



Politechnika Krakowska
Wydział Inżynierii Lądowej
Instytut Mechaniki Budowli
Katedra Wytrzymałości Materiałów

Podstawy teorii wyężenia materiałów komórkowych w oparciu o energetyczne kryteria stanów granicznych

mgr inż. Piotr Kordzikowski

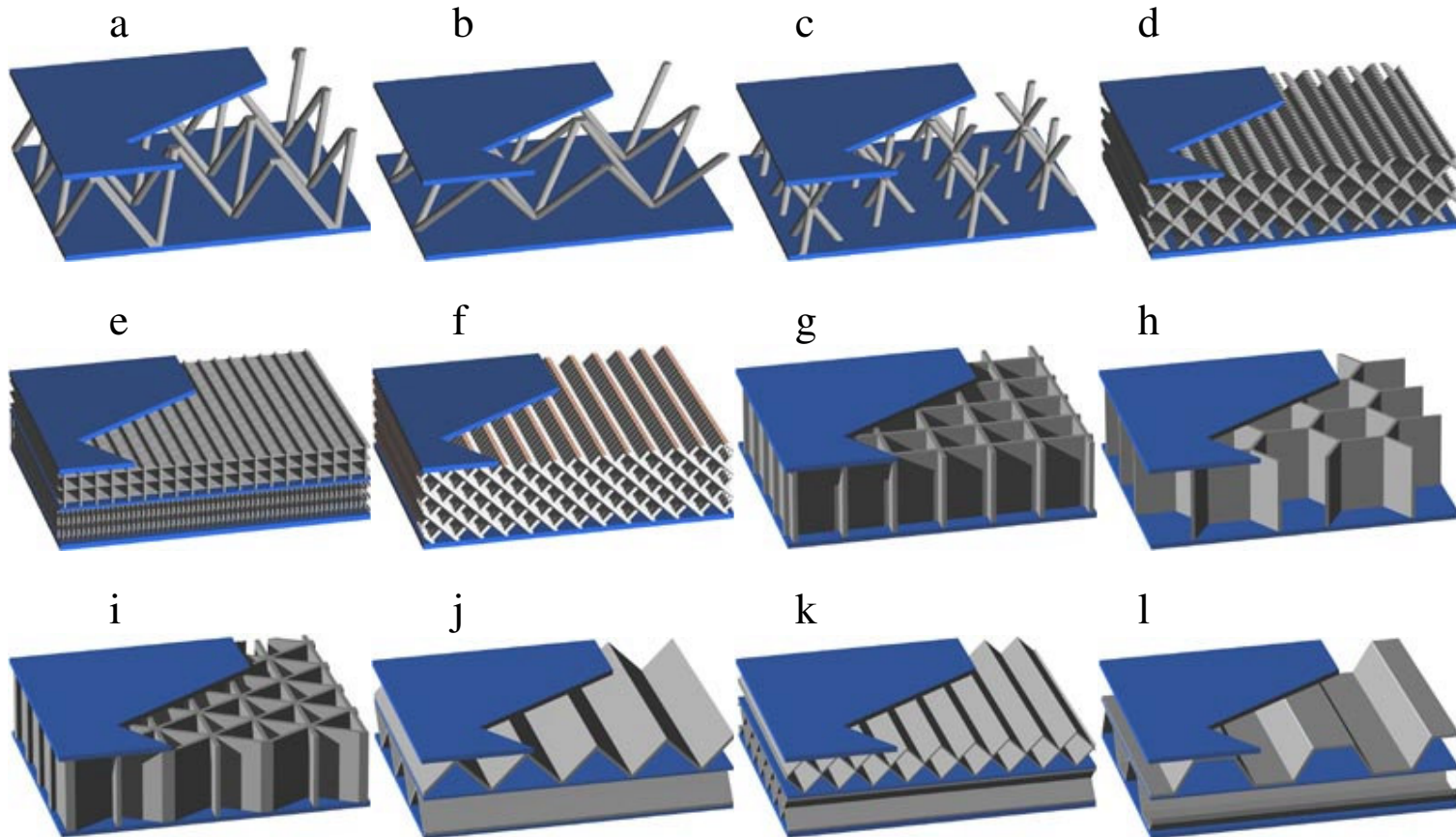
opiekun naukowy: dr hab. inż. Ryszard Pęcherski prof. PK

Kraków 2005

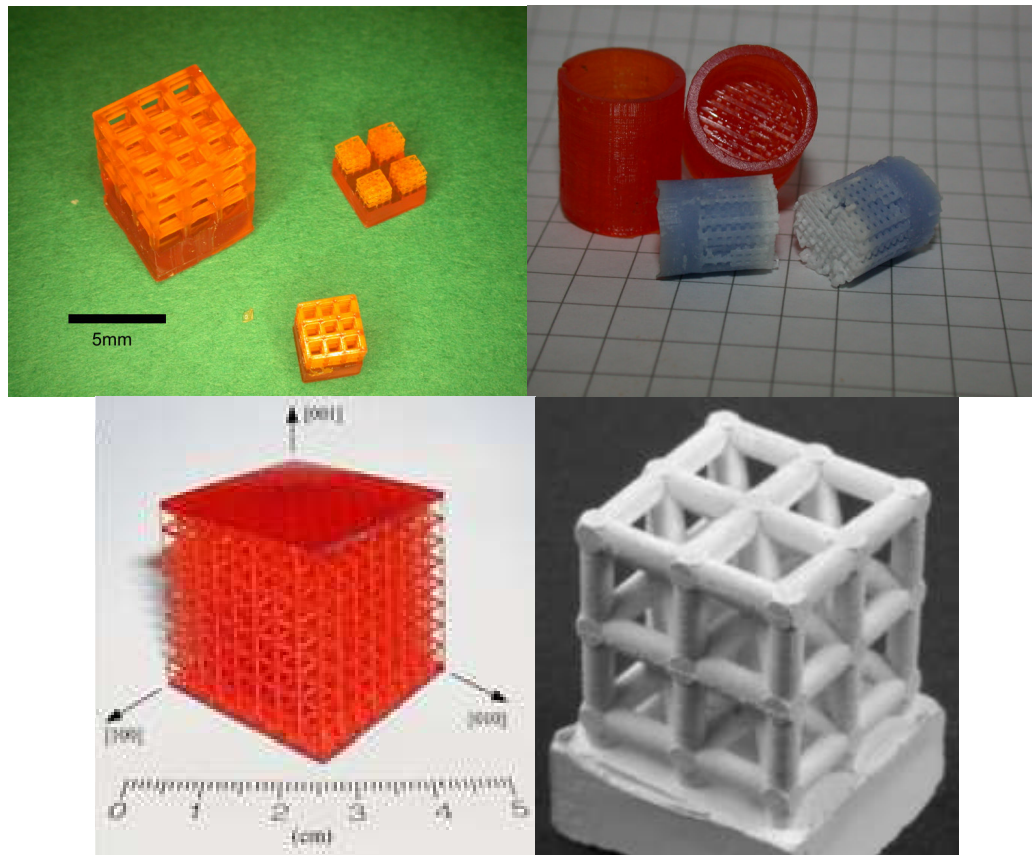
PLAN PREZENTACJI

1. Aktualne problemy dotyczące materiałów komórkowych w oparciu o przegląd literatury
2. Cel pracy i przedmiot badań
3. Analityczne określenie gęstości granicznych energii sprężystych dla struktur komórkowych
4. Analiza rozkładu gęstości energii granicznych dla sprężystych stanów własnych
5. Numeryczna weryfikacja proponowanego opisu deformacji struktur komórkowych z zastosowaniem programu Robot
6. Omówienie planu pracy doktorskiej
7. Literatura

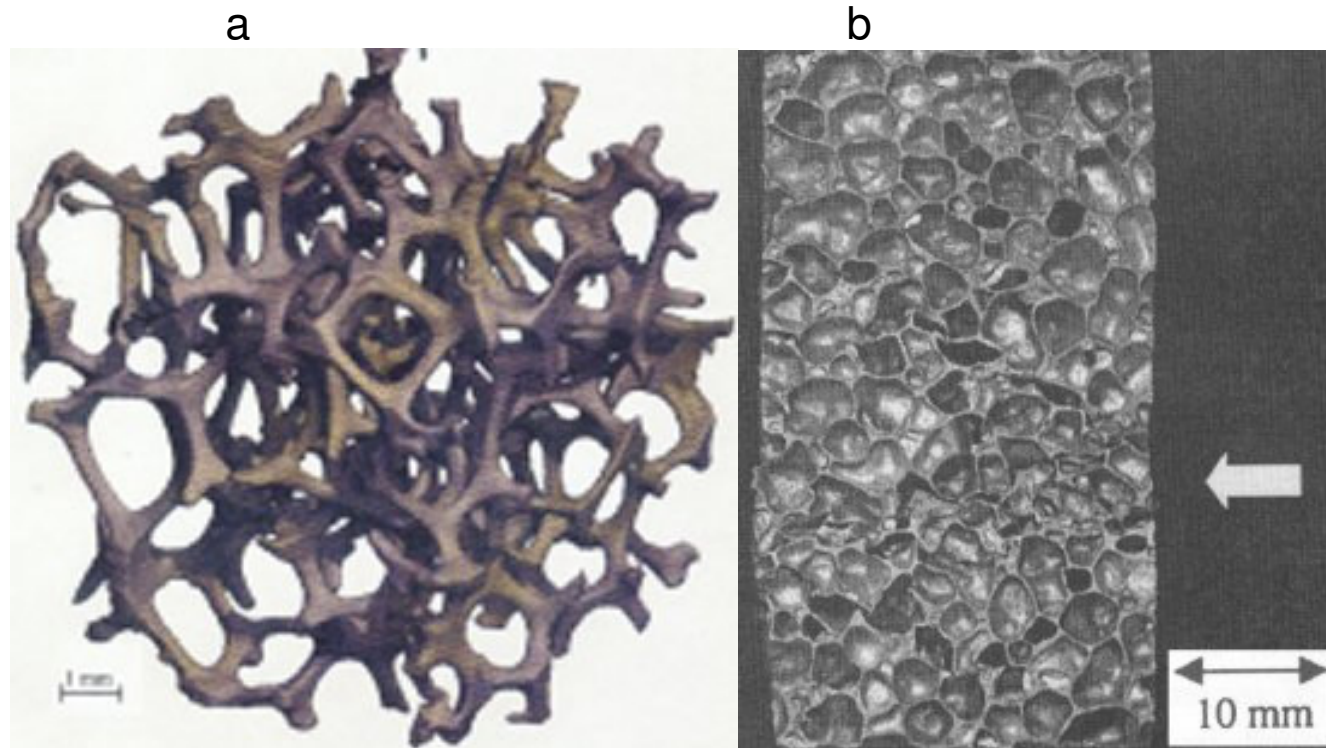
Przykłady płyt typu *sandwich*



Regularne struktury komórkowe



Pianki metaliczne



- a) pianka aluminiowa – komórka otwarta,
- b) pianka aluminiowa – komórka zamknięta

CEL PRACY

Opracowanie teorii wyężenia materiałów komórkowych z uwzględnieniem parametrów mikrostruktury i morfologii szkieletu stosując:

- teorię sprężystych stanów własnych (J. Rychlewski 1984)
- energetyczne podejście do określenia kryterium sprężystych stanów granicznych

prawo Hooke'a

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

zagadnienie własne

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_i = \lambda_i \boldsymbol{\omega}_i, \quad \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{\lambda_i} \boldsymbol{\omega}_i$$

gęstość energii sprężystej

$$2\Phi(\boldsymbol{\sigma}_i) = \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = C_{klmn} \sigma_{kl}^{(i)} \sigma_{mn}^{(i)} = \frac{1}{\lambda^{(i)}} (\sigma^{(i)})^2, \quad i = 1, \dots, p \quad p \leq 6$$

gdzie: $(\sigma^{(i)})^2$ - kwadrat rzutu tensora naprężenia na i -ty wektor własny tensora \mathbf{S}

$\lambda^{(i)}$ - i -ta wartość własna tensora \mathbf{S} , nazywana w [10] modułem Kelvina

energetyczne kryterium wyężenia sformułowane przez J. Rychlewskiego (1984)
(kryterium dla sprzężonych stanów własnych)

$$\frac{\Phi(\sigma_1)}{\Phi_1^{gr}} + \dots + \frac{\Phi(\sigma_p)}{\Phi_p^{gr}} \leq 1, \quad p \leq 6$$

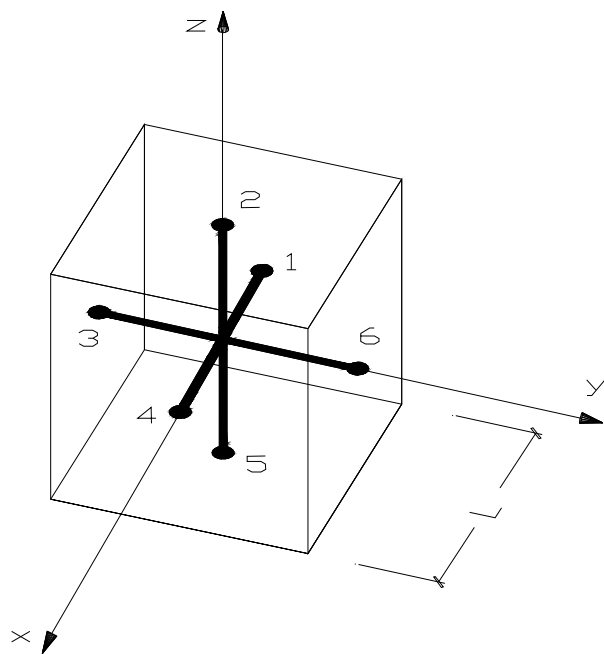
$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_p$ - rozkład tensora naprężenia na p stanów własnych

Φ_p^{gr} - graniczna wartość gęstości energii sprężystej w stanie własnym p

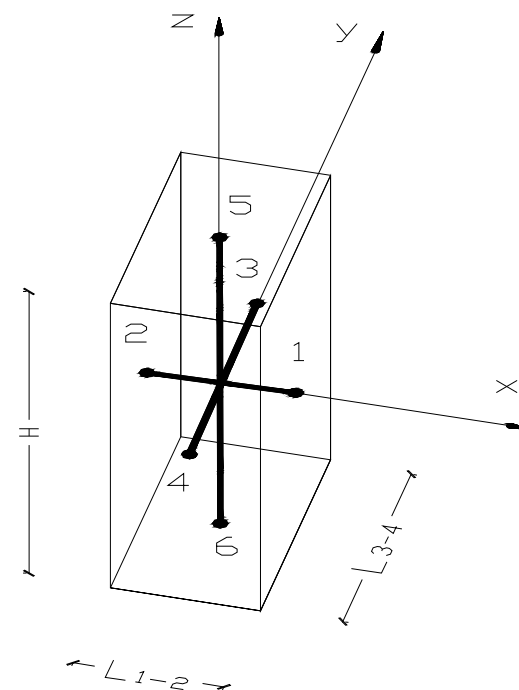
kryterium dla poszczególnych stanów własnych (S. C. Cowin et al., 1995)

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_1) &\leq \Phi_1^{gr} \\ &\vdots \\ \Phi(\sigma_p) &\leq \Phi_p^{gr} \end{aligned} \quad p \leq 6$$

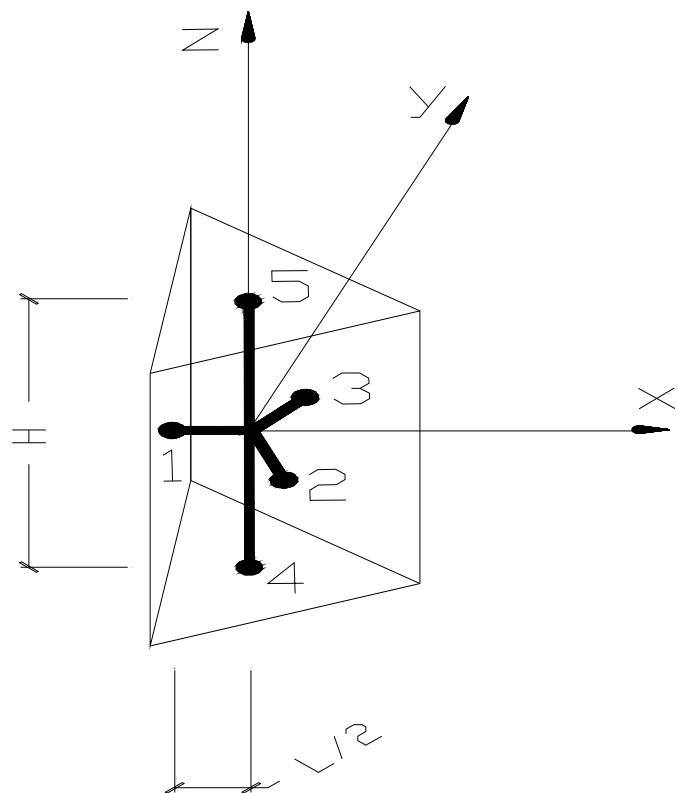
PRZEDMIOT BADAŃ



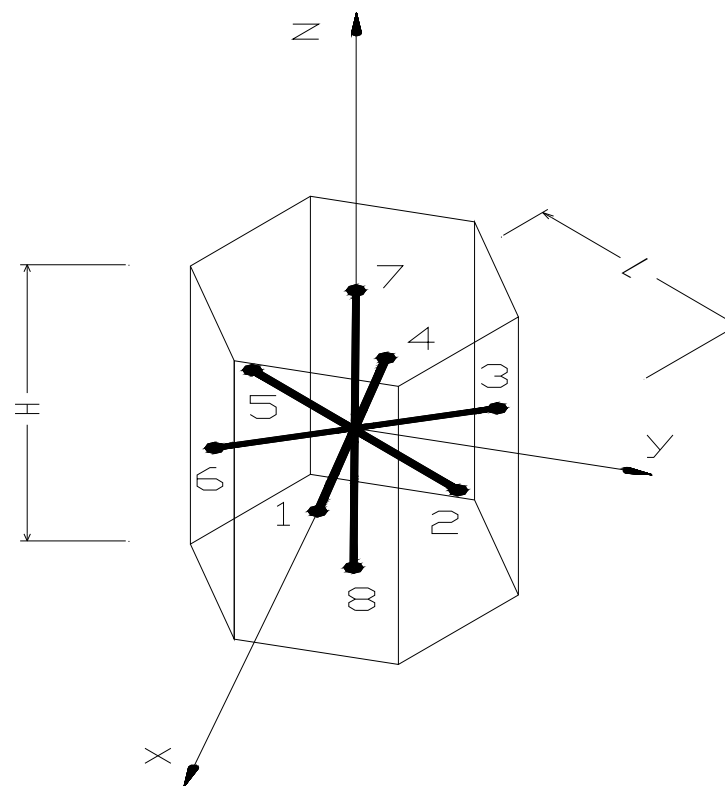
Komórka sześcienna



Komórka prostokątna



Komórka w postaci pryzmy
o podstawie trójkąta
równobocznego



Komórka w postaci pryzmy
o podstawie sześciokąta
foremnego

SPRĘŻYSTE STANY WŁASNE I GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH

KOMÓRKA SZEŚCIENNA – SYMETRIA KUBICZNA

OZNACZENIA

L - wymiar elementów belkowych (szkieletu)

s_n - sztywność elementów belkowych na rozciąganie

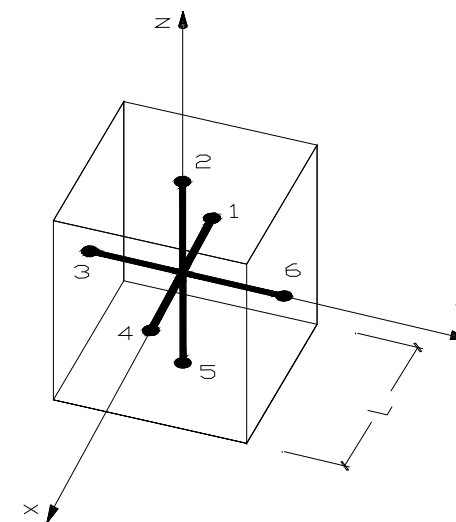
s_τ - sztywność elementów belkowych na zginanie

MODUŁY KELVINA MACIERZY **S**

$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{s_n}{2L}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{s_n}{2L}$$

$$\lambda_{III} = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \frac{2s_\tau}{4L}$$



GRANICZNE SIŁY SPRĘŻYSTE DLA ELEMENTÓW BELKOWYCH

ściskanie (rozciąganie): $F^{gr} = A R_e$

ścinięcie (zginanie): $F^{gr} = \frac{R_e I}{L h}$

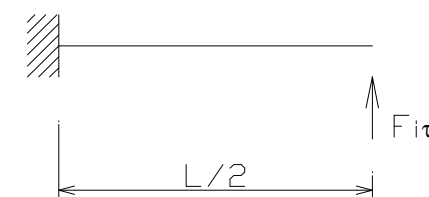
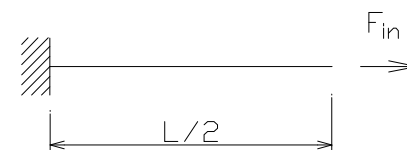
DEFINICJA NAPRĘŻENIA
dla ekwiwalentnego continuum

$$\sigma = \frac{1}{V} \int_{V^s} \sigma^s dV$$

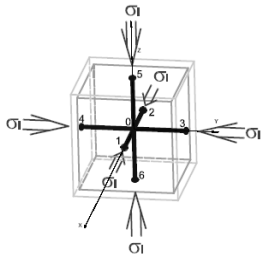
gdzie:

V – objętość reprezentatywnej komórki

V^s – objętość szkieletu

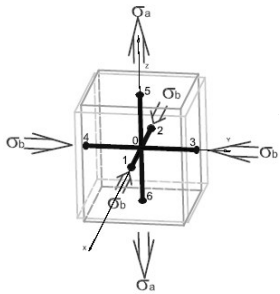


GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH



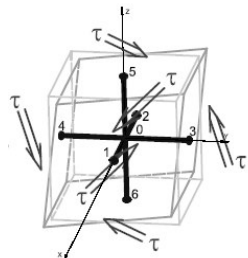
$$\sigma_I = \sigma_1 = \begin{bmatrix} \frac{-A R_e}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-A R_e}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-A R_e}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I} 3 \left(\frac{A R_e}{L^2} \right)^2$$



$$\sigma_{II} = \sigma_{2,3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{A R_e}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \frac{A R_e}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} \frac{A R_e}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}} \frac{2}{3} \left(\frac{A R_e}{L^2} \right)^2$$



$$\sigma_{III} = \sigma_{4,5,6} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2} I R_e}{h L^3} & \frac{\sqrt{2} I R_e}{h L^3} \\ \frac{\sqrt{2} I R_e}{h L^3} & 0 & \frac{\sqrt{2} I R_e}{h L^3} \\ \frac{\sqrt{2} I R_e}{h L^3} & \frac{\sqrt{2} I R_e}{h L^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{III}} 6 \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L^6}$$

R_e - granica plastyczności, h - maksymalna odległość włókien górnych lub dolnych elementu belkowego, A - pole przekroju elementu belkowego, I - moment bezwładności elementu belkowego

KOMÓRKA PROSTOPADŁOŚCIENNA - ORTOTROPIA

OZNACZENIA

L_{1-2} , L_{3-4} , H - wymiary elementów belkowych (szkieletu)

S_{n1-2} , S_{n3-4} , S_{n5-6} - sztywności elementów belkowych na rozciąganie

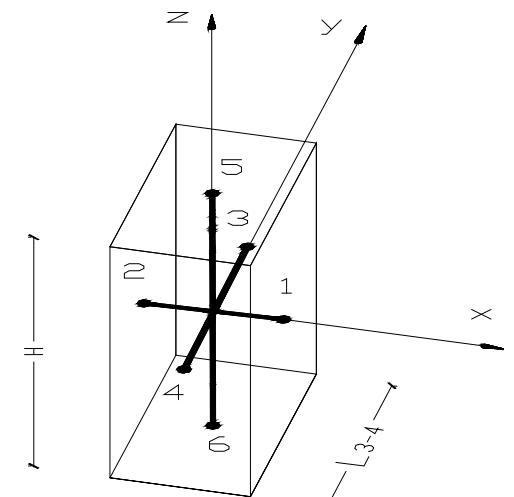
$S_{\tau 1-2}$, $S_{\tau 3-4}$, $S_{\tau 5-6}$ - sztywności elementów belkowych na zginanie

MODUŁY KELVINA

$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{L_{1-2} S_{n1-2}}{2 L_{3-4} H} \quad \lambda_{II} = \lambda_2 = \frac{L_{3-4} S_{n3-4}}{2 L_{1-2} H} \quad \lambda_{III} = \lambda_3 = \frac{H S_{n5-6}}{2 L_{1-2} L_{3-4}}$$

$$\lambda_{IV} = \lambda_4 = \frac{\frac{2 H^2 S_{\tau 5-6}}{L_{3-4}^2 S_{\tau 3-4} + H^2 S_{\tau 5-6}} \frac{L_{3-4} S_{\tau 3-4}}{2}}{L_{1-2} H}$$

$$\lambda_V = \lambda_5 = \frac{\frac{2 H^2 S_{\tau 5-6}}{L_{1-2}^2 S_{\tau 1-2} + H^2 S_{\tau 5-6}} \frac{L_{1-2} S_{\tau 1-2}}{2}}{L_{3-4} H} \quad \lambda_{VI} = \lambda_6 = \frac{\frac{2 L_{3-4}^2 S_{\tau 3-4}}{L_{3-4}^2 S_{\tau 3-4} + L_{1-2}^2 S_{\tau 1-2}} \frac{L_{1-2} S_{\tau 1-2}}{2}}{L_{3-4} H}$$



$$L_{1-2} \leq L_{3-4} \leq H$$

GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH

$$\sigma_I = \sigma_1 = \begin{bmatrix} \frac{A R_e}{L_{3-4} H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I} \left(\frac{A R_e}{L_{3-4} H} \right)^2$$

$$\sigma_{II} = \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A R_e}{L_{1-2} H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}} \left(\frac{A R_e}{L_{1-2} H} \right)^2$$

$$\sigma_{III} = \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A R_e}{L_{1-2} L_{3-4}} \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{III}} \left(\frac{A R_e}{L_{1-2} L_{3-4}} \right)^2$$

$$\sigma_{IV} = \sigma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \frac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{H}}{L_{1-2} L_{3-4}} \\ 0 & \sqrt{2} \frac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{H}}{L_{1-2} L_{3-4}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{IV}^{gr} = \frac{I}{\lambda_{IV}} \delta \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 H^2}$$

$$\sigma_V = \sigma_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \frac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{H}}{L_{1-2} L_{3-4}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} \frac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{H}}{L_{1-2} L_{3-4}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_V^{gr} = \frac{I}{\lambda_V} \delta \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 H^2}$$

$$\sigma_{VI} = \sigma_6 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \frac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{L_{3-4}}}{L_{1-2} H} & 0 \\ \sqrt{2} \frac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{L_{3-4}}}{L_{1-2} H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{VI}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{VI}} \delta \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 H^2}$$

KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O PODSTAWIE TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO – SYMETRIA TRANSVERSALNIE IZOTROPOWA

OZNACZENIA

L, H - wymiary elementów belkowych (szkieletu)

s_{nL}, s_{nH} - sztywności elementów belkowych na rozciąganie

$s_{\tau L}, s_{\tau H}$ - sztywności elementów belkowych na zginanie

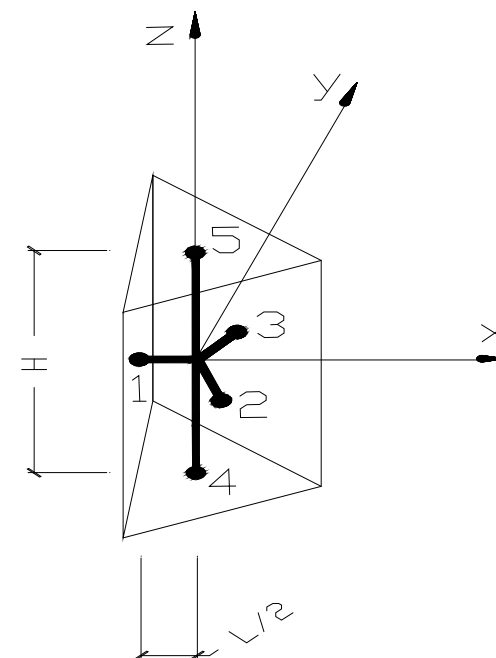
MODUŁY KELVINA

$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{\sqrt{3} s_{nL}}{6 H}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_3 = \frac{2 \sqrt{3} H s_{nH}}{9 L^2}$$

$$\lambda_{III} = \lambda_2 = \lambda_6 = \frac{\sqrt{3} s_{nL} s_{\tau L}}{3 H (s_{nL} + s_{\tau L})}$$

$$\lambda_{IV} = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{4 \sqrt{3} H s_{\tau H} s_{\tau L}}{3 (3 L^2 s_{\tau L} + 4 H^2 s_{\tau H})}$$



$$L \leq H$$

GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH

$$\sigma_I = \sigma_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3} A R_e}{3 L H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{3} A R_e}{3 L H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-4\sqrt{3} A R_e}{9 L^2} \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I} \frac{2}{3} \frac{A^2 R_e^2}{L^2 H^2}$$

$$2 \Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}} \frac{16}{27} \frac{A^2 R_e^2}{L^4}$$

$$\sigma_{III} = \sigma_{3,4} = \begin{bmatrix} \frac{I A R_e (4\sqrt{3}-1)}{L H (4I+L h A)} & \frac{2\sqrt{3} I A R_e}{3 L H (4I+L h A)} & 0 \\ \frac{2\sqrt{3} I A R_e}{3 L H (4I+L h A)} & -\frac{I A R_e (4\sqrt{3}-1)}{L H (4I+L h A)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{III}} \frac{2 I^2 A^2 R_e^2 (61 - 8\sqrt{3})}{9 H^2 L^2 (4I + L h A)^2}$$

$$\sigma_{IV} = \sigma_{5,6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4\sqrt{3} I R_e}{9 L^2 h H} \\ 0 & 0 & \frac{4\sqrt{3} I R_e}{9 L^2 h H} \\ \frac{4\sqrt{3} I R_e}{9 L^2 h H} & \frac{4\sqrt{3} I R_e}{9 L^2 h H} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{IV}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{IV}} \frac{64}{27} \frac{I^2 R_e^2}{H^2 L^4 h^2}$$

KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O PODSTAWIE SZEŚCIOKĄTA FOREMNEGO – SYMETRIA TRANSWERSALNIE IZOTROPOWA

OZNACZENIA

L, H - wymiary elementów belkowych (szkieletu)

s_{nL}, s_{nH} - sztywności elementów belkowych na rozciąganie

$s_{\tau L}, s_{\tau H}$ - sztywności elementów belkowych na zginanie

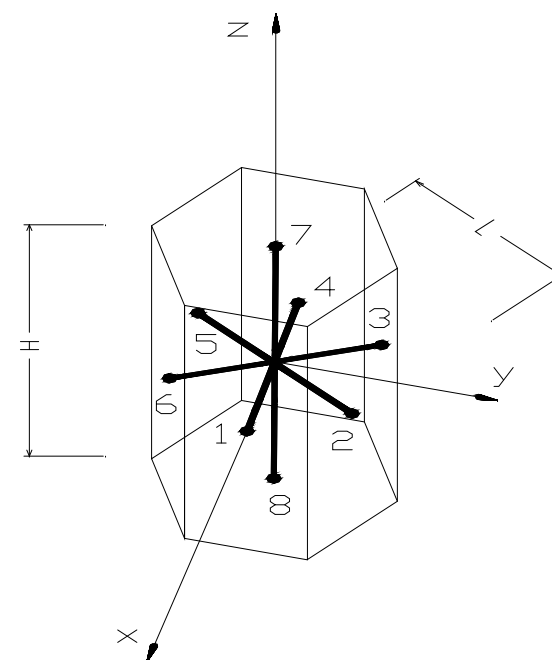
MODUŁY KELVINA

$$\lambda_{I} = \lambda_{1} = \frac{\sqrt{3} s_{nL}}{2 H}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_{3} = \frac{\sqrt{3} H s_{nH}}{3 L^2}$$

$$\lambda_{III} = \lambda_{2} = \lambda_{6} = \frac{\sqrt{3} (s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{4 H}$$

$$\lambda_{IV} = \lambda_{4} = \lambda_{5} = \frac{2 \sqrt{3} H s_{\tau H} s_{\tau L}}{3 L^2 s_{\tau L} + 2 H^2 s_{\tau H}}$$



GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH

$$\sigma_I = \sigma_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3} A R_e}{L H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{3} A R_e}{L H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I} 6 \frac{A^2 R_e^2}{L^2 H^2}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2\sqrt{3} A R_e}{3 L H} \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}} \frac{4}{3} \frac{A^2 R_e^2}{H^2 L^2}$$

$$\sigma_{III} = \sigma_{3,4} = \begin{bmatrix} \frac{2 I A R_e \sqrt{3} (s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{L H (4 I s_{nL} + L s_{\tau L} h A)} & \frac{I A R_e \sqrt{3} (s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{L H (4 I s_{nL} + L s_{\tau L} h A)} & 0 \\ \frac{I A R_e \sqrt{3} (s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{L H (4 I s_{nL} + L s_{\tau L} h A)} & -\frac{2 I A R_e \sqrt{3} (s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{L H (4 I s_{nL} + L s_{\tau L} h A)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{III}} 30 \frac{(s_{nL} + 2 s_{\tau L})^2 R_e^2 A^2 I^2}{H^2 L^2 (4 s_{nL} I + L s_{\tau L} h A)^2}$$

$$\sigma_{IV} = \sigma_{5,6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3} I R_e}{3 L^2 h H} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3} I R_e}{3 L^2 h H} \\ \frac{2\sqrt{3} I R_e}{3 L^2 h H} & \frac{2\sqrt{3} I R_e}{3 L^2 h H} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{IV}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{IV}} \frac{16}{3} \frac{I^2 R_e^2}{H^2 L^4 h^2}$$

wg hipotezy wyciężenia W. Burzyńskiego

$$\sigma_{red} = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} + \frac{\kappa-1}{2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

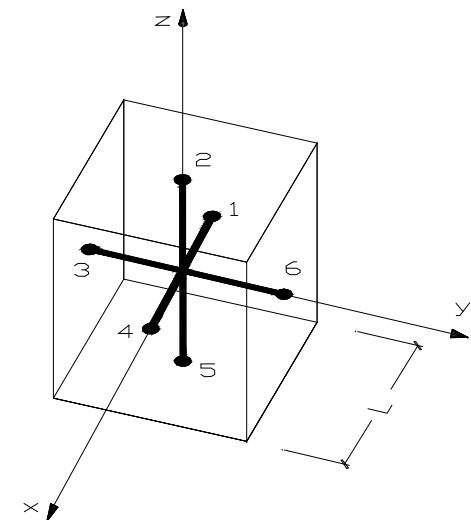
R_e^c - wytrzymałość na ściskanie, R_e^r - wytrzymałość na rozciąganie

$\kappa = \frac{R_e^c}{R_e^r} = 1$ - otrzymujemy wzór wynikły z hipotezy energii odkształcenia postaciowego

KOMÓRKA SZEŚCIENNA – SYMETRIA KUBICZNA

OZNACZENIA

- L - wymiar elementów belkowych (szkieletu)
- s_n - sztywność elementów belkowych na rozciąganie
- s_τ - sztywność elementów belkowych na zginanie



GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH

$$\sigma_I = \sigma_1 = \begin{bmatrix} \frac{2 A \kappa R_e^r}{(1 + \kappa^2) L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 A \kappa R_e^r}{(1 + \kappa^2) L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2 A \kappa R_e^r}{(1 + \kappa^2) L^2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_I^{gr} = \frac{6}{\lambda_I} (R_e^r)^2 \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa^2)^2} \frac{A^2}{L^4}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{2,3} = \begin{bmatrix} \frac{4 A \kappa R_e^r}{3(1 + \kappa^2) L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2 A \kappa R_e^r}{3(1 + \kappa^2) L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2 A \kappa R_e^r}{3(1 + \kappa^2) L^2} \end{bmatrix}$$

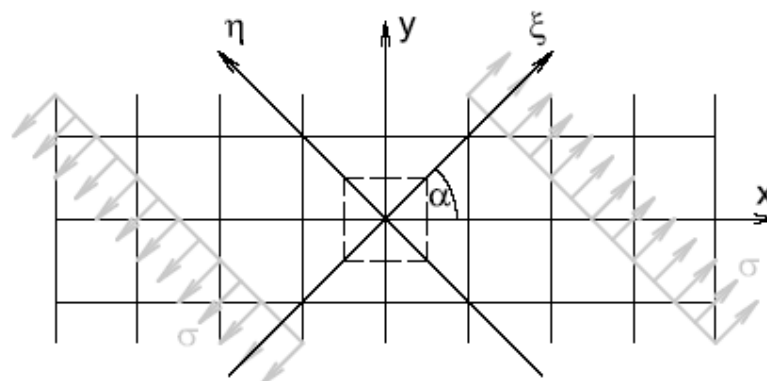
$$\Phi_{II}^{gr} = \frac{4}{3 \lambda_{II}} (R_e^r)^2 \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa^2)^2} \frac{A^2}{L^4}$$

$$\sigma_{III} = \sigma_{4,5,6} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2 I \kappa R_e^r}{(1 + \kappa^2) h L^3} & \frac{2 I \kappa R_e^r}{(1 + \kappa^2) h L^3} \\ \frac{2 I \kappa R_e^r}{(1 + \kappa^2) h L^3} & 0 & \frac{2 I \kappa R_e^r}{(1 + \kappa^2) h L^3} \\ \frac{2 I \kappa R_e^r}{(1 + \kappa^2) h L^3} & \frac{2 I \kappa R_e^r}{(1 + \kappa^2) h L^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{III}^{gr} = \frac{12}{\lambda_{III}} (R_e^r)^2 \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa^2)^2} \frac{I^2}{L^6 h^2}$$

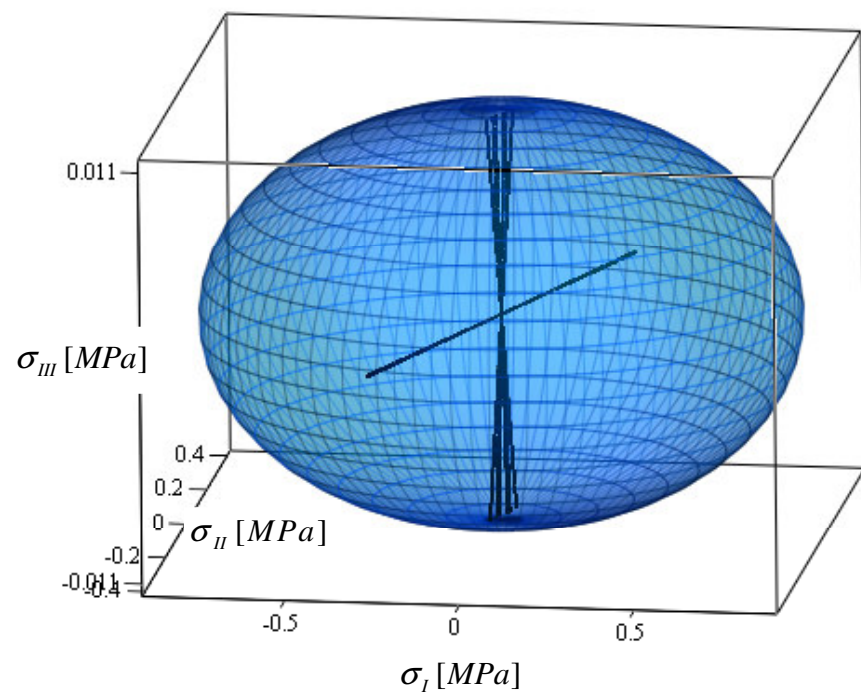
$$R_e^r \leq R_e^c$$

PRZEDSTAWIENIE ENERGETYCZNEGO KRYTERIUM J. RYCHLEWSKIEGO DLA SPRĘŻYSTYCH STANÓW WŁASNYCH PRZY JEDNOOSIOWYM ROZCIĄGANIU WZDŁUŻ KIERUNKU „n”

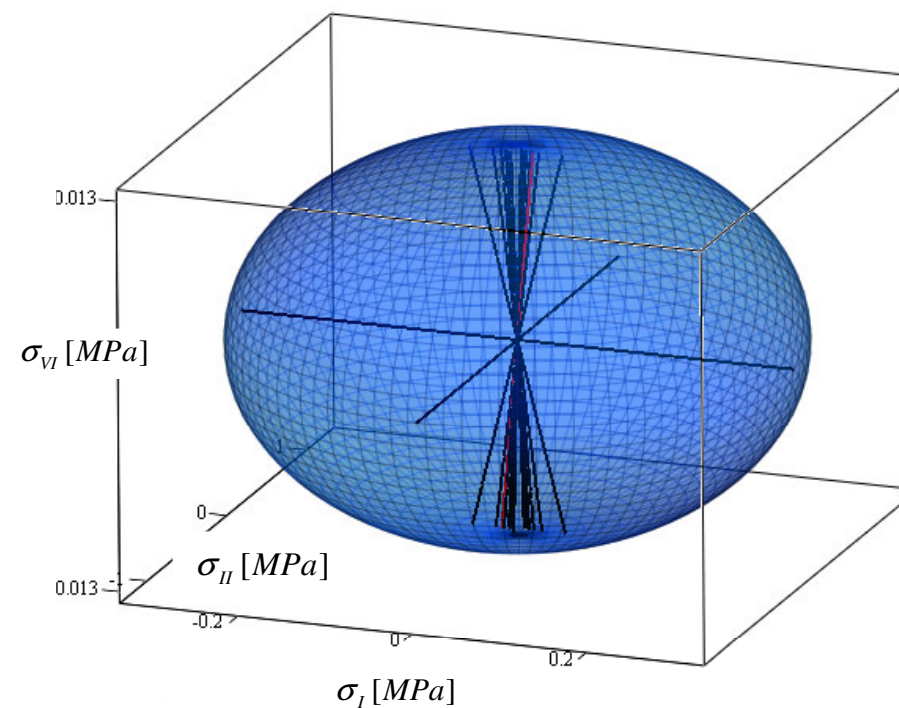


$$\boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}(x, y) = \sigma \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{bmatrix}$$

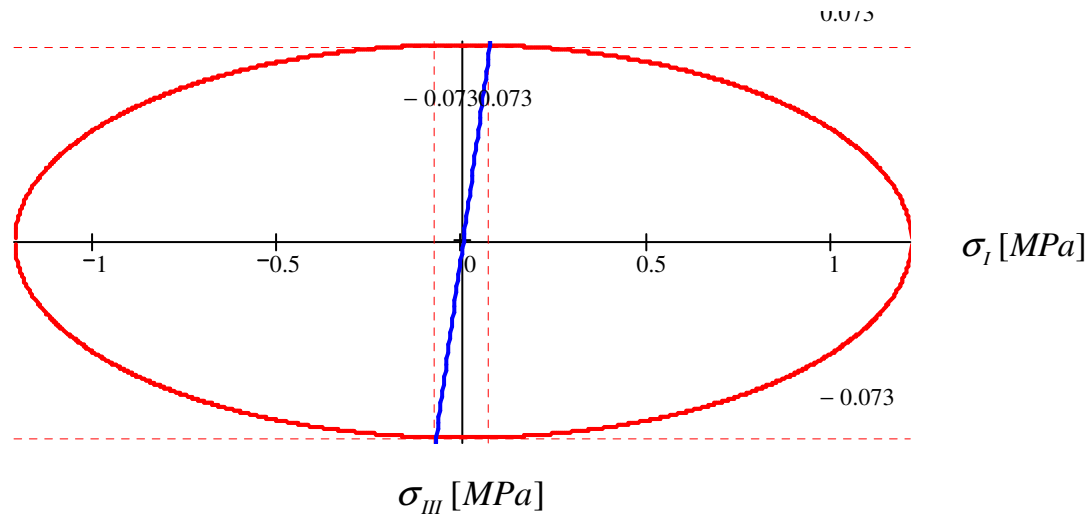
stop Cu-1%Ni, $E_s = 117 \text{ GPa}$, $G_s = 45 \text{ GPa}$, $R_e = 112 \text{ MPa}$ (D. L. McDowell et al., 2005)



Komórka sześcienna
 $L = 2000 \mu m$, $d = 150 \mu m$



Komórka prostokątna
 $L_{1-2} = 1000 \mu m$, $L_{3-4} = 4000 \mu m$, $H = 1000 \mu m$,
 $d = 120 \mu m$

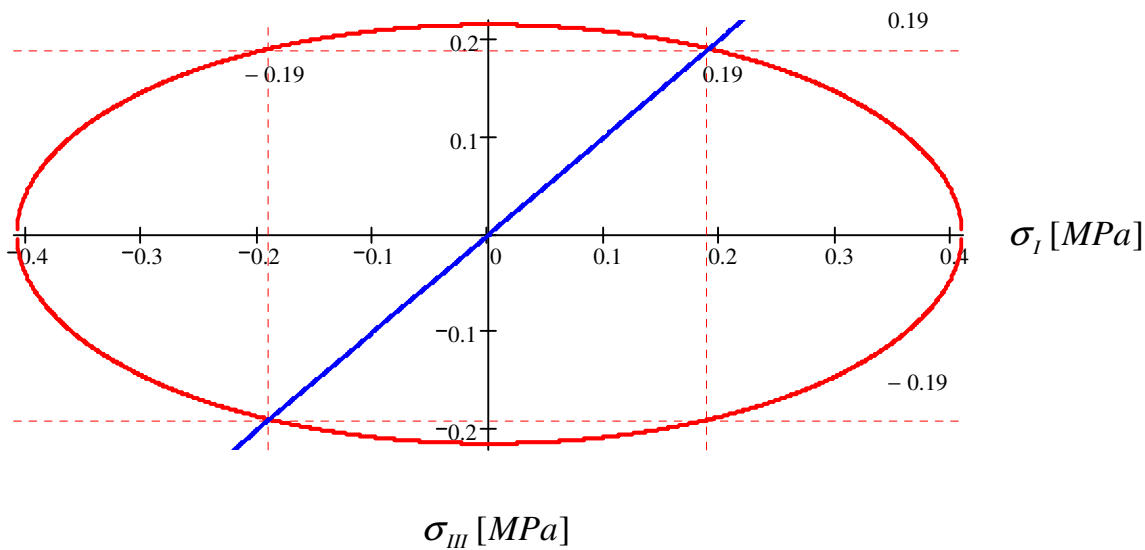


Komórka w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego

$$L = 2000 \mu m$$

$$H = 2000 \mu m$$

$$d = 260 \mu m$$



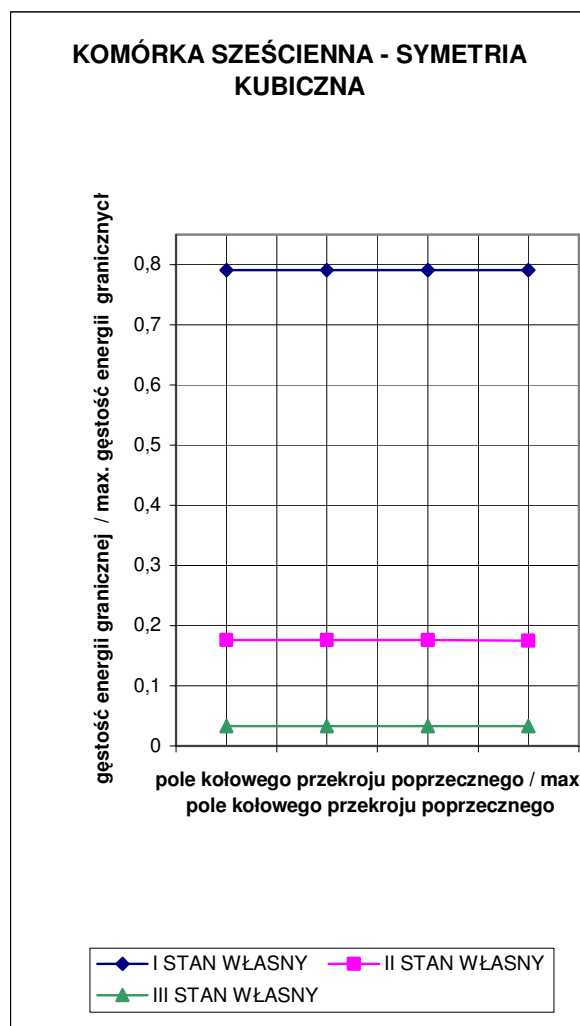
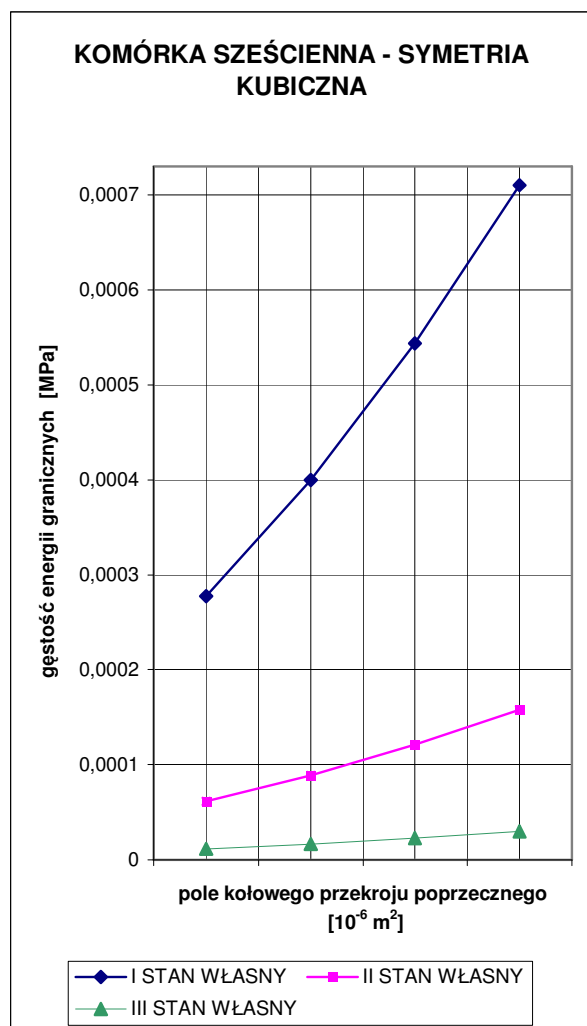
Komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego

$$L = 2000 \mu m$$

$$H = 2000 \mu m$$

$$d = 87 \mu m$$

ANALIZA ROZKŁADU GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA SPRĘŻYSTYCH STANÓW WŁASNYCH Z PUNKTU WIDZENIA ZMIANY SZTYWNOŚCI STRUKTURY KOMÓRKOWEJ



stop Cu-1%Ni,

$$E_s = 117 \text{ GPa}, \quad G_s = 45 \text{ GPa},$$

$$R_e = 112 \text{ MPa}, \quad L = 2000 \mu\text{m}$$

$$d_1 = 93.76 \mu\text{m}, \quad d_2 = 112.5 \mu\text{m},$$

$$d_3 = 131.3 \mu\text{m}, \quad d_4 = 150 \mu\text{m},$$

$$\frac{\Phi_I^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr}} = \frac{1800}{2275 + 6k^2 + 6k^2\nu}$$

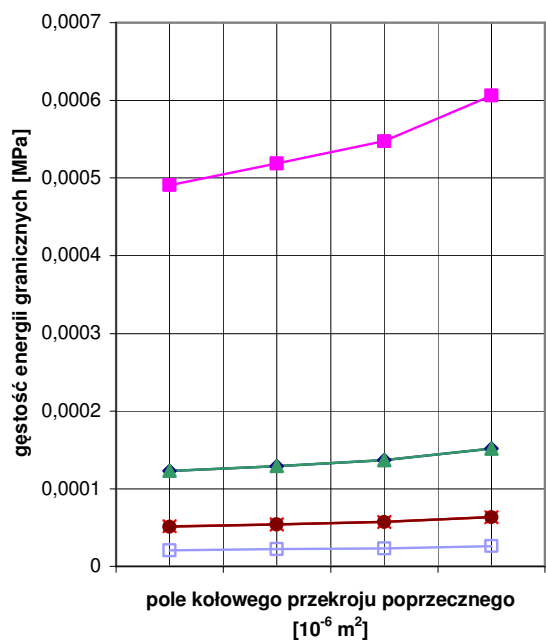
$$\frac{\Phi_{II}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr}} = \frac{400}{2275 + 12k^2 + 12k^2\nu}$$

$$\frac{\Phi_{III}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr}} = \frac{3(25 + 4k^2 + 4k^2\nu)}{2275 + 12k^2 + 12k^2\nu}$$

$$k = \frac{d}{d_{\max}} = 0.625; 1$$

ν - współczynnik Poissona dla elementu belkowego

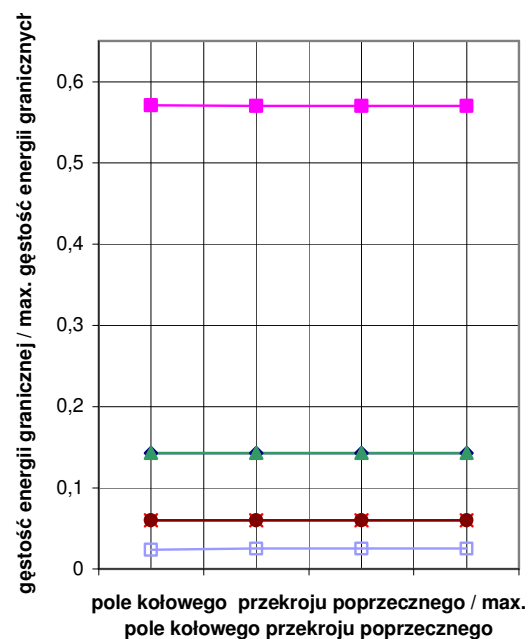
KOMÓRKA PROSTOKĄTOWA -
ORTOTROPIA



I STAN WŁASNY II STAN WŁASNY
 III STAN WŁASNY IV STAN WŁASNY
 V STAN WŁASNY VI STAN WŁASNY

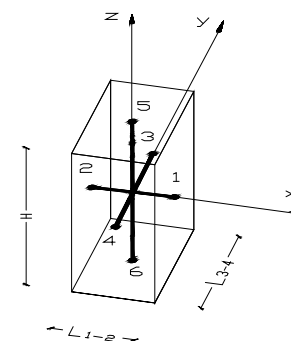
$$\Phi_I^{gr} = \Phi_{III}^{gr}, \Phi_{IV}^{gr} \approx \Phi_{VI}^{gr}$$

KOMÓRKA PROSTOKĄTOWA -
ORTOTROPIA

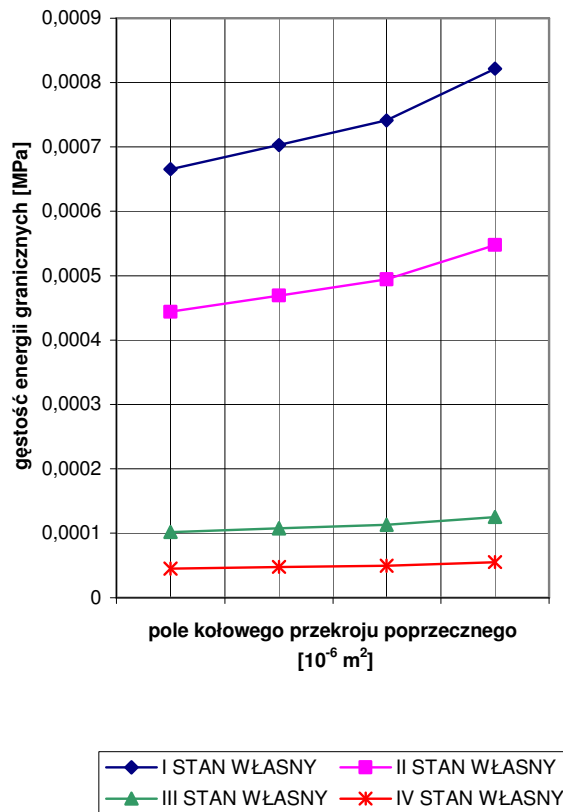


I STAN WŁASNY II STAN WŁASNY
 III STAN WŁASNY IV STAN WŁASNY
 V STAN WŁASNY VI STAN WŁASNY

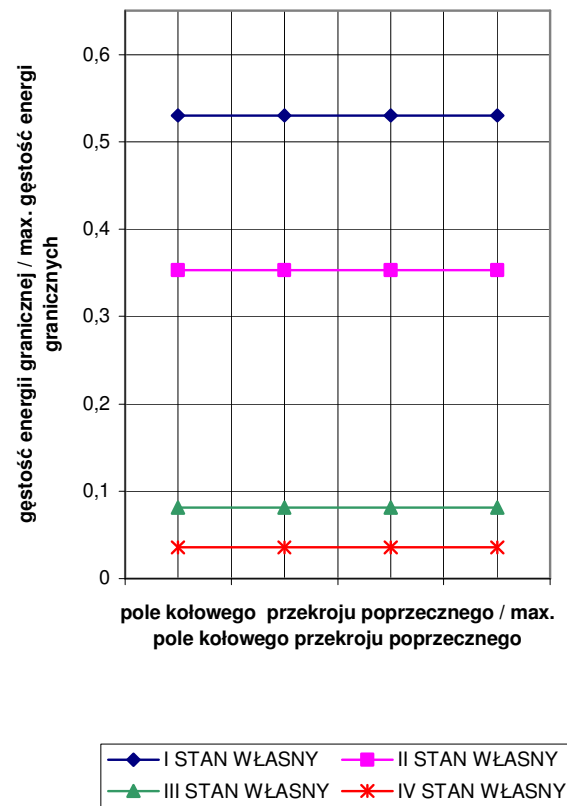
stop Cu-1%Ni,
 $E_s = 117 \text{ GPa}$, $G_s = 45 \text{ GPa}$,
 $R_e = 112 \text{ MPa}$,
 $L_{1-2} = 1000 \mu\text{m}$, $L_{3-4} = 4000 \mu\text{m}$,
 $H = 1000 \mu\text{m}$
 $d_1 = 108 \mu\text{m}$,
 $d_2 = 111 \mu\text{m}$,
 $d_3 = 114 \mu\text{m}$,
 $d_4 = 120 \mu\text{m}$



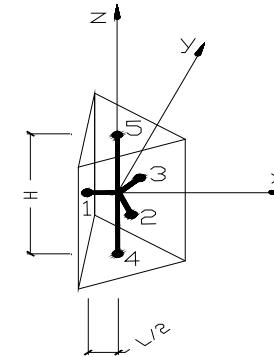
KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O
 PODSTAWIE TRÓJKĄTA
 RÓWNOBOCZNEGO - SYMETRIA
 TRANSVERSALNIE IZOTROPOWA



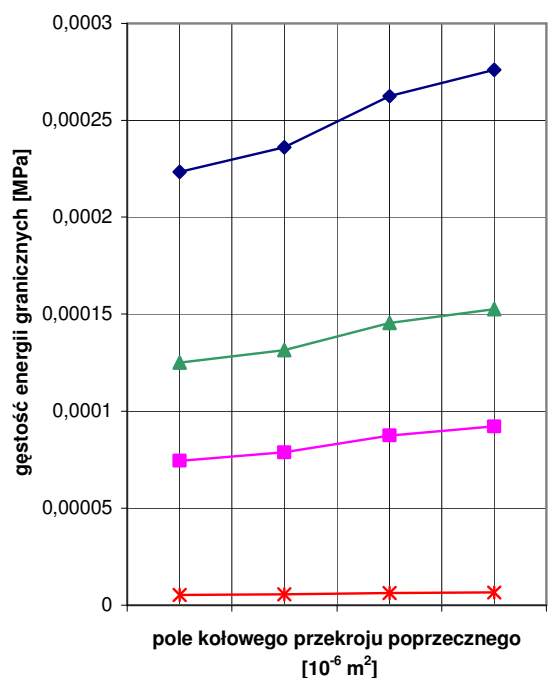
KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O
 PODSTAWIE TRÓJKĄTA
 RÓWNOBOCZNEGO - SYMETRIA
 TRANSVERSALNIE IZOTROPOWA



stop Cu-1%Ni,
 $E_s = 117 \text{ GPa}$, $G_s = 45 \text{ GPa}$,
 $R_e = 112 \text{ MPa}$,
 $L = 2000 \mu\text{m}$, $H = 2000 \mu\text{m}$
 $d_1 = 234 \mu\text{m}$,
 $d_2 = 240.5 \mu\text{m}$,
 $d_3 = 247 \mu\text{m}$,
 $d_4 = 260 \mu\text{m}$

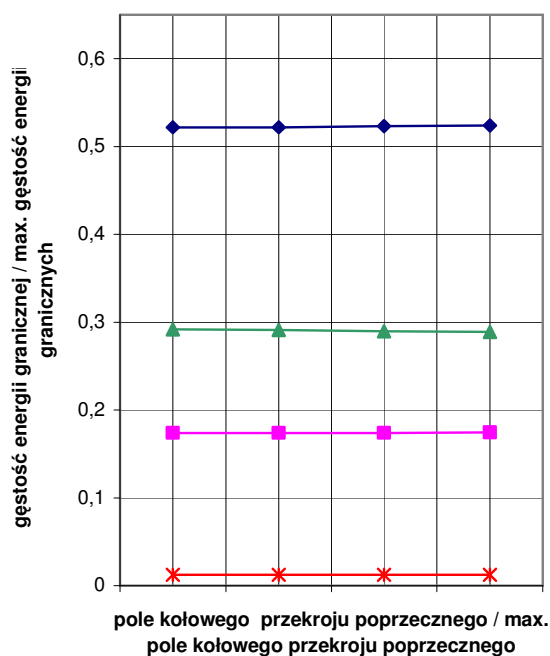


KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O
 PODSTAWIE SZEŚCIOKĄTA
 FOREMNEGO - SYMETRIA
 TRANSVERSALNIE IZOTROPOWA



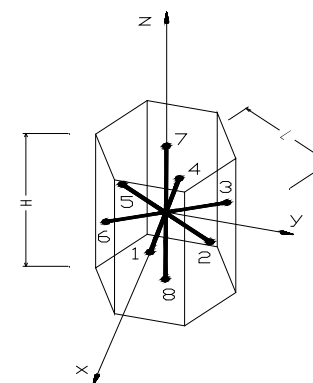
◆ I STAN WŁASNY ■ II STAN WŁASNY
 ▲ III STAN WŁASNY * IV STAN WŁASNY

KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O
 PODSTAWIE SZEŚCIOKĄTA
 FOREMNEGO - SYMETRIA
 TRANSVERSALNIE IZOTROPOWA



◆ I STAN WŁASNY ■ II STAN WŁASNY
 ▲ III STAN WŁASNY * IV STAN WŁASNY

stop Cu-1%Ni,
 $E_s = 117 \text{ GPa}$, $G_s = 45 \text{ GPa}$,
 $R_e = 112 \text{ MPa}$,
 $L = 2000 \mu\text{m}$, $H = 2000 \mu\text{m}$
 $d_1 = 78.3 \mu\text{m}$,
 $d_2 = 80.47 \mu\text{m}$,
 $d_3 = 84.82 \mu\text{m}$,
 $d_4 = 87 \mu\text{m}$



NUMERYCZNA WERYFIKACJA PROPONOWANEGO OPISU DEFORMACJI STRUKTUR KOMÓRKOWYCH

KOMÓRKA SZEŚCIENNA

Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) przedstawia zależność:

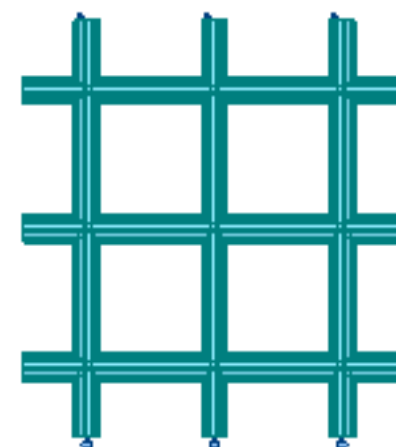
$$\sigma^{gr} = \pm \frac{3R_e \frac{I A}{L^2}}{\sqrt{10I^2 + 27I^2 \sin^4 \alpha + 3 \sin^2 \alpha h^2 L^2 A^2 - 3 \sin^4 \alpha h^2 L^2 A^2 - 27I^2 \sin^2 \alpha}}$$

gdzie α jest dowolnym kierunkiem obciążenia.

Przyjmując σ^{gr} i $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (rozciągnięcie wzdłuż osi y) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) w żadnym przęcie struktury nie jest przekroczona granica plastyczności R_e elementu belkowego, dla stali $E = 205GPa$, $G = 80.8GPa$,

$$R_e = 215MPa, \quad \sigma^{z \text{ programu Robot}} = 201MPa$$

błąd; 6.9 %



KOMÓRKA PROSTOPADŁOŚCIENNA

Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) przedstawia zależność:

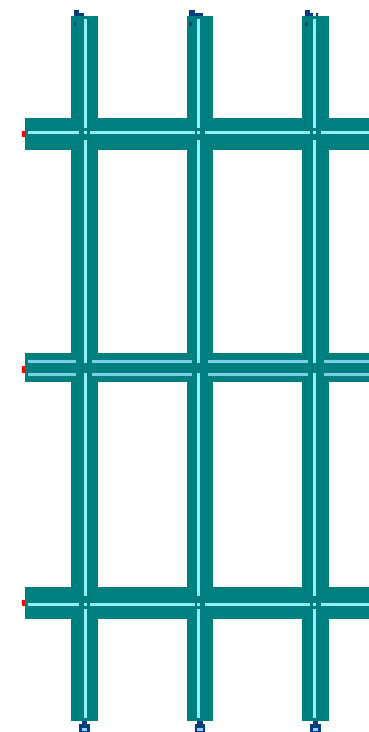
$$\sigma^{gr} = \pm [2(4L_{3-4}^2 I^2 - 8L_{3-4}^2 I^2 \sin^2 \alpha + 4L_{3-4}^2 I^2 \sin^4 \alpha + 4\sin^4 \alpha L_{1-2}^2 I^2 + \\ + \sin^2 \alpha h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2 - \sin^4 \alpha h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2)^{1/2} R_e I \frac{A}{R_e}] / [-4L_{3-4}^2 I^2 + \\ - 8L_{3-4}^2 I^2 \sin^2 \alpha - 4L_{3-4}^2 I^2 \sin^4 \alpha - 4\sin^4 \alpha L_{1-2}^2 I^2 - \sin^2 \alpha h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2 + \\ + \sin^4 \alpha h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2]$$

gdzie α jest dowolnym kierunkiem obciążenia.

Przyjmując σ^{gr} i $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (rozciągnięcie wzdłuż osi y) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) w żadnym przęcie struktury nie jest przekroczona granica plastyczności R_e elementu belkowego, dla stali $E = 205GPa$, $G = 80.8GPa$,

$$R_e = 215MPa, \quad \sigma^{z \text{ programu Robot}} = 210.83MPa$$

błąd; 1.9%



KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O PODSTAWIE TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO
Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) przedstawia zależność:

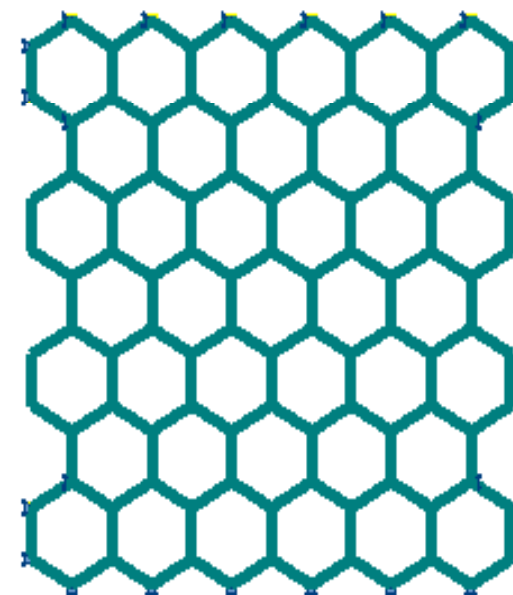
$$\sigma^{gr} = \pm [2((35067 I^2 - 72 L^2 h^2 A^2 \sqrt{3} + 981 L^2 h^2 A^2 + 576 L I h A \sqrt{3} + 7848 L I h A)(6457 - 384 \sqrt{3}))^{1/2} I A \frac{R_e}{L H}] / [35067 I^2 + 72 L^2 h^2 A^2 \sqrt{3} + 981 L^2 h^2 A^2 + 576 L I h A \sqrt{3} + 7848 L I h A]$$

Przyjmując σ^{gr} (rozciąganie wzdłuż osi x) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) w żadnym przecie struktury nie jest przekroczona granica plastyczności R_e elementu belkowego,

dla stali $E = 205 GPa$, $G = 80.8 GPa$,

$$R_e = 215 MPa, \quad \sigma^{z \text{ programu Robot}} = 191.11 MPa$$

błąd; 12 %



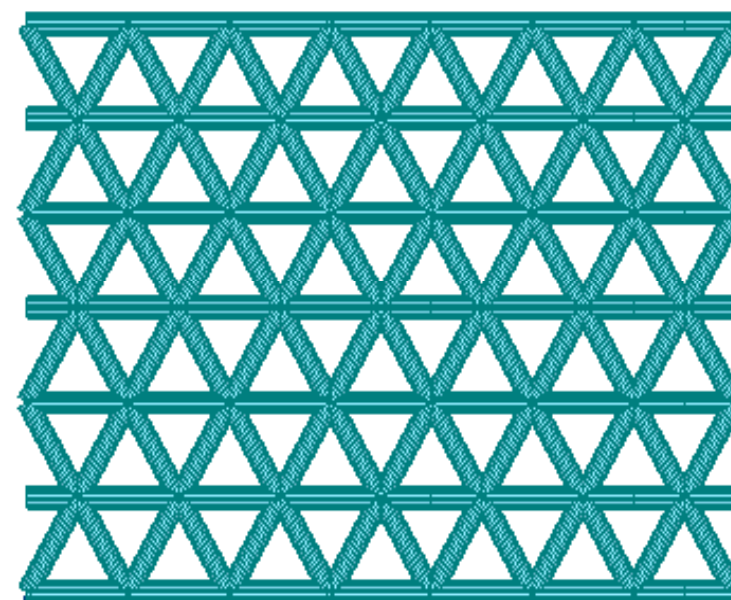
KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O PODSTAWIE SZEŚCIOKĄTA FOREMNEGO
 Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) przedstawia zależność:

$$\sigma^{gr} = \frac{2\sqrt{(\lambda_{III} \Phi_{III}^{gr} + \lambda_I \Phi_I^{gr}) \lambda_{III} \Phi_{III}^{gr} \lambda_I \Phi_I^{gr}}}{\lambda_{III} \Phi_{III}^{gr} + \lambda_I \Phi_I^{gr}}$$

Przyjmując σ^{gr} (rozciągnięcie wzdłuż osi y) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) naprężenia w prętach struktury są w przybliżeniu równe granicy plastyczności R_e elementu belkowego, dla stali $E = 205GPa$, $G = 80.8GPa$,

$$R_e = 215MPa, \sigma^{z \text{ programu Robot}} = 230.90 MPa$$

błąd; **7.3 %**



Podstawy teorii wyężenia materiałów komórkowych w oparciu o energetyczne kryteria stanów granicznych

1. Omówienie energetycznego podejścia do kryteriów wyężenia
2. Opracowanie analitycznego sposobu wyznaczania gęstości granicznych energii sprężystych dla struktur komórkowych
3. Przedstawienie energetycznego kryterium J. Rychlewskiego dla sprężystych stanów własnych przy jednoosiowym rozciąganiu wzdłuż dowolnego kierunku „n” w płaszczyźnie podstawy elementarnej komórki
4. Analiza rozkładu gęstości energii granicznych dla sprężystych stanów własnych z punktu widzenia zmiany sztywności elementów struktury komórkowej
5. Numeryczna weryfikacja proponowanego opisu deformacji struktur komórkowych
6. Wykorzystanie obliczonych gęstości granicznych energii sprężystych do energetycznego kryterium dla poszczególnych stanów własnych
7. Porównanie otrzymanych rezultatów z danymi prezentowanymi w literaturze
8. Podsumowanie uzyskanych rezultatów i sformułowanie wniosków oraz założeń przydatnych do opracowania podstaw projektowania materiałów komórkowych

etap w przygotowaniu

Wykorzystanie obliczonych gęstości granicznych energii sprężystych do energetycznego kryterium dla poszczególnych stanów własnych

Omówienie realizacji na przykładzie: Y. A. Arramon et al., 2000

$$2 \lambda_A \Phi_T^{(A)} = (\sigma_T^{(A)})^2,$$

gęstości granicznych energii

$$2 \lambda_A \Phi_C^{(A)} = (\sigma_C^{(A)})^2$$

postulowane kryterium:

- w przestrzeni stanów własnych

$$(\sigma_T^{(A)} - \sigma_T^{(A)}) (\sigma_C^{(A)} - \sigma_C^{(A)}) = 0$$

gdzie:

$$\sigma_T^{(A)} = \sigma_{\max}^{(A)}, \quad \sigma_C^{(A)} = \sigma_{\min}^{(A)},$$

$A = 1, \dots, K$ kolejny stan własny

- w przestrzeni naprężeń głównych

$$(\sigma_T^{(P)} - \sigma_T^{(P)}) (\sigma_C^{(P)} - \sigma_C^{(P)}) = 0$$

gdzie:

$$\sigma_T^{(P)} = \sigma_{\max}^{(P)}, \quad \sigma_C^{(P)} = \sigma_{\min}^{(P)},$$

$$\sigma^{(I)} = T_1, \quad \sigma^{(II)} = T_2, \quad \sigma^{(III)} = T_3$$

Wykorzystując dane doświadczalne dla tektury (Y. A. Arramon et al., 2000)

$$E_1 = 3510 \text{ MPa}, \quad E_2 = 3510 \text{ MPa}, \quad E_3 = 6930 \text{ MPa}, \quad \nu_{13} = 0.15,$$

$$\nu_{23} = 0.15, \quad \nu_{12} = 0.3, \quad G_{23} = 1700 \text{ MPa}, \quad G_{13} = 1700 \text{ MPa}, \quad G_{12} = 1500 \text{ MPa}$$

Tensor sztywności

$$S = \begin{bmatrix} 4220 & 1520 & 1700 & 0 & 0 & 0 \\ 1520 & 4220 & 1700 & 0 & 0 & 0 \\ 1700 & 1700 & 7940 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1700 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1500 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Wartości własne

$$\lambda = \begin{bmatrix} 9480 \\ 4200 \\ 2700 \\ 1700 \\ 1700 \\ 1500 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Wektory własne

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0.382 \\ 0.382 \\ 0.841 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} -0.594 \\ -0.594 \\ 0.54 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_4, \omega_5, \omega_6 \text{ pominięto}$$

Powierzchnie graniczne dla poszczególnych stanów własnych;

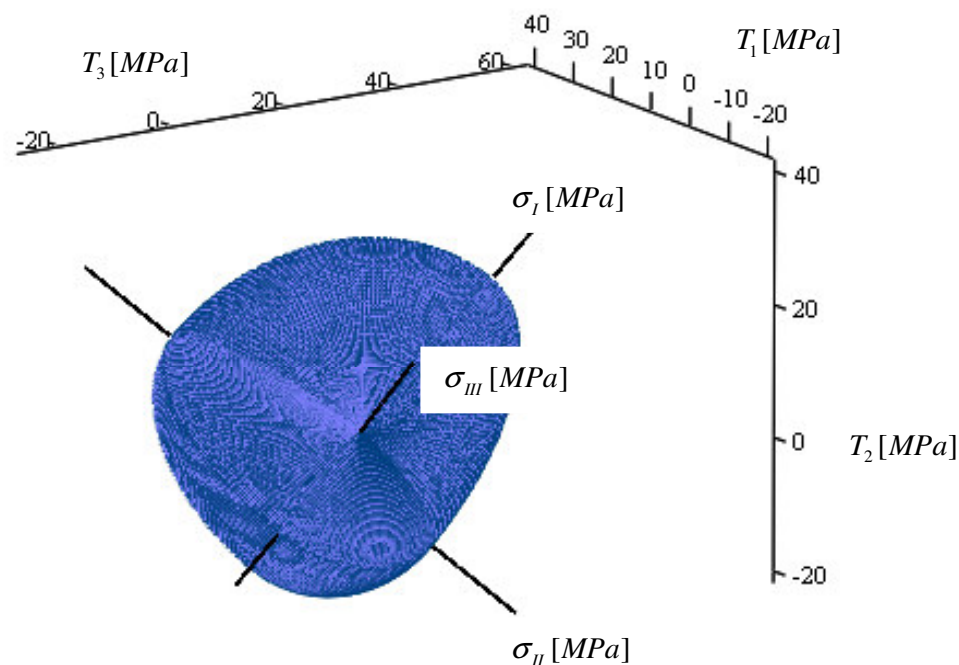
$$(0.382T_1 + 0.382T_2 + 0.841T_3 - 47.1)(0.382T_1 + 0.382T_2 + 0.841T_3 + 16.8) = 0$$

$$(0.595T_1 + 0.595T_2 - 0.54T_3 - 18.1)(0.595T_1 + 0.595T_2 - 0.54T_3 + 30.3) = 0$$

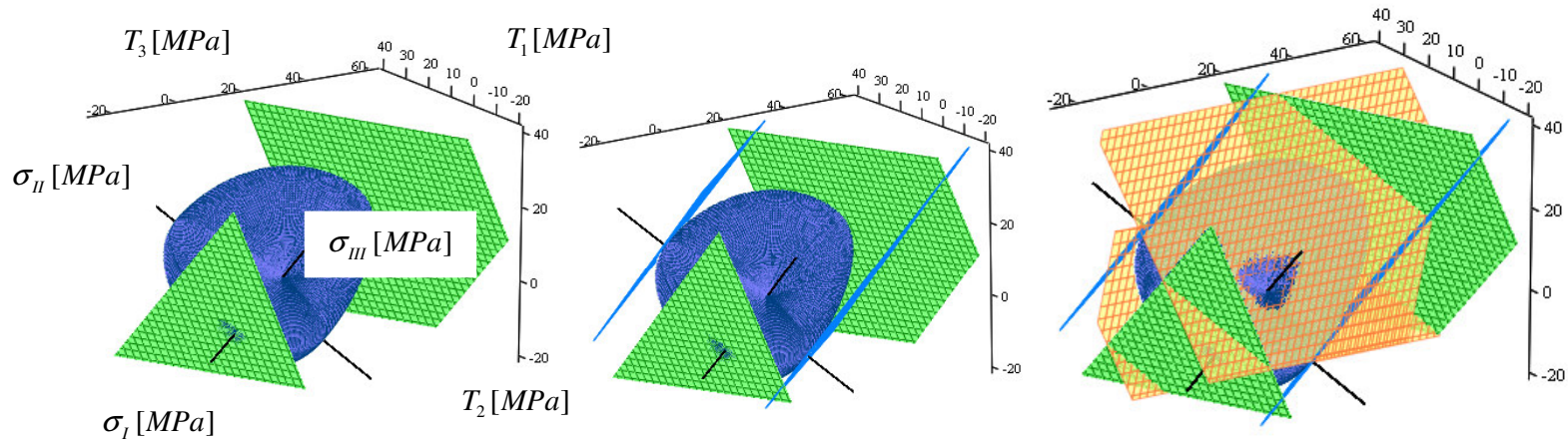
$$(0.707T_1 - 0.707T_2 - 21.6)(0.707T_1 - 0.707T_2 + 9.19) = 0$$

Powierzchnie graniczne na podstawie kryteriów:

- Granicznych energii dla sprzężonych stanów własnych

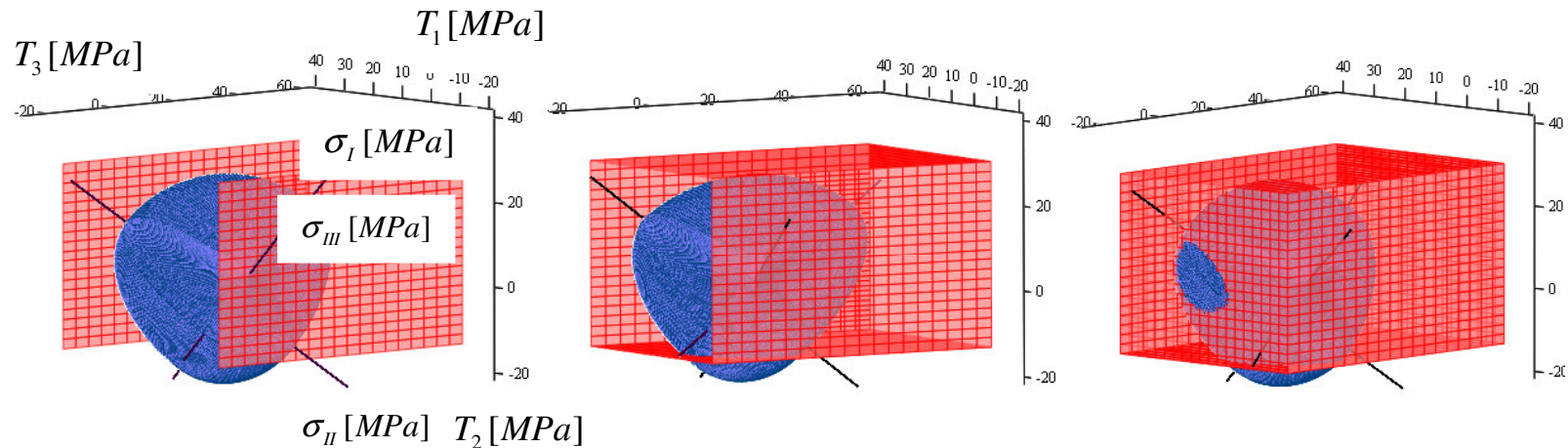


- Granicznych energii dla poszczególnych stanów własnych

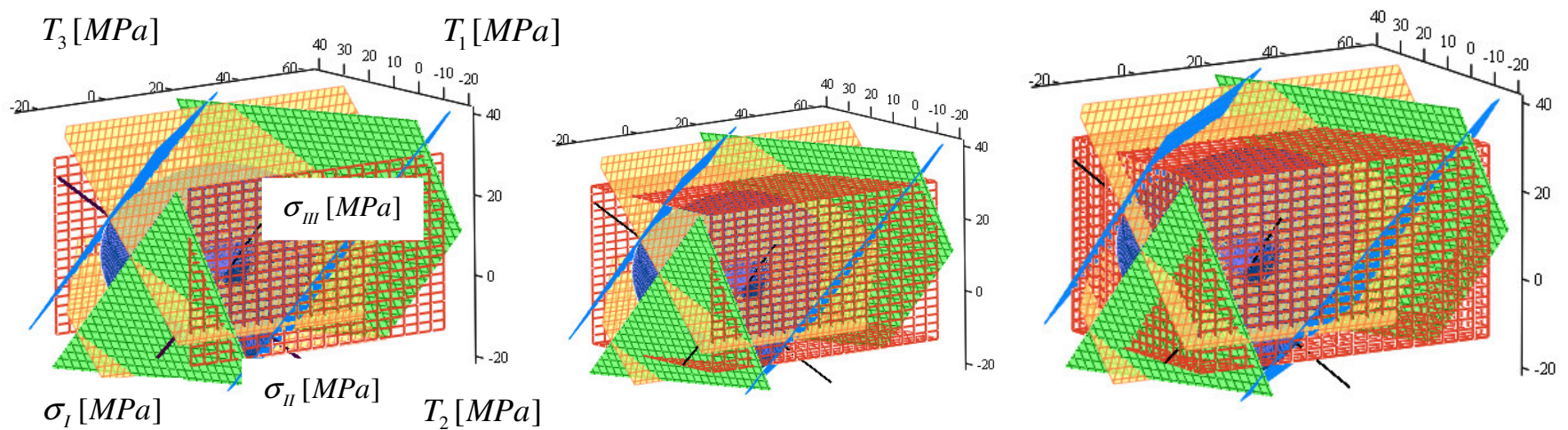


- Granicznych naprężeń głównych

$T_{1r} = 36 \text{ MPa}$, $T_{1s} = 18 \text{ MPa}$, $T_{2r} = 30.5 \text{ MPa}$, $T_{2s} = 13 \text{ MPa}$, $T_{3r} = 56 \text{ MPa}$, $T_{3s} = 20 \text{ MPa}$

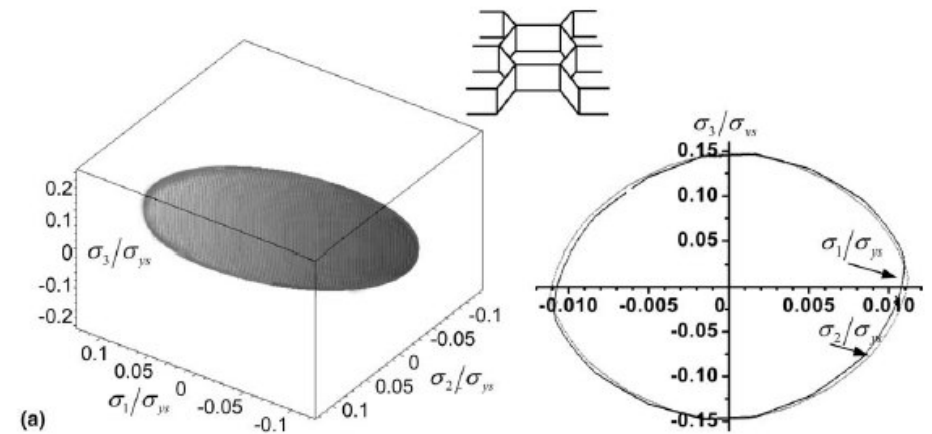
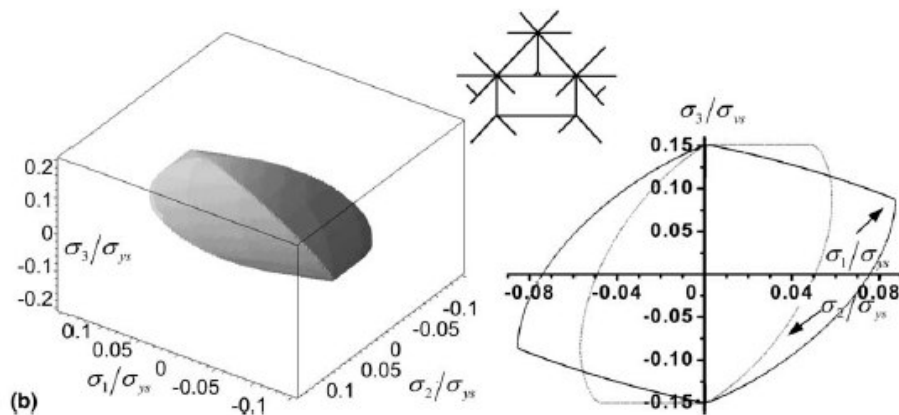
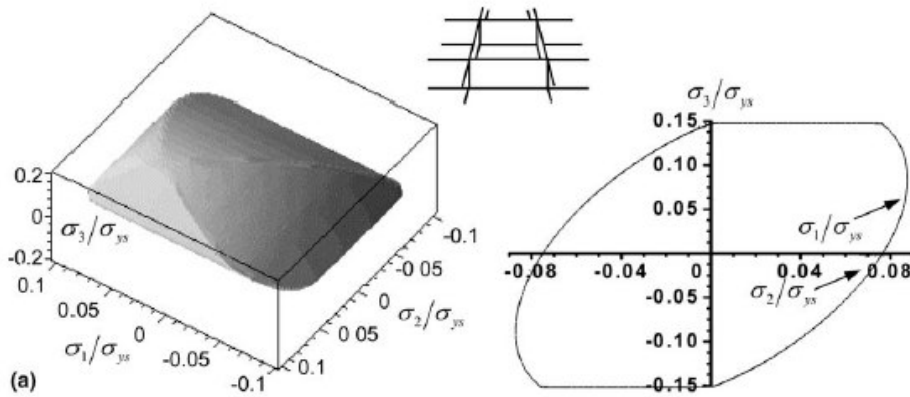


- Powierzchnia graniczna powstała w wyniku złożenia ww. kryteriów



Porównanie otrzymanych rezultatów z danymi prezentowanymi w literaturze

stop Cu-1%Ni, $E_s = 117 \text{ GPa}$, $G_s = 45 \text{ GPa}$, $R_e = 112 \text{ MPa}$ (D. L. McDowell et al., 2005)



stop 18Ni-8.5Co-3.3Mo-0.2Ti-70Fe - **18Ni(200)**

8×8

$$\sigma_{z \text{ doswiadczenia}}^{gr} = 105 \text{MPa}$$

$$\sigma_{M.L. McDowell}^{gr} = 145 \text{MPa}$$

$$\sigma_{z \text{ doswiadczenia}}^{gr} = 68 \text{MPa}$$

$$\sigma_{M.L. McDowell}^{gr} = 202 \text{MPa}$$

stop 18Ni-12Co-4.8Mo-1.4Ti-63.8Fe - **18Ni(350)**

8×8

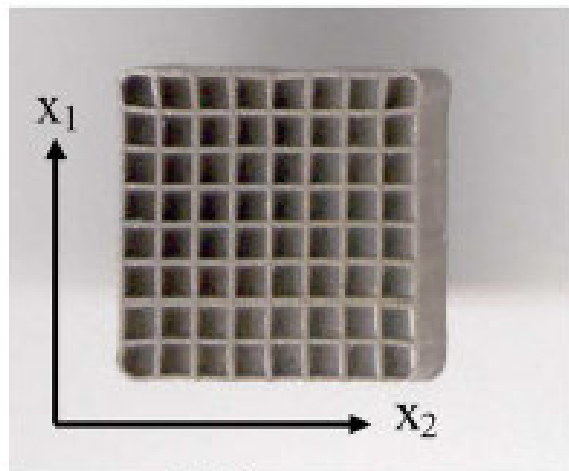
$$\sigma_{z \text{ doswiadczenia}}^{gr} = 105 \text{MPa}$$

$$\sigma_{M.L. McDowell}^{gr} = 201 \text{MPa}$$

$t = 0.23 \text{mm}$, $l = 1.84 \text{mm}$

5×5

(D. L. McDowell et al., 2004)



In-Plane

Podsumowanie uzyskanych rezultatów i sformułowanie wniosków oraz założeń przydatnych do opracowania podstaw projektowania materiałów komórkowych

Literatura

- [1] Y. A. Arramon, M. M. Mehrabadi, D. W. Martin, S. C. Cowin: A multidimensional anisotropic strength criterion based on Kelvin modes, *International Journal of Solids and Structures*, 37 (2000) 2915-2935
- [2] M. F. Ashby, D. R. H. Jones: *Materiały inżynierskie, tom 1: Właściwości i zastosowania, tom 2: Kształtowanie struktury i właściwości, dobór materiałów*, WNT, Warszawa 1995
- [3] W. T. Burzyński: *Dzieła wybrane, T I, II*, PWN, Warszawa 1982
- [4] L. J. Gibson, M. F. Ashby: *Cellular solids: Structure and properties*, Cambridge University Press 1997
- [5] A. M. Hayes, A. Wang, B. M. Dempsey, D. L. McDowell: *Mechanics of linear cellular alloys*, *Mechanics of Materials* 36 (2004) 691-713
- [6] M. Janus-Michalska, R. B. Pęczerski: *Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling*, *Technische Mechanik* 2003, 23, 234-244
- [7] M. M. Mehrabadi, S. C. Cowin: *Eigentensors of linear anisotropic elastic materials*, *Mech. appl. Math.* 1990 Vol 43, 15-41
- [8] J. Ostrowska-Maciejewska, K. Kowalczyk-Gajewska: *Matematyczne podstawy anizotropii sprężystej z przykładami*, *Wykłady w Katedrze Wytrzymałości Materiałów, IMB PK*, 22 03 2004
- [9] J. Rychlewski: *Elastic energy decomposition and limit criteria*, *Uspekhi Mekh. – Advances in Mech.* 1984, t.7, s. 51-80 (po rosyjsku)
- [10] J. Rychlewski: *Unconventional approach to linear elasticity*, *Arch. Mech.*, 47, 149 – 171, 1995
- [11] A. J. Wang, D. L. McDowell: *In-Plane Stiffness and Yield Strength of Periodic Metal Honeycombs*, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 2004
- [12] A. J. Wang, D. L. McDowell: *Yield surfaces of various periodic metal honeycombs at intermediate relative density*, *International Journal of Plasticity*, 2005
- [13] **SPECIAL ISSUE ON MECHANICS OF CELLULAR AND POROUS MATERIALS**
Mechanics of Materials 36 (2004) – 9 prac

$$\frac{\Phi_I^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr} + \Phi_V^{gr} + \Phi_{VI}^{gr}} = \frac{1.225 \cdot 10^{21}}{6.434 \cdot 10^{21} + 3.503 \cdot 10^{19} k^2 + 3.503 \cdot 10^{19} k^2 v}$$

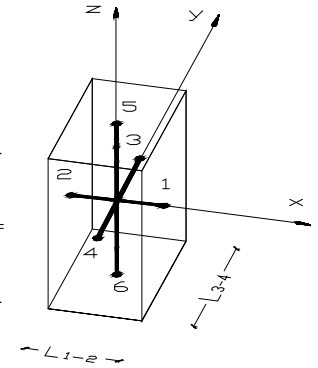
$$\frac{\Phi_{II}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr} + \Phi_V^{gr} + \Phi_{VI}^{gr}} = \frac{2.083 \cdot 10^{21}}{6.434 \cdot 10^{21} + 3.503 \cdot 10^{19} k^2 + 3.503 \cdot 10^{19} k^2 v}$$

$$\frac{\Phi_{III}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr} + \Phi_V^{gr} + \Phi_{VI}^{gr}} = \frac{2.206 \cdot 10^{21}}{6.434 \cdot 10^{21} + 3.503 \cdot 10^{19} k^2 + 3.503 \cdot 10^{19} k^2 v}$$

$$\frac{\Phi_{IV}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr} + \Phi_V^{gr} + \Phi_{VI}^{gr}} = \frac{0.4166(8.580 \cdot 10^{20} + 2.243 \cdot 10^{19} k^2 + 2.243 \cdot 10^{19} k^2 v)}{6.434 \cdot 10^{21} + 3.503 \cdot 10^{19} k^2 + 3.503 \cdot 10^{19} k^2 v}$$

$$\frac{\Phi_V^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr} + \Phi_V^{gr} + \Phi_{VI}^{gr}} = \frac{0.2007(1.425 \cdot 10^{21} + 6.333 \cdot 10^{19} k^2 + 6.333 \cdot 10^{19} k^2 v)}{6.434 \cdot 10^{21} + 3.503 \cdot 10^{19} k^2 + 3.503 \cdot 10^{19} k^2 v}$$

$$\frac{\Phi_{VI}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr} + \Phi_V^{gr} + \Phi_{VI}^{gr}} = \frac{4.499(6.128 \cdot 10^{19} + 2.884 \cdot 10^{18} k^2 + 2.884 \cdot 10^{18} k^2 v)}{6.434 \cdot 10^{21} + 3.503 \cdot 10^{19} k^2 + 3.503 \cdot 10^{19} k^2 v}$$



$$\frac{\Phi_I^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr}} = (444.4(k+10)^2 (2.500 \cdot 10^{20} + 3.700 \cdot 10^{19} k^2 + 3.700 \cdot 10^{19} k^2 v)) /$$

$$(6.312 \cdot 10^{23} k^3 + 3.846 \cdot 10^{24} k^2 + 4.183 \cdot 10^{24} k + 4.121 \cdot 10^{22} k^4 v^2 + 2.239 \cdot 10^{25} +$$

$$+ 3.592 \cdot 10^{24} k^2 v + 1.205 \cdot 10^{23} k^4 v + 6.312 \cdot 10^{23} k^3 v + 7.932 \cdot 10^{22} k^4 + 3.564 \cdot 10^{21} k^5 v +$$

$$+ 8.910 \cdot 10^{19} k^6 v^2 + 1.782 \cdot 10^{21} k^5 v^2 + 1.782 \cdot 10^{20} k^6 v + 9.910 \cdot 10^{19} k^6 + 1.782 \cdot 10^{21} k^5)$$

$$\frac{\Phi_{II}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr}} = (360.4(k+10)^2 (2.500 \cdot 10^{20} + 3.700 \cdot 10^{19} k^2 + 3.700 \cdot 10^{19} k^2 v)) /$$

$$(6.312 \cdot 10^{23} k^3 + 3.846 \cdot 10^{24} k^2 + 4.183 \cdot 10^{24} k + 4.121 \cdot 10^{22} k^4 v^2 + 2.239 \cdot 10^{25} +$$

$$+ 3.592 \cdot 10^{24} k^2 v + 1.205 \cdot 10^{23} k^4 v + 6.312 \cdot 10^{23} k^3 v + 7.932 \cdot 10^{22} k^4 + 3.564 \cdot 10^{21} k^5 v +$$

$$+ 8.910 \cdot 10^{19} k^6 v^2 + 1.782 \cdot 10^{21} k^5 v^2 + 1.782 \cdot 10^{20} k^6 v + 8.910 \cdot 10^{19} k^6 + 1.782 \cdot 10^{21} k^5)$$

$$\frac{\Phi_{III}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr}} = ((7857 + 1163k^2 + 1163k^2 v)$$

$$(1.877 \cdot 10^{20} + 3.341 \cdot 10^{19} k^2 + 2.778 \cdot 10^{19} k^2 v)) /$$

$$(6.312 \cdot 10^{23} k^3 + 3.846 \cdot 10^{24} k^2 + 4.183 \cdot 10^{24} k + 4.121 \cdot 10^{22} k^4 v^2 + 2.239 \cdot 10^{25} +$$

$$+ 3.592 \cdot 10^{24} k^2 v + 1.205 \cdot 10^{23} k^4 v + 6.312 \cdot 10^{23} k^3 v + 7.932 \cdot 10^{22} k^4 + 3.564 \cdot 10^{21} k^5 v +$$

$$+ 8.910 \cdot 10^{19} k^6 v^2 + 1.782 \cdot 10^{21} k^5 v^2 + 1.782 \cdot 10^{20} k^6 v + 8.910 \cdot 10^{19} k^6 + 1.782 \cdot 10^{21} k^5)$$

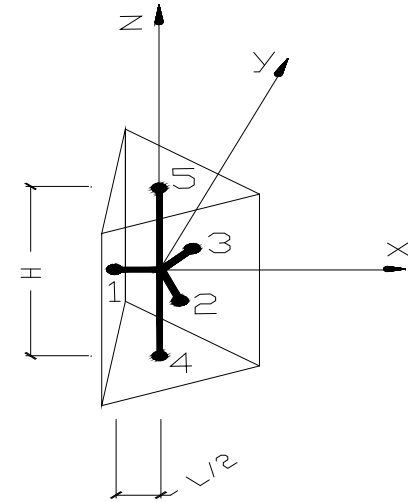
$$\frac{\Phi_{IV}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr}} = (1.287 \cdot 10^{-18} (k+10)^2 (2.500 \cdot 10^{20} + 3.700 \cdot 10^{19} k^2 + 3.700 \cdot 10^{19} k^2 v)$$

$$(2.476 \cdot 10^{19} + 1.8711 \cdot 10^{18} k^2 + 1.871 \cdot 10^{18} k^2 v)) /$$

$$(3.846 \cdot 10^{24} k^2 + 6.312 \cdot 10^{23} k^3 + 6.312 \cdot 10^{23} k^3 v + 1.205 \cdot 10^{23} k^4 v^2 + 4.121 \cdot 10^{22} k^4 v^2 +$$

$$+ 7.932 \cdot 10^{22} k^4 + 1.782 \cdot 10^{21} k^5 v^2 + 8.910 \cdot 10^{19} k^6 v^2 + 3.564 \cdot 10^{21} k^5 v + 1.782 \cdot 10^{20} k^6 v +$$

$$+ 4.183 \cdot 10^{24} k + 2.239 \cdot 10^{25} + 3.592 \cdot 10^{24} k^2 v + 1.782 \cdot 10^{21} k^5 + 8.910 \cdot 10^{19} k^6)$$



$$\frac{\Phi_I^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr}} = (2.162 \cdot 10^{-17} (1.667 \cdot 10^{20} + 2.467 \cdot 10^{19} k^2 + 2.467 \cdot 10^{19} k^2 v + 5.000 \cdot 10^{19} k)^2) /$$

$$(4.379 \cdot 10^{23} k + 2.4566 \cdot 10^{22} k^4 v^2 + 6.552 \cdot 10^{22} k^3 + 4.165 \cdot 10^{23} k^2 + 5.256 \cdot 10^{22} k^4 v +$$

$$+ 6.552 \cdot 10^{22} k^3 v + 2.800 \cdot 10^{22} k^4 + 1.051 \cdot 10^{20} k^5 + 2.593 \cdot 10^{19} k^6 + 1.105 \cdot 10^{24} +$$

$$+ 3.283 \cdot 10^{23} k^2 v + 1.051 \cdot 10^{20} k^5 v^2 + 2.593 \cdot 10^{19} k^6 v^3 + 2.102 \cdot 10^{20} k^5 v + 7.779 \cdot 10^{19} k^6 v^2 + 7.779 \cdot 10^{19} k^6 v)$$

$$\frac{\Phi_{II}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr}} = (3.896 \cdot 10^{-18} (1.667 \cdot 10^{20} + 2.467 \cdot 10^{19} k^2 + 2.467 \cdot 10^{19} k^2 v +$$

$$+ 5.000 \cdot 10^{19} k)^2) /$$

$$(4.379 \cdot 10^{23} k + 2.4566 \cdot 10^{22} k^4 v^2 + 6.552 \cdot 10^{22} k^3 + 4.165 \cdot 10^{23} k^2 + 5.256 \cdot 10^{22} k^4 v +$$

$$+ 6.552 \cdot 10^{22} k^3 v + 2.800 \cdot 10^{22} k^4 + 1.051 \cdot 10^{20} k^5 + 2.593 \cdot 10^{19} k^6 + 1.105 \cdot 10^{24} +$$

$$+ 3.283 \cdot 10^{23} k^2 v + 1.051 \cdot 10^{20} k^5 v^2 + 2.593 \cdot 10^{19} k^6 v^3 + 2.102 \cdot 10^{20} k^5 v +$$

$$+ 7.779 \cdot 10^{19} k^6 v^2 + 7.779 \cdot 10^{19} k^6 v)$$

$$\frac{\Phi_{III}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr}} = ((2252 + 333.3k^2 + 333.3k^2 v)$$

$$(1.667 \cdot 10^{20} + 3.467 \cdot 10^{19} k^2 + 2.467 \cdot 10^{19} k^2 v)) /$$

$$(4.379 \cdot 10^{23} k + 2.4566 \cdot 10^{22} k^4 v^2 + 6.552 \cdot 10^{22} k^3 + 4.165 \cdot 10^{23} k^2 + 5.256 \cdot 10^{22} k^4 v +$$

$$+ 6.552 \cdot 10^{22} k^3 v + 2.800 \cdot 10^{22} k^4 + 1.051 \cdot 10^{20} k^5 + 2.593 \cdot 10^{19} k^6 + 1.105 \cdot 10^{24} +$$

$$+ 3.283 \cdot 10^{23} k^2 v + 1.051 \cdot 10^{20} k^5 v^2 + 2.593 \cdot 10^{19} k^6 v^3 + 2.102 \cdot 10^{20} k^5 v + 7.779 \cdot 10^{19} k^6 v^2 + 7.779 \cdot 10^{19} k^6 v)$$

$$\frac{\Phi_{IV}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr} + \Phi_{IV}^{gr}} = ((7.559 \cdot 10^{-19} + 4.261 \cdot 10^{-20} k^2 + 4.261 \cdot 10^{-20} k^2 v)$$

$$(1.667 \cdot 10^{20} + 2.467 \cdot 10^{19} k^2 + 2.467 \cdot 10^{19} k^2 v + 5.000 \cdot 10^{19} k)^2) /$$

$$(4.379 \cdot 10^{23} k + 2.4566 \cdot 10^{22} k^4 v^2 + 6.552 \cdot 10^{22} k^3 + 4.165 \cdot 10^{23} k^2 + 5.256 \cdot 10^{22} k^4 v +$$

$$+ 6.552 \cdot 10^{22} k^3 v + 2.800 \cdot 10^{22} k^4 + 1.051 \cdot 10^{20} k^5 + 2.593 \cdot 10^{19} k^6 + 1.105 \cdot 10^{24} +$$

$$+ 3.283 \cdot 10^{23} k^2 v + 1.051 \cdot 10^{20} k^5 v^2 + 2.593 \cdot 10^{19} k^6 v^3 + 2.102 \cdot 10^{20} k^5 v + 7.779 \cdot 10^{19} k^6 v^2 + 7.779 \cdot 10^{19} k^6 v)$$

