Phi_I^{gr} = \frac{1}{3} \frac{1}{\lambda_I} \phi^2 R_e^2 \quad (25)$$

gdzie:

$$\phi = \frac{3A}{L^2} - \text{objętość względna,}$$

R_e - granica plastyczności elementu belkowego.

Energię krytyczną dla II stanu własnego - rozciągnięcia w kierunku np. osi X z równoczesnym ściśnięciem w kierunku osi Y, Z od stanu hydrostatycznego - przedstawia zależność:

$$\Phi_{II}^{gr} = \frac{2}{27} \frac{1}{\lambda_{II}} \phi^2 R_e^2 \quad (26)$$

Energię krytyczną dla III stanu własnego - ścięcia w płaszczyźnie XY, YZ, ZX - przedstawia zależność:

$$\Phi_{III}^{gr} = 24 \frac{1}{\lambda_{III}} \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L^6}, \quad (27)$$

gdzie h jest maksymalną odległością włókien górnych lub dolnych dla elementu belkowego.

5. ANALIZA ROZKŁADU SZTYWNOŚCI STRUKTURY KOMÓRKOWEJ Z PUNKTU WIDZENIA ENERGII STANÓW GRANICZNYCH

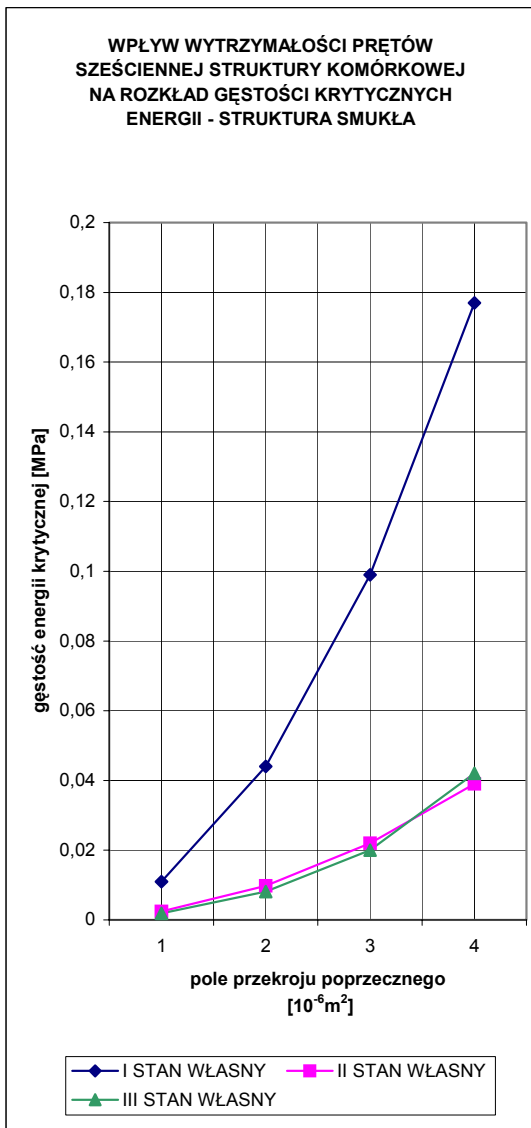
Jako przykład do rozważań przyjęto strukturę kości gąbczastej, której strukturę można przynajmniej w pierwszym przybliżeniu opisać przy pomocy omawianej sześcienniej struktury komórkowej [8]. W pierwszym przypadku do wyznaczenia krytycznych energii przyjęto sześcienną strukturę smukłą. Dla struktury smukłej zasadne jest przyjęcie przekroju kołowego dla elementu belkowego [8]. Stałe materiałowe i granicę plastyczności należy przyjąć jak dla kości ($E_s[GPa]$, $G_s[GPa]$, $R_e[MPa]$). Długość elementów belkowych dla struktury smukłej należy przyjąć: $L = 10 \cdot \text{średnica}[\mu m]$. Układ krytycznych energii dla struktury smukłej uzyskano sterując tylko średnicą elementu bez zmiany innych parametrów. Wartości energii krytycznych uzyskano dla następujących średnic: $d = 0.15 \mu m$, $d = 0.30 \mu m$, $d = 0.60 \mu m$, $d = 1.20 \mu m$.

Układ krytycznych energii dla struktury smukłej z uwzględnieniem wpływu rozkładu sił poprzecznych na przemieszczenie końca belki przedstawia rys.6, pominięcie rozkładu sił poprzecznych na przemieszczenie wpływa tylko na energię krytyczną III stanu własnego rys.7.

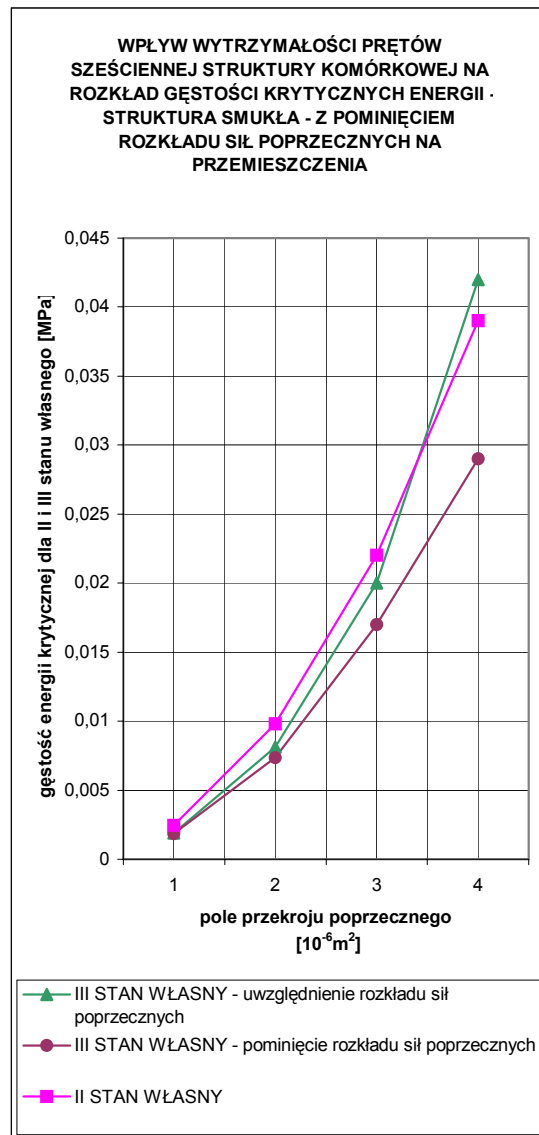
W drugim przypadku wyznaczenia krytycznych energii przyjęto sześcienną strukturę krępa. Dla struktury krępej należy przyjąć przekrój poprzeczny przedstawiony na rys.8. Stałe materiałowe i granica plastyczności – jak poprzednio. Długość elementów belkowych dla struktury krępej

przyjęto: $L = 3 t_h [\mu m]$. Układ krytycznych energii dla struktury krępej uzyskano sterując tylko wymiarami przekroju poprzecznego bez zmiany innych parametrów. Wartości energii krytycznych uzyskano dla następujących wymiarów [$1 (t_c = 0.15 \mu m, t_v = 0.55 \mu m, t_h = 0.55 \mu m)$,
 $1.5 (t_c = 0.15 \mu m, t_v = 0.55 \mu m, t_h = 0.55 \mu m)$, $2 (t_c = 0.15 \mu m, t_v = 0.55 \mu m, t_h = 0.55 \mu m)$,
 $2.5 (t_c = 0.15 \mu m, t_v = 0.55 \mu m, t_h = 0.55 \mu m)$].

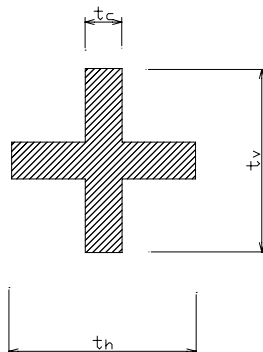
Układ krytycznych energii dla struktury krępej z uwzględnieniem wpływu rozkładu sił poprzecznych na przemieszczenie końca belki przedstawia *rys.9*, pominięcie rozkładu sił poprzecznych na przemieszczenie wpływa tylko na energię krytyczną III stanu własnego *rys.10*.



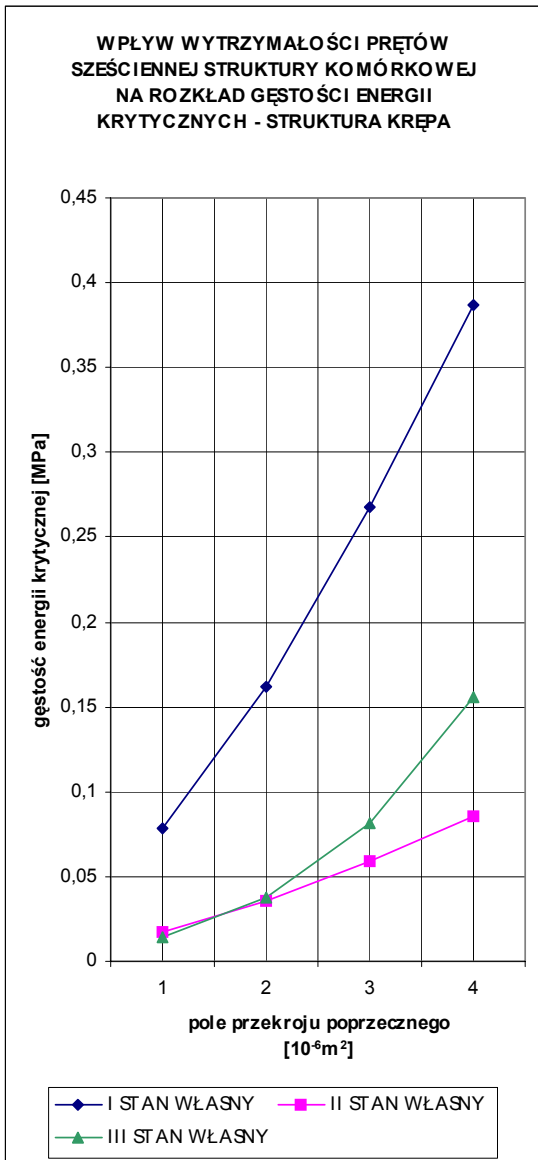
Rys. 6. Rozkład gęstości energii krytycznej dla Struktury smukłej.



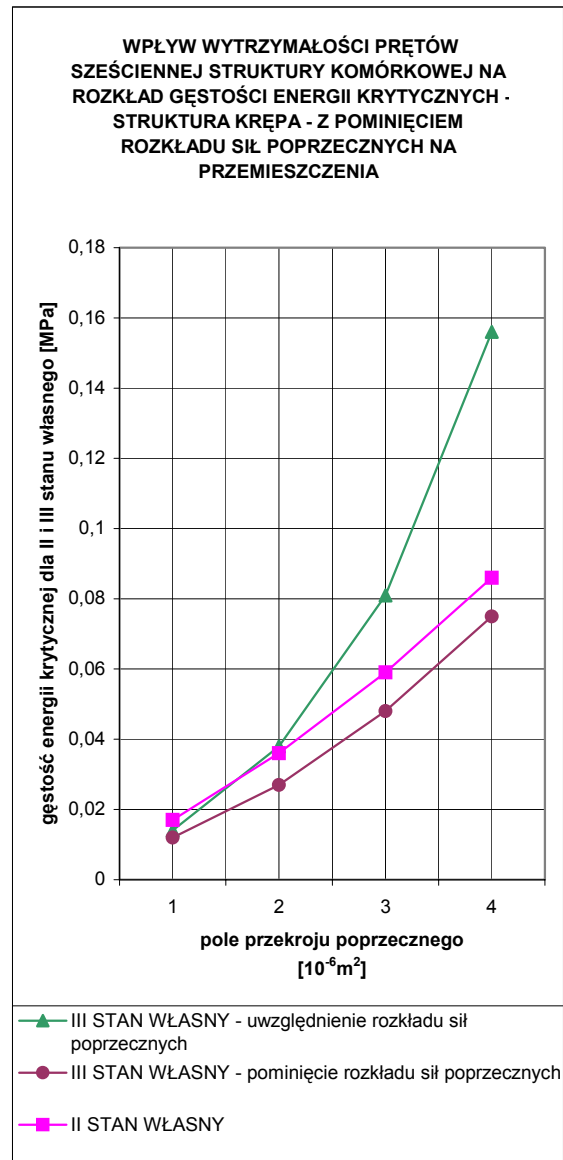
Rys. 7. Wpływ pominięcia sił poprzecznych Na przemieszczenia



Rys. 8 Przekrój poprzeczny elementu belkowego dla krępej struktury kości.



Rys. 9 Układ gęstości energii krytycznej dla struktury krępej.



Rys. 10 Wpływ pominięcia rozkładu sił poprzecznych na przemieszczenia.

6. WNIOSKI.

- W przypadku struktury smukłej o zniszczeniu decyduje gęstość energii III stanu własnego, czyli struktura jest nieodporna na ścinanie.
- Gdy struktura staje się bardziej krępa to staje się odporna na ścinanie a o zniszczeniu decyduje gęstość energii II stanu własnego, czyli rozciąganie w jednym kierunku i ściśnięcie w dwóch pozostałych kierunkach.
- Uwzględnienie rozkładu sił poprzecznych na przemieszczenie końca belki pozwala na dokładniejsze określenie gęstości energii krytycznej, a co za tym idzie racjonalne wykorzystanie wytrzymałości materiału.

- Otrzymane funkcje modułów sprężystych i gęstości energii krytycznej od parametrów mikrostruktury oraz morfologii szkieletu otwierają możliwość projektowania materiału według zadanych własności wytrzymałościowych.

Literatura

1. Rychlewski, J.: Elastic energy decomposition and limit criteria, *Uspekhi Mekh. -Advances in Mech.*, 1984, t. 7, s. 51÷80 (po rosyjsku).
2. Rychlewski, J.: Unconventional approach to linear elasticity, *Arch. Mech.*, 1995, t. 47, s. 149÷171.
3. Kowalczyk K., Ostrowska-Maciejewska J., Pęcherski R.B.: An-energy based yield criterion for solids of cubic elasticity and orthotropic limit state, *Arch. Mech.*, 2003, t. 55, 2003, s. 431÷448.
4. Pęcherski R.B., K. Kowalczyk, J. Ostrowska-Maciejewska, Energetyczne kryterium plastyczności dla monokryształów metali o sieci RSC, *Rudy Metale*, R 46, 639-644, 2001.
5. Nalepka K., Pęcherski R. B.: Fizyczne podstawy energetycznego kryterium wyężenia monokryształów, s. 311÷316, XXX Szkoła Inżynierii Materiałowej, Kraków-Ustroń-Jaszowiec, 1-4, X 2002, (ed. J. Pacyno), AGH, Kraków, 2002.
6. Nalepka K., Pęcherski R. B.: Energetyczne kryteria wyężenia. Propozycja obliczania granicznych energii z pierwszych zasad, *Rudy Metale*, 2003, r. 48, 533÷536.
7. Janus-Michalska M., Pęcherski R.B.: Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling, *Technische Mechanik*, 2003 – w druku.
8. Kowalczyk P.: Elastic properties of cancellous bone derived from finite element models of parameterized microstructure cells, *J. Biomechanics*, 2003, t. 36, 961÷972.
9. Gibson L. J., Ashby M. F.: *Cellular Solids: Structure and Properties*, Cambridge University Press, 1998.
10. Warren W. E., Kraynik A. M.: The linear elastic properties of open foams, *J. Appl. Mech.*, 1988, t. 55, 341÷346.
11. Mehraadi M. M., Cowin S. C.: Eigentensors of linear anisotropic elastic materials, *Mech. Appl. Math.*, 1990, t. 43, s. 15-41.
12. M.T. Huber, Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału. Przyczynek do podstaw teorii wytrzymałości, *Czasopismo Techniczne*, XXII, 1904, Nr. 3., 38-40, Nr. 4., 49-50, Nr. 5., 61-63, Nr. 6., 80-81, Lwów, (także: *Pisma*, t. II, 3-20, PWN, Warszawa, 1956).
13. Beltrami E., Sulla condizioni di resistenza dei corpi elastici, *Rend. Ist. Lomb.*, II, 18-27, 1885 (także w: *Opere matem.*, t. IV, Milano, 1920, 180-189).
14. Maxwell J.C.: Origins of Clerk Maxwell's electric ideas described in familiar letters to William Thomson, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 32, 1936, Part V (także: ed. by Sir J. Larmor, Cambridge Univ. Press, 1937, 31-33).
15. Burzyński W.T., Studjum nad Hipotezami Wyężenia, Nakładem Akademji Nauk Technicznych, Lwów, 1928 (także: *Dzieła wybrane*, t.I, PWN, Warszawa, 1982, 67-257).
16. Kowalczyk K., J. Ostrowska-Maciejewska, Energy-based limit conditions for transversally isotropic solids, *Arch. Mech.*, 54, 497-523, 2002.
17. Von Mises R., *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, ZAMM, 1928, 8, 161-185 (także w: *Selected Papers of Richard von Mises*, v. I, ed. by Ph. Frank et al., American Mathematical Society, Providence, 1963, 251-293).