

DR MAŁGORZATA JANUS-MICHALSKA, INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI, WYDZIAŁ
INŻYNIERII ŁĄDOWEJ, POLITECHNIKA KRAKOWSKA

ZASIĘG OBCIĄŻENIA SAMOZRÓWNOWAŻONEGO W MATERIAŁACH KOMÓRKOWYCH O UJEMNYM WSPÓŁCZYNNIKU POISSONA

1. Wstęp

Materiały komórkowe to grupa nowoczesnych materiałów o własnościach innych niż własności materiału tworzącego szkielet wewnętrzny. Własności te można modelować przez odpowiedni dobór parametrów geometrycznych struktury oraz parametrów charakteryzujących materiał szkieletu. W tej grupie można wyróżnić materiały o ujemnym współczynniku Poissona tzw. 'auxetic materials'. Charakteryzują się one rozszerzalnością w kierunku prostopadłym do zadanego kierunku rozciągania. Efekt taki różny dla różnych kierunków rozciągania względem układu struktury wewnętrznej można uzyskać kształtując ściany szkieletu w postaci wielokątów wklęsłych. Prowadzi to do uzyskania materiału anizotropowego, którego własności mechaniczne w zakresie sprężystym opisywane są przez tensor sztywności. Ujemny współczynnik Poissona to jedna z własności tych materiałów. Do innych zaliczamy dużą podatność na odkształcenie objętościowe w porównaniu z podatnością na odkształcenia postaciowe, stąd spotykana nazwa 'materiały dylatacyjne'. Ponadto te materiały komórkowe charakteryzują się większą deformowalnością w zakresie sprężystym i znacznie mniejszą sztywnością niż materiały komórkowe o tej samej gęstości względnej lecz topologii szkieletu tworzącej wielokąt wypukły. Z tych cech mechanicznych wynikają możliwości zastosowania.

Wytwarzaniem materiałów komórkowych, w tym również tych o ujemnym współczynniku Poissona jak i doświadczalnymi badaniami zajmuje się zespół Lakesa [7]. Towarzyszą temu liczne prace teoretyczne powstające od lat 80-tych ubiegłego stulecia dotyczące pracy struktury wewnętrznej materiału. Najwcześniejsze prace Gibson i Ashby'ego [1] zawierają dla materiałów komórkowych o ujemnym współczynniku Poissona dość zgrubny model, dla którego cechy mechaniczne są przybliżone i znacznie odbiegają od wyników eksperymentalnych [11]. Powstały nowsze prace dotyczące modelowania [9,10], oraz oparte na teorii ośrodka Cosseratów [11], których opis jest zgodny z wynikami doświadczalnymi. Do najczęściej stosowanych metod obliczeniowych stosowanych do ośrodków niejednorodnych w tym i materiałów komórkowych zalicza się metodę

homogenizacji. Opracowania te, mimo iż stanowią wyczerpujące podstawy teoretyczne i obliczeniowe często gubią bezpośrednią możliwość wskazania parametrów struktury wewnętrznej i materiału konstruującego szkielet, tak aby otrzymać materiał o z góry zadanych własnościach.

Niniejszy artykuł jest kontynuacją serii opracowań dotyczących modelowania mikromechanicznego w materiałach komórkowych [3,4,5,6]. Jedną z istotnych zalet opisywanego podejścia jest wskazanie zależności własności ekwiwalentnego continuum jakim jest materiał komórkowy na poziomie makroskopowym od topologii struktury wewnętrznej. Ponadto równoczesne przeprowadzenie analizy stanu naprężeń i odkształceń w dwóch skalach: continuum zastępczego i elementów strukturalnych szkieletu umożliwia określenie granicznych naprężeń i odkształceń sprężystych metodą stanów granicznych w szkielecie [5,6]. Zastosowanie kryterium energetycznego sformułowanego dla ciał anizotropowych pozwala sformułować hipotezę wyężenia dla materiału komórkowego. Należy podkreślić, że wszystkie cechy mechaniczne dotyczące continuum są wyprowadzane ‘ab initio’ tzn. z pierwszych zasad dotyczących oddziaływań w strukturze wewnętrznej materiału. Dla materiałów komórkowych o ujemnym współczynniku Poissona macierz sztywności otrzymano przez uśrednianie potencjału sprężystego [3], a hipotezę wyężeniową przez rozdział energii sprężystej na stany własne tensora sztywności. Ponadto przeprowadzono analizę rozkładu wybranych modułów sztywności w zależności od parametrów mikrostruktury.

Celem niniejszej pracy jest zastosowanie wyników wcześniejszych prac we wskazanych dwóch skalach mająca na celu pokazanie pracy materiału i opis jego wyężenia w złożonych stanach naprężeń i porównanie z innymi materiałami. Dla inżynierskich zastosowań niezwykle ważna jest odpowiedź, czy dla zadanej klasy zagadnień brzegowych ma zastosowanie zasada de Saint Venanta. Niniejsza praca ma na celu zbadanie rozkładu gęstości energii sprężystej i analizę pola przemieszczeń dla dwóch typowych przypadków obciążenia samorzównoważonego przyłożonego na brzegu anizotropowej półpłaszczyzny.

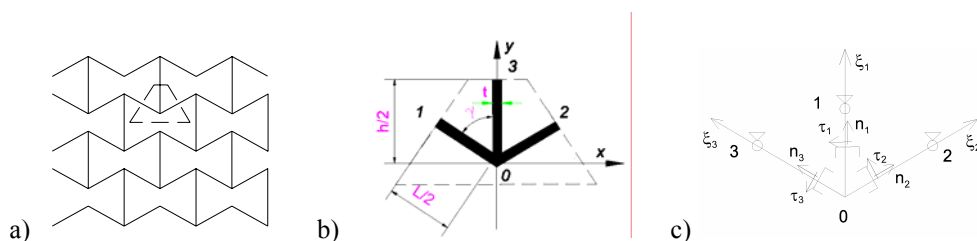
2. Zasada de Saint Venanta

Zasada Saint Venanta pozwala zastępować układ rzeczywistych obciążeń statycznie równoważnym układem obciążeń, takim dla którego znane jest rozwiązanie problemu brzegowego statyki. W szczególności, gdy mamy do czynienia ze samorzównoważonym układem sił, powstałe pole naprężeń i odkształceń nie powinno propagować się daleko od strefy przyłożenia obciążenia. Znane w literaturze rozwiązania dla pewnych zagadnień brzegowych wskazują na duży spadek gęstości energii wraz z oddalaniem się od obciążonego brzegu i dla takich przyjmuje się stosowalność zasady Saint Venanta. Nawet dla typowych ciał izotropowych można podać takie zagadnienia, gdzie zasada ta się nie stosuje (np. pręty cienkościenne). Dla ciał anizotropowych znane są przypadki problemów brzegowych, gdzie o stosowalności zasady decyduje materiał. Przykładem są kompozyty dla których zasada de Saint Venanta nie stosuje się [14,16]. W ciałach anizotropowych

obserwuje się ponadto wpływ własności anizotropowych na pola przemieszczeń i naprężeń a tym samym na rozkład energii sprężystej [13]. Dla materiałów charakteryzujących się silną anizotropią między innymi przejawiającą się w znacznym zróżnicowaniu wartości modułu Younga na wybranych kierunkach zmienność pola odkształceń i naprężeń może okazać się niewystarczająca do wnioskowania na temat stosowalności zasady. Jediną poprawną miarą może być wtedy gęstość energii i jej rozkład. Pokazane poniżej przykłady mają na celu wskazanie tych rozkładów dla komórkowych materiałów o ujemnym współczynniku Poissona (charakteryzujących się silną anizotropią). Z rozkładów energii można wywnioskować czy zasada de Saint Venanta stosuje się do materiałów komórkowych powyższego typu.

3. Model mikromechaniczny materiałów komórkowych o ujemnym współczynniku Poissona

Do rozważań przyjęto materiał komórkowy o szkielecie modelowanym przez płaską strukturę belkową połączoną w sztywnych węzłach, tworzącą układ wielokątów wklęsłych rys.1a. Analiza może się również odnosić do struktury przestrzennej (o ścianach komórkowych w powyższym układzie) pracującej w płaskich stanach. Modelowanie mikromechaniczne [2] opiera się na analizie reprezentatywnej komórki, na podstawie której wyprowadzone są wszystkie własności continuum materialnego dla rozważanego materiału komórkowego. Dla podanej struktury komórka ta wraz ze schematem statycznym służącym do obliczania sił w szkielecie jest pokazana na rys.1b.i 1c.



Rys. 1.a. struktura materiału komórkowego, b. komórka reprezentatywna, c.schemat statyczny szkieletu belkowego

Fig. 1a. cellular structure b. representative unit cell, c. part of a skeleton with stiff node 0 and local beam system of coordinates.

Komórkę reprezentatywną opisują: geometryczne parametry mikrostruktury: l_{0-i} -długości elementów belkowych dla $i=1,2,3$, t -szerokość przekroju belek, γ -kat (rys.1b.);

4

materiałowe parametry mikrostruktury: E_s - moduł Younga, ν_s - współczynnik Poissona, R_e - granica plastyczności dla materiału szkieletu.

Modelem mechanicznym struktury szkieletu materiału komórkowego jest belka Timoshenki. Dla materiałów o małej gęstości względnej, charakteryzujących się dużą smukłością elementów strukturalnych wystarczające jest modelowanie za pomocą belki Bernoulliego-Eulera. Dzięki zastosowaniu modelu belkowego dla dowolnej deformacji w zakresie liniowo sprężystym komórki reprezentatywnej opisanej tensorem odkształceń można wyznaczyć rozkład sił wewnętrznych w belkach szkieletu. Rozwiązanie to uzyskano przez zastosowanie MES-programu ANSYS.

Continuum zastępcze definiuje się poprzez ekwiwalentność potencjału sprężystego. Potencjał zgromadzony w szkielecie belkowym wyraża się następującym wzorem:

$$U = \int_{V_s} ({}^s\Phi_E) dV_s = \sum_{i=1}^3 \left(\int_0^{l_i} \frac{(F_m(\xi_i))^2}{2E_s A} d\xi_i + \mu \int_0^{l_i} \frac{(F_{ir}(\xi_i))^2}{2G_s A} d\xi_i + \int_0^{l_i} \frac{(M_i(\xi_i))^2}{2E_s J} d\xi_i \right) \quad (1)$$

gdzie:

$F_m(\xi_i), F_{ir}(\xi_i), M_i(\xi_i), i = 1, 2, 3$ - funkcje sił przekrojowych (podłużnych, poprzecznych i momentu zginającego) dla belek szkieletu

A, J - pole i moment bezwładności przekroju belkowego

μ - energetyczny współczynnik ścinania (dla przekroju prostokątnego $\mu = 1.2$).

Gęstość energii dla continuum zastępczego odpowiada uśrednieniu po objętości komórki reprezentatywnej potencjału sprężystego zgromadzonego w szkielecie belkowym:

$$\Phi_E = \frac{1}{V} \int_{V_s} ({}^s\Phi_E) dV_s \quad (2)$$

3.1. Macierz sztywności materiału komórkowego

Powyższa idea uśredniania potencjału sprężystego stała się podstawą konstruowania macierzy sztywności ekwiwalentnego continuum. Szczegółowy algorytm prowadzący do jej numerycznego otrzymania oraz analiza własności sprężystych materiału w zależności od parametrów mikrostrukturalnych zostały przedstawione w pracy [3].

Dla podanej struktury składowe macierzy sztywności wyrazić można przez siły przekrojowe w strukturze następującym wzorem [3]:

$$S_{IJ} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{l_i}{E_s A} {}^i\tilde{F}_m {}^j\tilde{F}_m + \left(\frac{\mu l_i}{G_s A} + \frac{l_i^3}{3E_s J} \right) {}^i\tilde{F}_{ir} {}^j\tilde{F}_{ir} \right\} \quad (3)$$

gdzie ${}^i\tilde{F}_m, {}^i\tilde{F}_{ir}$ siły w szkielecie od odkształceń jednostkowych ${}^i\tilde{\varepsilon}$ w I-tym stanie. Stany jednoosiowych rozciągnięć ${}^1\varepsilon, {}^2\varepsilon$, wywołują symetryczne rozkłady sił, stan czystego

ścianania ${}^3\varepsilon$ wywołuje antysymetryczny rozkład. Stąd wyrazy macierzy sztywności S_{13}, S_{23} są zerowe. Macierz sztywności w opisie Kelvina dla płaskiej struktury o rozważanym typie symetrii ma postać jak przedstawiono poniżej:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Powyżej zastosowano opis Kelvina dla którego tensor sztywności ma reprezentację macierzową S_{IJ} , a stany odkształcenia i naprężenia reprezentują wektory o składowych:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \sqrt{2}\varepsilon_{xy}) = ({}^1\varepsilon, {}^2\varepsilon, {}^3\varepsilon), \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sqrt{2}\sigma_{xy}) = ({}^1\sigma, {}^2\sigma, {}^3\sigma). \quad (5)$$

Dla podanej macierzy wyznacza się moduły Kelvina λ_α - które są wartościami własnymi macierzy sztywności oraz stany własne wyrażone przez odkształcenia ${}^\alpha\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$. $\alpha=I,II,III$. Macierz sztywności jest również podstawą do otrzymania modułów sprężystych, w szczególności modułu Younga $E(\mathbf{n})$ w na danym kierunku \mathbf{n} i współczynnika Poissona $\nu(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ jak zdefiniowano poniżej:

$$\frac{1}{E(\mathbf{n})} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad \frac{-\nu(\mathbf{n}, \mathbf{m})}{E(\mathbf{n})} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \quad (6)$$

gdzie: \mathbf{C} macierz podatności $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}$, \mathbf{n}, \mathbf{m} kierunki prostopadłe.

3.2. Naprężenia w dwóch skalach

Rozkład sił w strukturze wewnętrznej powoduje powstanie pola naprężeń obserwowalnych w dwóch skalach. Równanie konstytutywne dla continuum efektywnego zapisane jest relacją:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (7)$$

W szkielecie belkowym zgodnie z teorią belek powstają naprężenia $\boldsymbol{\sigma}^s$. Warunek graniczny liniowej sprężystości dla elementów szkieletu dla dowolnego stanu odkształceń continuum, a w szczególności dla stanu własnego α zapisany jest poniżej:

$$\max_i ({}^\alpha\sigma_x^s) = \max_i \left(\left| \frac{{}^\alpha\tilde{F}_m}{A} \right| + \left| \frac{{}^\alpha\tilde{F}_t I_i}{J} \right| \right) = k_\alpha {}^\alpha\tilde{\sigma}_x^s = R_e, \quad \alpha = I, II, III \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

gdzie k_α jest skalarnym mnożnikiem stanu jednostkowego.

Odpowiada to zastosowaniu energetycznego kryterium Hubera Misesa Henckiego dla najbardziej wyężonego punktu materiału szkieletu, który znajduje się we włóknach skrajnych przywęzłowego przekroju jednej z belek szkieletu komórki reprezentatywnej.

Numeryczne wyznaczenie tego mnożnika prowadzi do określenia granicznych odkształceń i naprężeń continuum w kolejnych stanach własnych: ${}^\alpha\boldsymbol{\varepsilon}^{gr} = k_\alpha {}^\alpha\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, ${}^\alpha\boldsymbol{\sigma}^{gr} = \lambda_\alpha {}^\alpha\boldsymbol{\varepsilon}^{gr}$ $\alpha = I, II, III$.

3.3 Kryterium energetyczne

Jako hipotezę wyężeniową dla materiału komórkowego jako ciała anizotropowego przyjęto energetyczne kryterium zaproponowane przez Rychlewskiego dla dowolnych ciał anizotropowych w postaci energii ważonych zgromadzonych w stanach własnych tensora sztywności:

$$\sum_{\alpha=1}^{\text{III}} \frac{{}^{\alpha}\Phi_E}{{}^{\alpha}\Phi_E^{\text{gr}}} = 1 \quad (9)$$

Energie krytyczne będące wagami wyznacza się ze wzoru:

$${}^{\alpha}\Phi_E^{\text{gr}} = \frac{1}{2} \lambda_{\alpha} k_{\alpha}^2 {}^{\alpha}\boldsymbol{\varepsilon}^2 \quad (10)$$

To podejście zastosowano dla pian izotropowych [5], materiałów o różnych regularnych strukturach przestrzennych [6] oraz dla powyższej struktury w pracy [3].

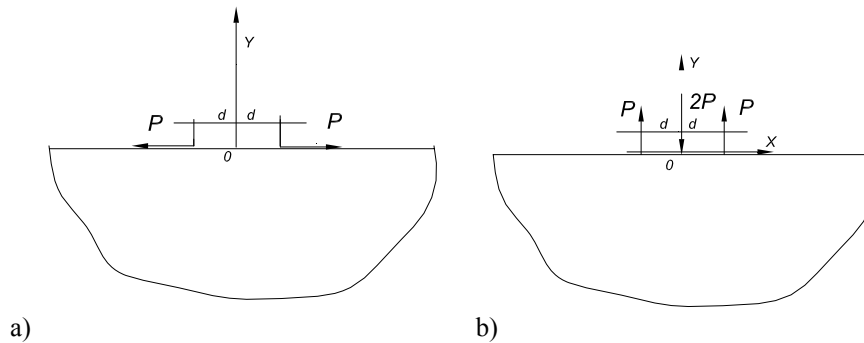
Dla dowolnego stanu sprężystego można wprowadzić energetyczny współczynnik, który jest tu obraną miarą wyężenia materiału :

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{\text{III}} \frac{{}^{\alpha}\Phi_E}{{}^{\alpha}\Phi_E^{\text{gr}}} \quad (11)$$

Należy zaznaczyć, że podana analiza zagadnienia płaskiego dotyczyć może zadania w płaskim stanie naprężen lub zadania w płaskim stanie odkształcen. Obydwa te stany dają zerowanie się energii od składowych tensora naprężen i odkształcen spoza płaszczyzny.

4. Przykłady

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla dwóch typów obciążenia brzegu anizotropowej półpłaszczyzny, które przedstawione są na rysunku 2.

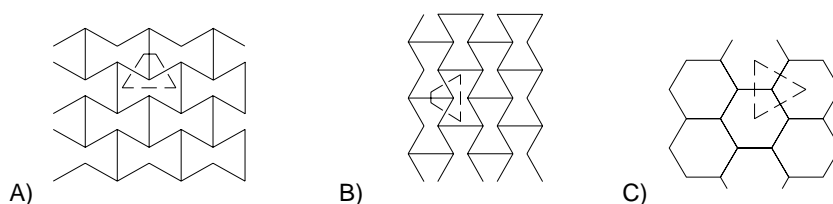


Rys.2. Obciążenie brzegu sprężystej anizotropowej półpłaszczyzny a) samozrównoważony układ sił stycznych, b) samozrównoważony układ sił normalnych.

Fig.2. Selfequilibrated load applied to anisotropic halfplane a) tangent load, b) normal load.

Wartości sił P dobrano do każdego przypadku materiału i typu obciążenia, tak aby wyężenie maksymalne było granicznym ($\varphi=1$). Na mapach wyężenia obserwowany jest obszar kwadratowy o wymiarach: $2m*2m$. Przyjęto wartość parametru opisującego rozstaw sił: $d=0.2$ m.

Rozważane są materiały komórkowe przedstawione na rysunku 3.



Rys.3. Wybrane materiały komórkowe: materiał o ujemnym współczynniku Poissona A) układ poziomy struktury, B) układ pionowy struktury, C) materiał izotropowy o strukturze plastra miodu .

Fig.3. Chosen material structures: auxetic material A) horizontal pattern, B) vertical pattern, C) isotropic material with honeycomb structure.

Przyjęto materiału szkieletu o następujących parametrach: $E_s = 10$ GPa , $\nu_s = 0.3$, $R_e = 100$ MPa .

Dane geometryczne poszczególnych mikrostruktur podano w Tablicy 1. Parametry te dobrano w taki sposób, aby otrzymane materiały komórkowe o tej samej gęstości względnej.

Tablica 1

Specyfikacja struktury materiału komórkowego

Typ struktury	Parametry geometryczne szkieletu [mm]	
A), B)	$l_{0-1} = 1.36$, $l_{0-2} = 1.5$, $l_{0-3} = 1.5$, $t = 0.15$	$\gamma = 70^\circ$
C)	$l_{0-1} = 0.75$, $l_{0-2} = 0.75$, $l_{0-3} = 0.75$, $t = 0.15$	

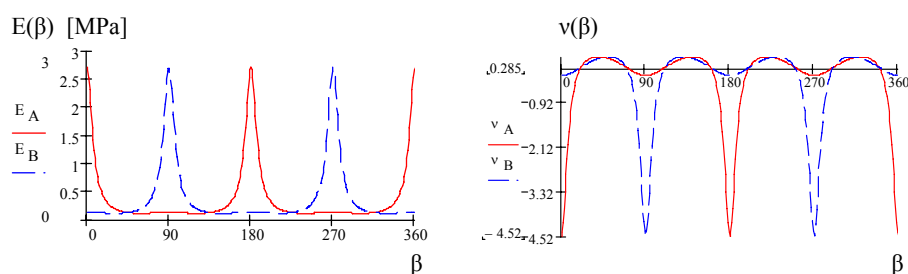
Dla materiałów o zadanych mikrostrukturach otrzymano następujące macierze sztywności:

$$S_A = \begin{bmatrix} 91.9865 & -19.7743 & 0 \\ -19.7743 & 4.3792 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1988 \end{bmatrix} \text{MPa} \quad S_B = \begin{bmatrix} 4.3792 & -19.7743 & 0 \\ -19.7743 & 91.9865 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1988 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

8

$$S_c = \begin{bmatrix} 294.248 & 283.102 & 0 \\ 283.102 & 294.248 & 0 \\ 0 & 0 & 11.146 \end{bmatrix} \text{MPa.}$$

Na rysunku 3. pokazano rozkłady kierunkowe modułu Younga i współczynnika Poissona dla materiałów A) i B). Kąt β określa kierunek rozciągania względem osi x zdefiniowanej jak na rys. 1.



Rys.4. Wykres zależności modułu Younga i współczynnika Poissona w zależności od kierunku rozciągania względem układu lokalnego struktury materiału komórkowego.

Fig.4. Dependence of Young modulus and Poissons ratio on tension direction.

Dla struktury C) stałe wartości modułu Younga i współczynnika Poissona dla podanych parametrów mikrostruktury wynoszą: $E_c = 21.869 \text{ MPa}$, $\nu_c = 0.962$.

Należy podkreślić, iż struktury A) i B) charakteryzują się bardzo małą sztywnością, stąd nośność w zakresie sprężystym jest dużo mniejsza w porównaniu z nośnością materiałów o innych strukturach wewnętrznych.

Wyniki obliczeń numerycznych wykonanych przy pomocy programu MES (ANSYS) przedstawiono w postaci map wyężenia materiału oraz wykresów przemieszczeń radialnych punktów na osi symetrii Y podanych jako funkcje odległości od początku układu współrzędnych $v(r)$ (rys.3). Wartości sił P wywołujących w materiałach maksymalne wyężenie w zakresie sprężystym oraz wartości maksymalnych przemieszczeń w materiale podano w tablicach 2 pod mapami wyężenia.

Zadanie a. układ sił poziomych

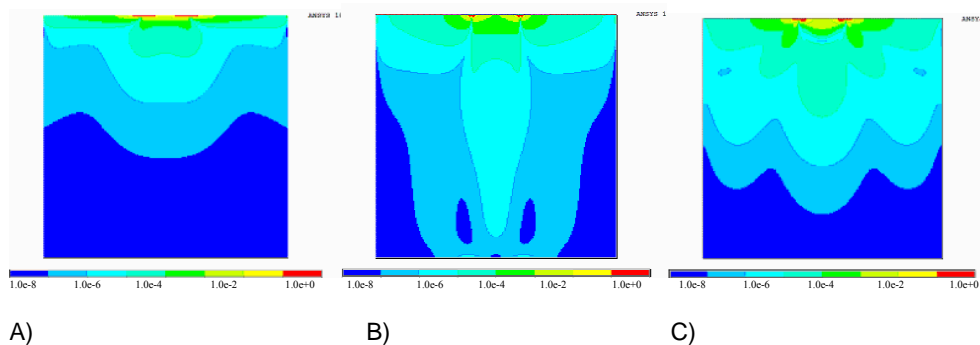
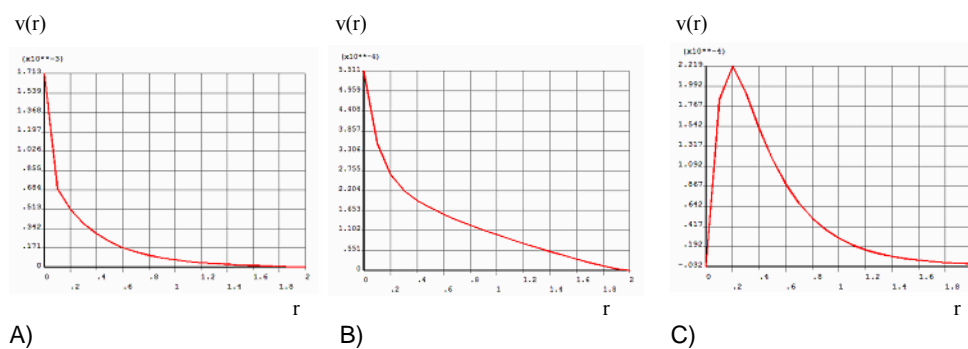
Rys.5. Graficzny obraz wyteżenia w materiale (rozkład współczynnika ϕ).

Fig.5. Distribution of material effort coefficient

Tablica 2 a

Nośność sprężysta materiału i maksymalne przemieszczenie.

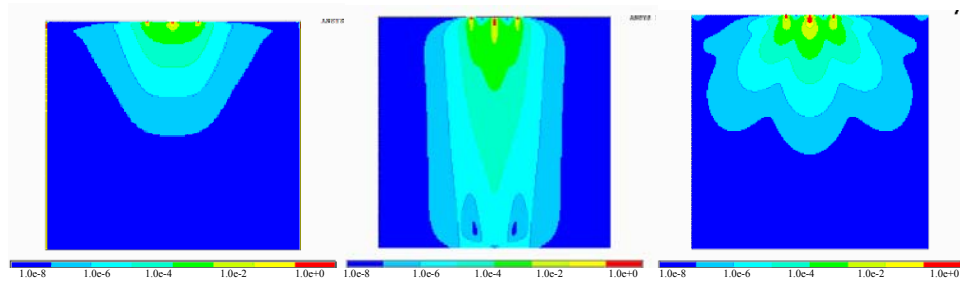
Typ struktury	P_{\max} [kN]	v_{\max} [m]
A)	0.57	$v(0) = -1.712 \cdot 10^{-3}$
B)	0.2	$v(0) = -5.515 \cdot 10^{-4}$
C)	8.9	$v(0.2) = -2.219 \cdot 10^{-4}$



Rys.6. Wykresy przemieszczeń radialnych punktów na osi symetrii Y

Fig.6. Radial displacements for symmetry axis Y.

Zadanie b. układ sił pionowych



A)

B)

C)

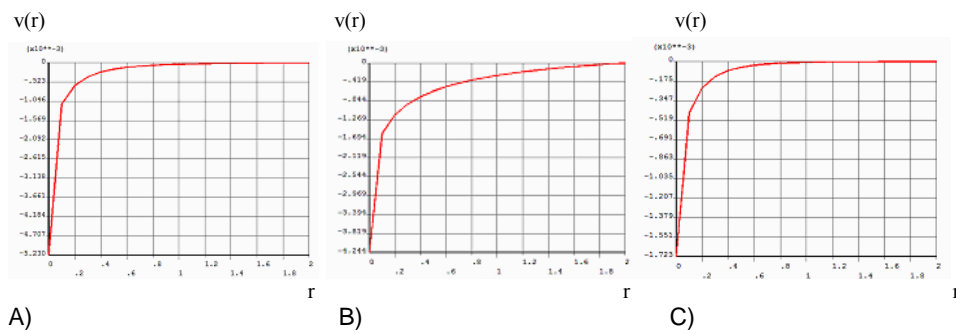
Rys.7. Graficzny obraz wyężenia w materiale (rozkład współczynnika ϕ).

Fig.7. Distribution of material effort coefficient

Tablica 2 b

Nośność sprężysta materiału i maksymalne przemieszczenie.

Typ struktury	P_{\max} [kN]	v_{\max} [m]
A)	0.084	$v(0) = 5.220 \cdot 10^{-2}$
B)	0.24	$v(0) = 4.241 \cdot 10^{-2}$
C)	5.0	$v(0) = 1.723 \cdot 10^{-3}$



A)

B)

C)

Rys.8. Wykresy przemieszczeń radialnych punktów na osi symetrii Y

Fig.8. Radial displacements for symmetry axis Y.

Analiza map wyężenia przedstawionych na rysunku 4 wskazuje na szybki spadek gęstości energii w obserwowanym obszarze ($\varphi_{\max} = 1$, φ_{\min} rzędu $1 \cdot 10^{-10}$). Wolniejszy spadek energii obserwuje się w kierunkach o większym module Younga. Efekt wolniejszego spadku w tych kierunkach jest także widoczny na radialnym polu przemieszczeń.

5. WNIOSKI

Samozrównoważony układ sił działający w małym obszarze anizotropowego komórkowego ciała sprężystego powoduje powstanie takiego pola naprężeń i odkształceń, że gęstość energii sprężystej gwałtownie spada z odległości od obciążonego obszaru, stąd wniosek o dobrej stosowalności zasady de Saint Venanta dla ciał komórkowych. Dla materiałów o ujemnym współczynniku Poissona jako wynik silnej anizotropii następuje wydłużenie obszarów o większym wyężeniu w kierunkach większej sztywności. Rodzaj anizotropii rzutuje na złożoność konturu tego obszaru.

Powyższe wnioski są istotne dla numerycznego modelowania zadań z udziałem anizotropowych ciał komórkowych.

Literatura

- [1] Gibson L.J., Ashby M.F.: *Cellular Solids*, 2nd edition Cambridge University Press, 1997.
- [2] Nemat-Naser S., Hori M.: *Micromechanics*, 2nd edition Elsevier, 1999.
- [3] Janus-Michalska M.: *Micromechanical Model of Auxetic Cellular Materials*, praca w recenzji w redakcji Archives of Metallurgy and Materials.
- [4] Janus-Michalska M.: Effective Models Describing Elastic Behaviour of Cellular Materials, *Archives of Metallurgy and Materials*, vol.50, issue 3, pp.595-608, 2005.
- [5] Janus-Michalska M., Pęcherski R.B.: Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling, *Technische Mechanik*, Band 23, Heft 2-4, 2003.
- [6] Korczakowski P., Janus-Michalska M., Pęcherski R.B.: Specification of Energy-Based Criterion of Elastic Limit States for Cellular Materials, *Archives of Metallurgy and Materials*, vol.50, issue 3, pp. 621-634, 2005.
- [7] Lakes R.S.: Design considerations for materials with negative Poisson's ratios, *Trans. ASME J. Mech.* 115, pp. 696–700, 1993.
- [8] Lakes R.S.: Saint Venant effects for materials with negative Poisson's ratios, *J. Applied Mechanics*, 59, 744-746, 1992.
- [9] Overaker D.W., Cuitino A.M., Langrana N.A.: Elastoplastic Micromechanical Modeling of Two-dimensional Irregular Convex and Nonconvex (Re-entrant) Hexagonal Foams, *Transactions of ASME*, 65, 1998.
- [10] Smith C.W., Grima J.N., Evans K.E.: A Novel Mechanism for Generating Auxetic Behaviour in Reticulated Foams : Missing Rib Foam Model, *Acta Materialia*, 48, pp.4349-4356, 2000.

- [11] Lakes R.S.: Experimental Micromechanics Method for Conventional and Negative Poisson's Ratio Cellular Solids as Cosserat Continua, *J.Eng. Mat. & Techn.*, 113, pp.148-155, 1992.
- [12] Horgan C.O., Knowles J.K.: Recent developments concerning Saint-Venant's Principle, *Adv. Appl. Mech.*, 23, pp.179-267, 1983.
- [13] Stronge W.J., Kashalyan M.: Saint-Venant's principle for two-dimensional anisotropic elasticity, *Acta Mechanica*, 124, pp.213-218, 1997.
- [14] Everstine G., Pipkin A.C.: Stress channeling in transversely isotropic composites, *ZAMP* 22, pp.825-834, 1971.
- [15] Maltemilola S.A, Stronge W.J., Durban D.: Diffusion rate for stress in orthotropic materials, *ASME J.Appl.Mech.* 62, pp.654-661, 1995.
- [16] Arimitsu Y., Nishio K., Senda T.: A Study of Saint-Venant's principle for composite materials by means of internal stress field, *ASME, J. Appl. Mech.*, 62, pp.53-58, 1995.
- [17] Sokolnikoff S.: *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd Edn, McGraw Hill, New York, 1956
- [18] Toupin R.A.: Saint Venant's Principle, *Arch.Mech.Anal.*, pp.83-96, 1965.

Streszczenie

Praca przedstawia zastosowanie teorii wyężenia sformułowanej dla materiałów komórkowych o ujemnym współczynniku Poissona. Wyznaczenie energii sprężystej odbywa się w dwóch skalach: efektywnego continuum i szkieletu belkowego. Efektywne continuum jest oparte na uśrednianiu potencjału sprężystego, co jest podstawą konstruowania macierzy sztywności. Zastosowanie energetycznego kryterium wyężenia dla sprężystych stanów własnych tensora sztywności pozwala sformułować warunek granicznej sprężystej pracy materiału i zdefiniować miarę wyężenia. Przestrzenny rozkład wyężenia w materiale jest pokazany na przykładach testujących stosowalność zasady de Saint Venanta.

Słowa kluczowe: materiały komórkowe, ujemny współczynnik Poissona, model efektywny, zasada de Saint Venanta.

SAINT VENANT PRINCIPLE FOR AUXETIC CELLULAR MATERIALS

Abstract

The paper presents application of material effort theory formulated for anisotropic cellular material with negative Poisson's ratio. Energy considerations are carried out in two scales: material skeleton and effective continuum. Distribution of energy density is presented on examples testing applicability of Saint Venant principle to auxetic cellular materials.

Keywords: auxetic cellular materials, anisotropy, effective model, elasticity, Saint Venant principle.