Zasięg oddziaływania obciążenia samozrównoważonego w materiałach komórkowych

ZASADA DE SAINT VENANTA

Małgorzata Janus-Michalska

Katedra Wytrzymałości Materiałów

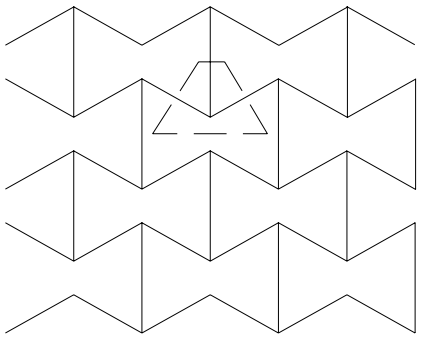
dn. 21.05.2007.

PLAN PREZENTACJI

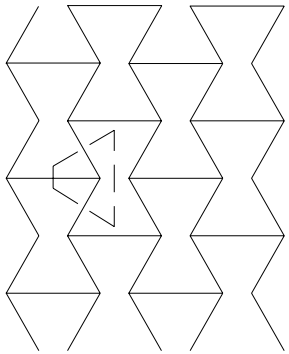
1. Wprowadzenie - zasada de Saint Venanta
2. Energetyczne sformułowanie kryterium wytężenia materiału komórkowego
3. Przykłady
4. Wnioski
5. Literatura

Struktury materiałów komórkowych o płaskim układzie regularnym oraz ich komórki reprezentatywne

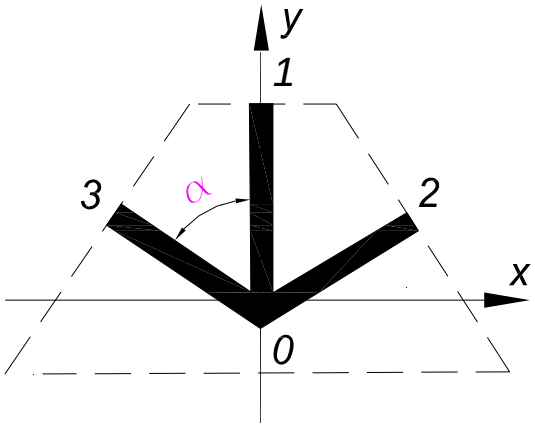
A) struktura ‘reentrant’



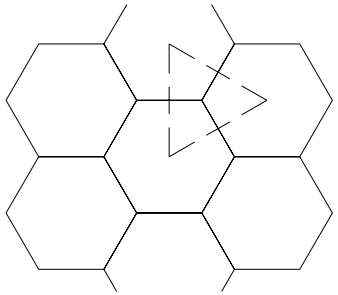
B)



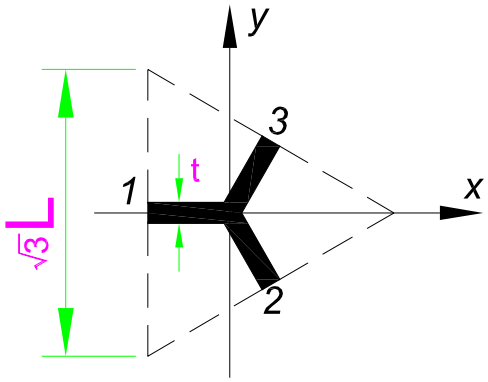
komórka trapezowa



C) struktura sześciokątna ‘honeycomb’



komórka trójkątna



Praca continuum w złożonym stanie naprężeń

$$\boldsymbol{\sigma}^{(M)} = \left(\sigma_x^{(M)}, \sigma_x^{(M)}, \sqrt{2}\sigma_{xy}^{(M)}\right)$$

rozkład dowolnego płaskiego stanu naprężenia na stany własne

$$\boldsymbol{\sigma}^{(M)} = A\ {}^{\mathrm{I}}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{gr}} + B\ {}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{gr}} + C\ {}^{\mathrm{III}}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{gr}}$$

gdzie:

$$A = \frac{\sigma_x^{(M)}\ {}^{\mathrm{II}}\sigma_y^{\mathrm{gr}} - \sigma_y^{(M)}\ {}^{\mathrm{II}}\sigma_x^{\mathrm{gr}}}{{}^{\mathrm{I}}\sigma_x^{\mathrm{gr}}\ {}^{\mathrm{II}}\sigma_y^{\mathrm{gr}} - {}^{\mathrm{II}}\sigma_x^{\mathrm{gr}}\ {}^{\mathrm{I}}\sigma_y^{\mathrm{gr}}} \qquad B = \frac{\sigma_y^{(M)}\ {}^{\mathrm{I}}\sigma_x^{\mathrm{gr}} - \sigma_x^{(M)}\ {}^{\mathrm{I}}\sigma_x^{\mathrm{gr}}}{{}^{\mathrm{I}}\sigma_x^{\mathrm{gr}}\ {}^{\mathrm{II}}\sigma_y^{\mathrm{gr}} - {}^{\mathrm{II}}\sigma_x^{\mathrm{gr}}\ {}^{\mathrm{I}}\sigma_y^{\mathrm{gr}}} \qquad C = \frac{\sigma_{xy}^{(M)}}{{}^{\mathrm{III}}\sigma_{xy}^{\mathrm{gr}}}$$

Współczynnik energetyczny - miara wytężenia materiału

$$\varphi := \sum_{\alpha=1}^{\mathrm{III}} \frac{{}^{\alpha}\Phi_E}{{}^{\alpha}\Phi_E^{\mathrm{gr}}}$$

$$\varphi = A^2 + B^2 + C^2 \leq 1$$

:

$$\varphi = d\left[\left(\sigma_x^{(M)}\right)^2 + \left(\sigma_y^{(M)}\right)^2\right] + e\left(\sigma_{xy}^{(M)}\right)^2 + f\left(\sigma_x^{(M)}\sigma_y^{(M)}\right) \leq 1$$

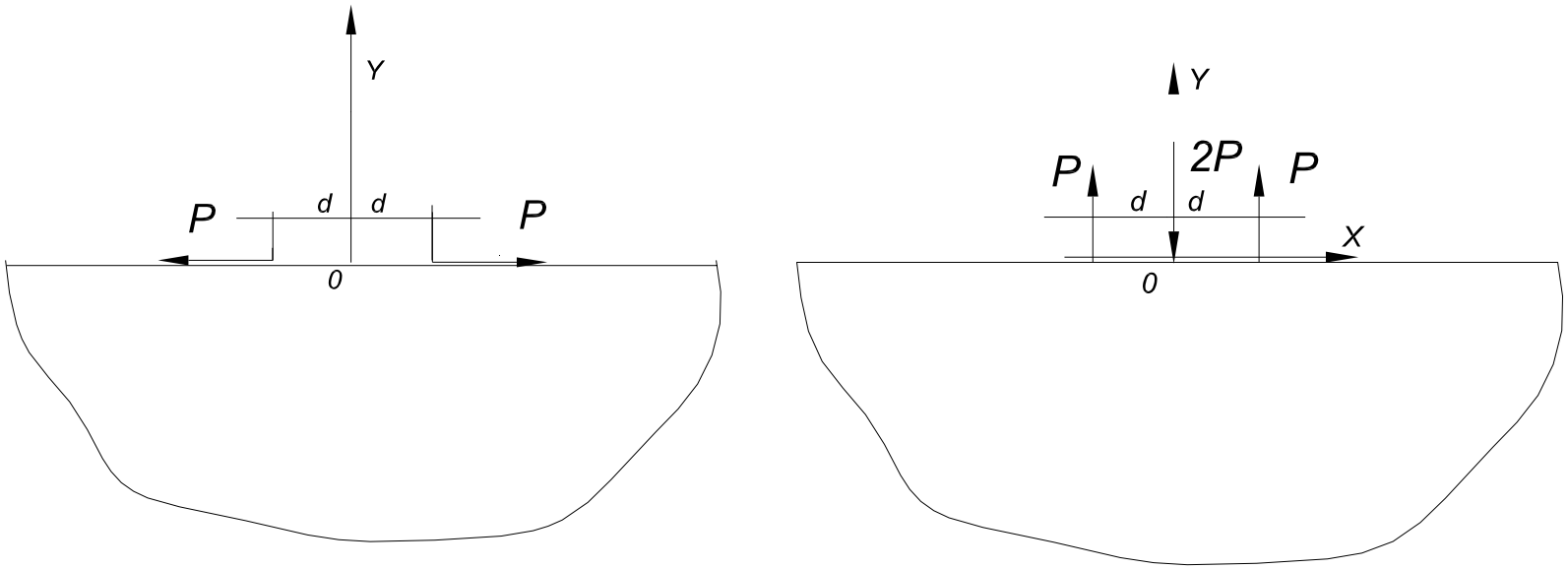
gdzie:

$$d = 0.25\left[\left(\frac{1}{\lambda_1 k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_2 k_2}\right)^2\right], \quad e = 2\left(\frac{1}{\lambda_3 k_3}\right)^2,$$

$$f = 0.5\left[\left(\frac{1}{\lambda_1 k_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_2 k_2}\right)^2\right]$$

- dyskusja doboru proporcji $\sigma_x^{(M)} \big/ \sigma_y^{(M)}$ dla minimalnego wytężenia

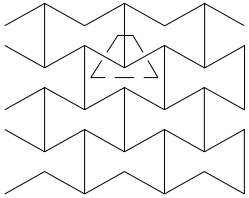
Przykłady

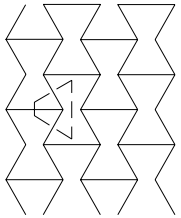


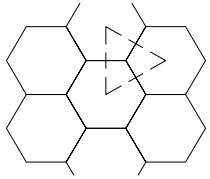
Rys.2. Obciążenie brzegu sprężystej anizotropowej półpłaszczyzny przez:

a) samozrównoważony układ sił stycznych, b) samozrównoważony układ sił normalnych.

Siły dobrane do każdego przypadku materiału i obciążenia , aby wytężenie maksymalne było granicznym (φ=1).
Dane zadania: d =0.2 m, na mapach wytężenia obserwowany obszar 2m*2m.

A) 

B) 

C) 

Typ struktury	Parametry geometryczne szkieletu [mm]	
A), B)	$l_{0\text{-}1} = 1.36$, $l_{0-2} = 1.5$, $l_{0-3} = 1.5$, $t = 0.15$	γ=70°
C)	$l_{0-1} = 0.75$, $l_{0-2} = 0.75$, $l_{0-3} = 0.75$, $t = 0.15$	

parametry materiału szkieletu: $E_s = 10\ GPa$, $\nu_s = 0.3$, $R_e = 100\ MPa$

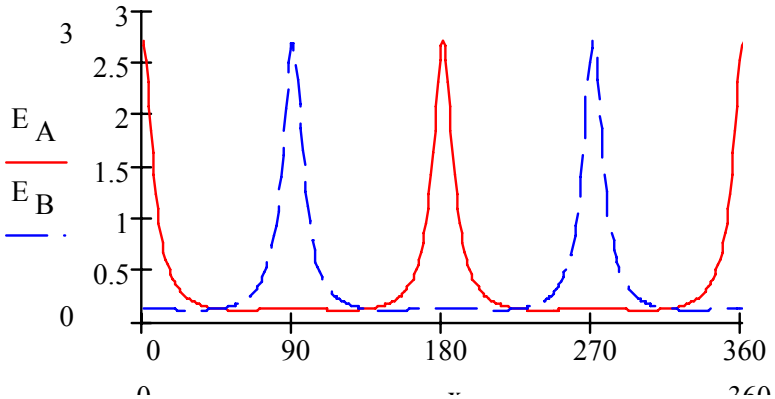
macierze sztywności:

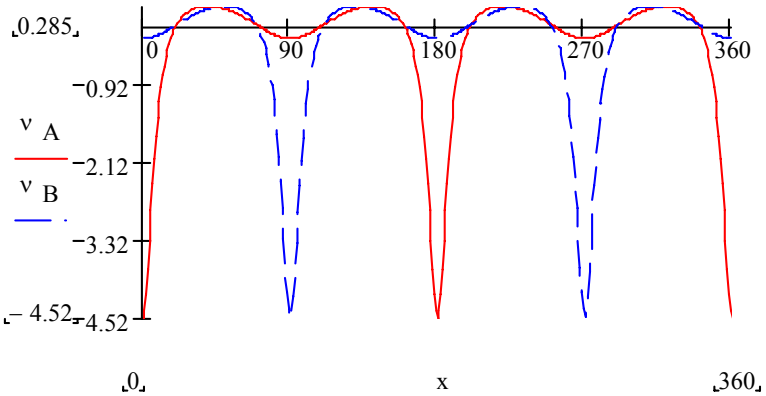
$$\mathbf{S}_{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 91.9865 & -19.7743 & 0 \\ -19.7743 & 4.3792 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1988 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} 4.3792 & -19.7743 & 0 \\ -19.7743 & 91.9865 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1988 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} 294.248 & 283.102 & 0 \\ 283.102 & 294.248 & 0 \\ 0 & 0 & 11.146 \end{bmatrix}$$

Rozkład kierunkowy modułu Younga i współczynnika Poissona

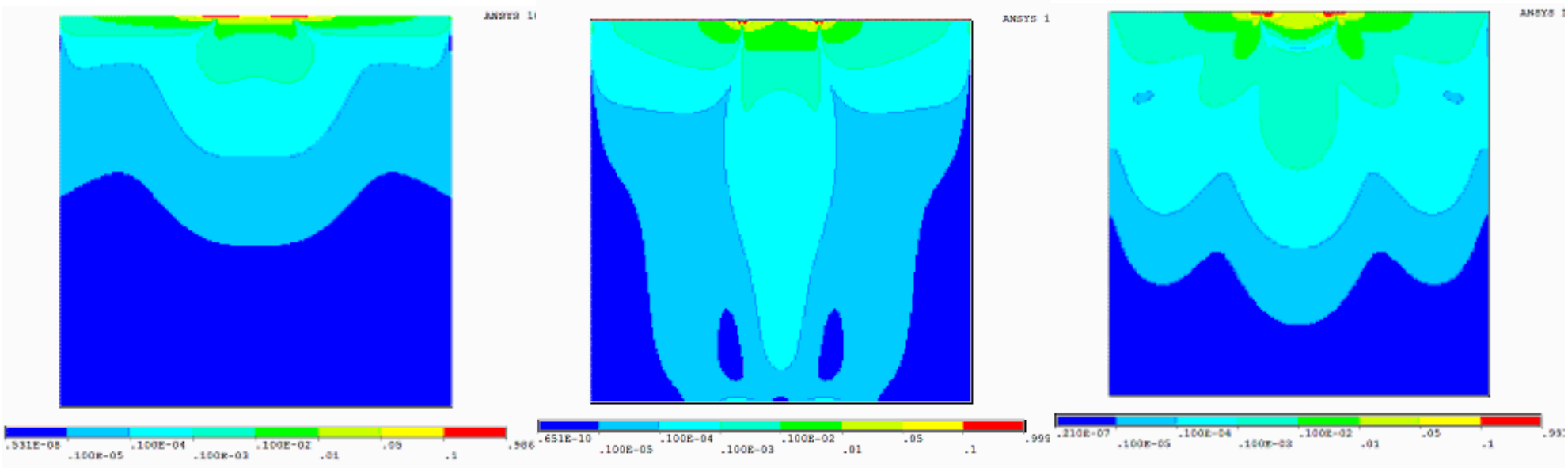
[MPa]





$$E_C = 21.869 \text{ MPa} \qquad \nu_C = 0.962$$

Zadanie a. układ sił poziomych

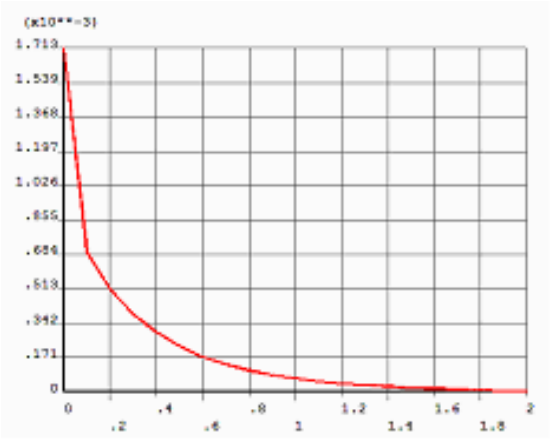


A) B) C)

Rys.4. Graficzny obraz wytężenia materiału

Typ struktury	P_{max} [kN]	v_{max} [m]
A)	0.57	$v(0) = 1.712 * 10^{-3}$
B)	0.2	$v(0) = 5.515 * 10^{-4}$
C)	8.9	$v(0.2) = 2.219 * 10^{-4}$

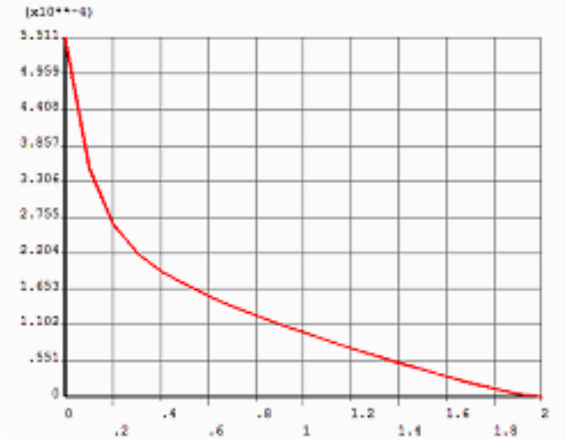
v [m]



odległość od środka układu współrzędnych

A)

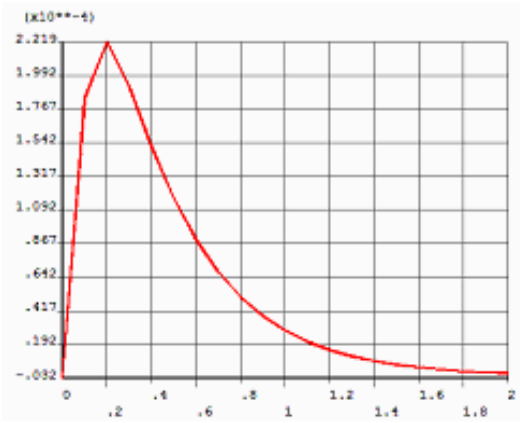
v [m]



odległość od środka układu współrzędnych

B)

v [m]

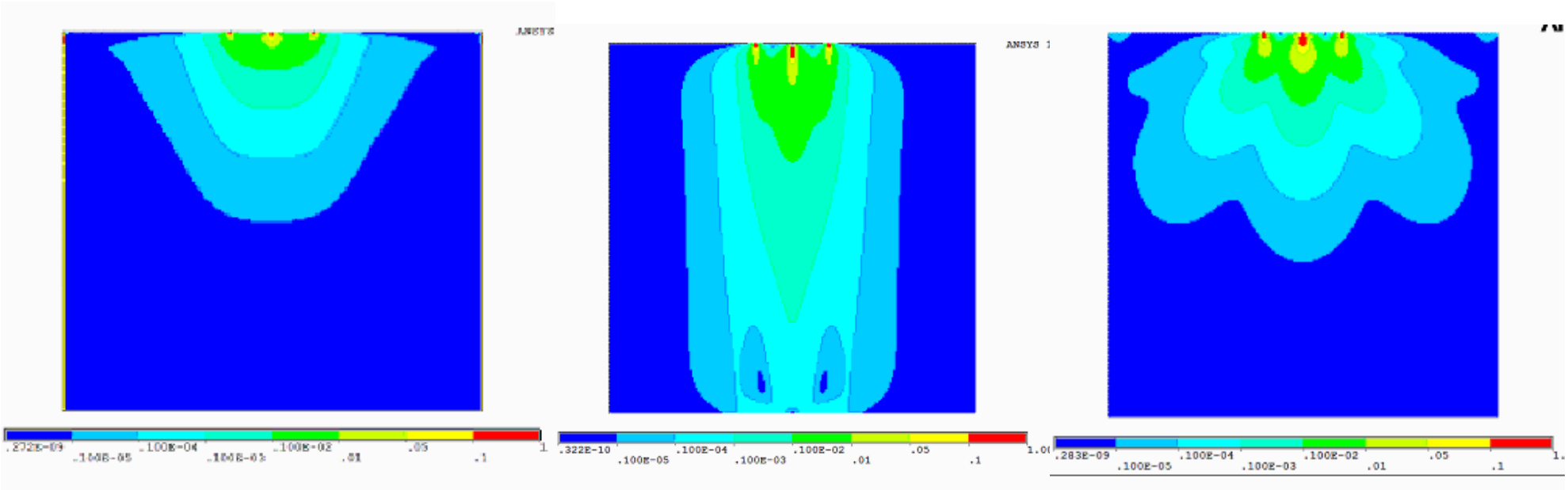


odległość od środka układu współrzędnych

C)

Rys.5. Wykresy przemieszczeń radialnych punktów na osi symetrii Y

Zadanie b. układ sił pionowych

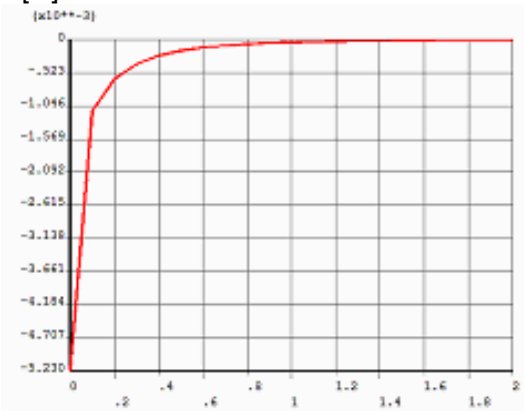


A) B) C)

Rys.6. Graficzny obraz wytężenia materiału

Typ struktury	P_{max} [kN]	v_{max} [m]
A)	0. 084	$v(0) = -5.220 * 10^{-2}$
B)	0.24	$v(0) = -4.241 * 10^{-2}$
C)	5.0	$v(0) = -1.723 * 10^{-3}$

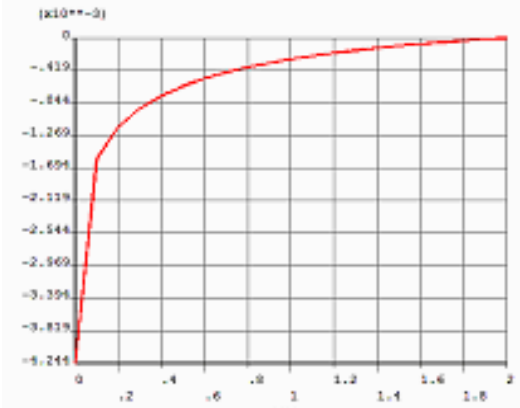
v [m]



odległość od środka układu współrzędnych

A)

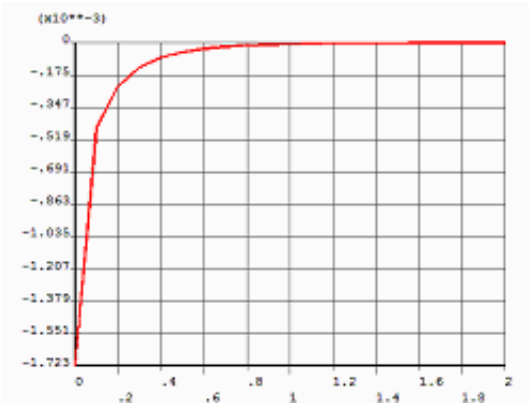
v [m]



odległość od środka układu współrzędnych

B)

v [m]



odległość od środka układu współrzędnych

C)

Rys.7. Wykresy przemieszczeń radialnych punktów na osi symetrii Y

Podsumowanie

- Samozrównoważony układ sił działający w małym obszarze ciała sprężystego powoduje takie pole naprężeń i odkształceń ze gestość energii spreżystej gwałtownie spada z odległoscia od obciążonego obszaru - zasada dobrze się stosuje

- Silna anizotropia materiału - wydłużenie obszarów w kierunkach większej sztywności . Rodzaj anizotropii rzutuje na złożoność konturu

- Dla ciał anizotropowych obserwuje się wolniejszy spadek energii w kierunkach o wiekszym module Younga (tworzy się ‘kanał energii’). Efekt wolniejszego spadku jest także widoczny na radialnym polu przemieszczeń.

Literatura

[1] L.J. Gibson, M.F. Ashby *Cellular Solids*, 2nd edition Cambridge University Press. (1997).

[2] S. Nemat-Naser, M.Hori, *Micromechanics,*. 2nd edition Elsevier (1999).

[3] Janus-Michalska M., Energy Based Approach Constructing Elastic Model of Re-entrant Cellular Materials, submitted

[4] Janus-Michalska M., 2005. Effective Models Describing Elastic Behaviour of Cellular Materials, *Archives of Metallurgy and Materials,* vol.50, issue 3,pp.595-608, 2005.

[5] M, Janus-Michalska , R.B. Pęcherski, Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling, Technische Mechanik, Band 23, Heft 2-4, (2003).

[6] Kordzikowski P., Janus-Michalska M., R.B.Pęcherski R.B., Specification of Energy –Based Criterion of Elastic Limit States for Cellular Materials, *Archives of Metallurgy and Materials,* vol.50, issue 3, pp. 621-634, 2005.

[7] Lakes, R.S., Design considerations for materials with negative Poisson's ratios, *Trans. ASME J. Mech.* 115, pp. 696–700, 1993.

[8] Lakes R.S., Saint Venant effects for materials with negative Poisson's ratios, *J. Apllied Mechanics*, 59, 744-746, (1992).

[9] Overaker D.W., Cuitino A.M., Langrana N.A., Elastoplastic Micromechanical Modeling of Two- dimensional Irregular Convex and Nonconvex (Re-entrant) Hexagonal Foams, Transactions of ASME, 65, 1998.

[10] Smith C.W., Grima J.N., K.E. Evans, A Novel Mechanism for Generating Auxetic Behaviour in Reticulated Foams : Missing Rib Foam Model, *Acta Materialia*, 48, 4349-4356, (2000).

[11] Lakes.R.S., Experimental Micromechanics Method for Conventional and Negative Poisson's Ratio Cellular Solids as Cosserat Continua, J.Eng. Mat.& Techn.,113,pp.148-155, (1992).

[12] Horgan C.O., J.K.Knowles, Recent developments concerning Saint-Venant's Principle,Adv.Appl.Mech.,23,pp179-267,(1983).

[13] Stronge W.J., M.Kashtalyan, Saint-Venant's principle for two-dimensional anisotropic elasticity, Acta Mechanica, 124, pp.213-218, (1997).

[14] Everstine G., A.C.Pipkin, Stress channeling in transversely isotropic composites, ZAMP 22, pp.825-834 (1971).

[15] Maltemilola S.A, W.J.Stronge, D.Durban, Diffusion rate for stress in orthotropic materials, ASME J.Appl.Mech.62, pp.654-661, (1995).

[16] Y.Arimitsu, K.Nishioka, T.Senda, A Study of Saint-Venant's principle for composite materials by means of internal stress field, ASME, J. Appl. Mech., 62,pp.53-58 (1995).

[17] S.Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, 2nd Edn, McGraw Hill, New York (1956)

[18] R.A.Toupin , Saint Venant's Principle, Arch.Mech.Anal., pp.83-96, (1965).