

ENERGETYCZNE KRYTERIUM STANÓW GRANICZNYCH DLA MATERIAŁÓW KOMÓRKOWYCH

Piotr Kordzikowski
Małgorzata Janus-Michalska
Ryszard B. Pęcherski

Katedra Wytrzymałości Materiałów
Instytut Mechaniki Budowli
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Krakowska

KRAKÓW – LISTOPAD 2004

1. WSTĘP

Celem pracy jest zastosowanie energetycznego kryterium J. Rychlewskiego [1, 2] do określenia stanu granicznego w materiałach komórkowych. Przez stan graniczny rozumiemy osiągnięcie liniowej sprężystości. Wykorzystany będzie model efektywny sprężystego zachowania się materiałów komórkowych, sformułowany w pracy [3], dla pianki metalicznej o elementarnej komórce w kształcie czworościanu oraz materiałów o elementarnej komórce w kształcie sześciianu, prostopadłościanu, pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego i sześciokąta foremego. Stanowi to podstawę do prezentowanej analizy. Przyjęto struktury komórkowe o powtarzającym się regularnym układzie prętów połączonych w sztywnym węźle, które mogą odkształcać się sprężysto pod wpływem sił osiowych lub momentów gnących i sił poprzecznych.

W omawianej pracy zostanie przedstawiony

- ✓ analityczny sposób wyznaczenia gęstości energii krytycznych
- ✓ sposób wizualizacji zgromadzonej energii w poszczególnych stanach własnych przy jednoosiowym rozciąganiu wzdłuż kierunku „ n ” zaproponowany przez M. Janus-Michalską

Do rozważań przyjęto struktury komórkowe o powtarzającym się elemencie: sześciianu, prostopadłościanu, pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego i sześciokąta foremnego.

Przeprowadzono również analizę rozkładu sztywności struktury z punktu widzenia gęstości energii krytycznych. Wstępne wyniki dla komórki sześciiennej przedstawiono w [4]. W pracy wykorzystano podstawy matematyczne zawarte w [5].

2. LITERATURA

- [1] J. Rychlewski: Elastic energy decomposition and limit criteria, Uspekhi Mekh. - Advances in Mech., 1984, t. 7, s. 51÷80 (po rosyjsku).
- [2] J. Rychlewski: Unconventional approach to linear elasticity, Arch. Mech., 1995, t. 47, s. 149÷171.
- [3] M. Janus-Michalska, R. B. Pęcherski: Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling Technische Mechanik 2003, 23, 234-244
- [4] P. Kordzikowski, M. Janus-Michalska, R. B. Pęcherski: Analiza wpływu wytrzymałości prętów sześcienniej struktury komórkowej na rozkład granicznych energii, Rudy i Metale Nieżelazne, R49, No. 3, 114-120, 2004
- [5] J. Ostrowska-Maciejewska, K. Kowalczyk-Gajewska: Matematyczne podstawy anizotropii sprężystej z przykładami, Wykłady w Katedrze Wytrzymałości Materiałów, Instytut Mechaniki Budowli PK, 22 marzec 2004.

3. KRYTERIUM ENERGETYCZNE DLA STRUKTUR KOMÓRKOWYCH

Energetyczne kryterium wyężenia sformułowane przez

J. Rychlewskiego [1,2]:

$$\frac{\Phi(\sigma_1)}{\Phi^{gr}_I} + \frac{\Phi(\sigma_2)}{\Phi^{gr}_{II}} + \frac{\Phi(\sigma_3)}{\Phi^{gr}_{III}} + \frac{\Phi(\sigma_4)}{\Phi^{gr}_{IV}} + \frac{\Phi(\sigma_5)}{\Phi^{gr}_V} + \frac{\Phi(\sigma_6)}{\Phi^{gr}_{VI}} \leq 1$$

4. STANY WŁASNE I GĘSTOŚCI ENERGII KRYTYCZNYCH

Do rozważań przyjęto model belkowy o sztywnym węźle dla powtarzalnej komórki

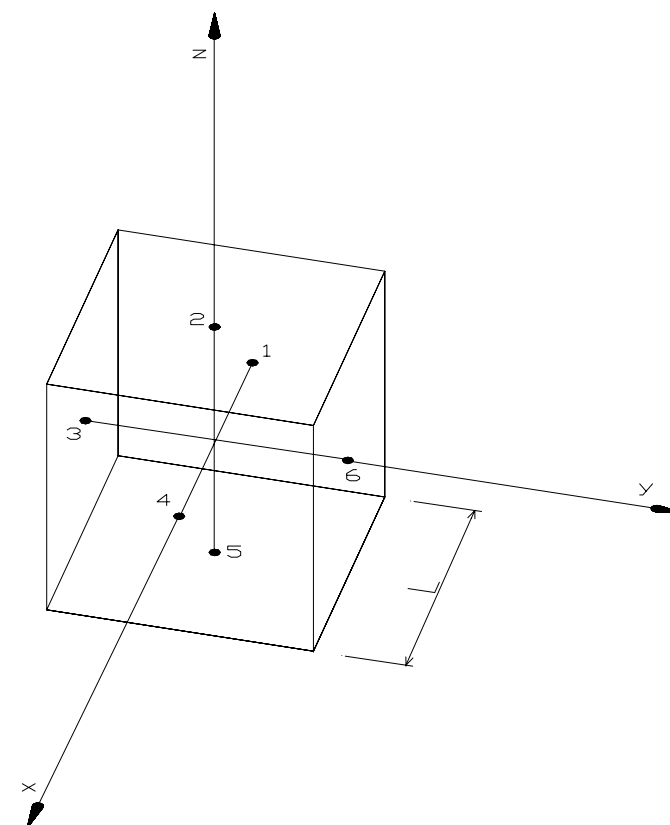
➤ KOMÓRKA SZEŚCIENNA

PRZYJĘTE OZNACZENIA

L - wymiar elementów belkowych (szkieletu)

S_n - sztywność elementów belkowych na rozciąganie

S_τ - sztywność elementów belkowych na zginanie



- WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY SZTYWNOŚCI

$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{s_n}{2L}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{s_n}{2L}$$

$$\lambda_{III} = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \frac{2s_\tau}{4L}$$

- STANY WŁASNE I GĘSTOŚCI ENERGII KRYTYCZNYCH

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \frac{-AR_e}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-AR_e}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-AR_e}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I} 3 \left(\frac{AR_e}{L^2} \right)^2$$

$$\omega_{2,3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{A R_e}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \frac{A R_e}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} \frac{A R_e}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}} \frac{2}{3} \left(\frac{A R_e}{L^2} \right)^2$$

$$\omega_{4,5,6} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2} I R_e}{h L^3} & \frac{\sqrt{2} I R_e}{h L^3} \\ \frac{\sqrt{2} I R_e}{h L^3} & 0 & \frac{\sqrt{2} I R_e}{h L^3} \\ \frac{\sqrt{2} I R_e}{h L^3} & \frac{\sqrt{2} I R_e}{h L^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{III}} 6 \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L^6}$$

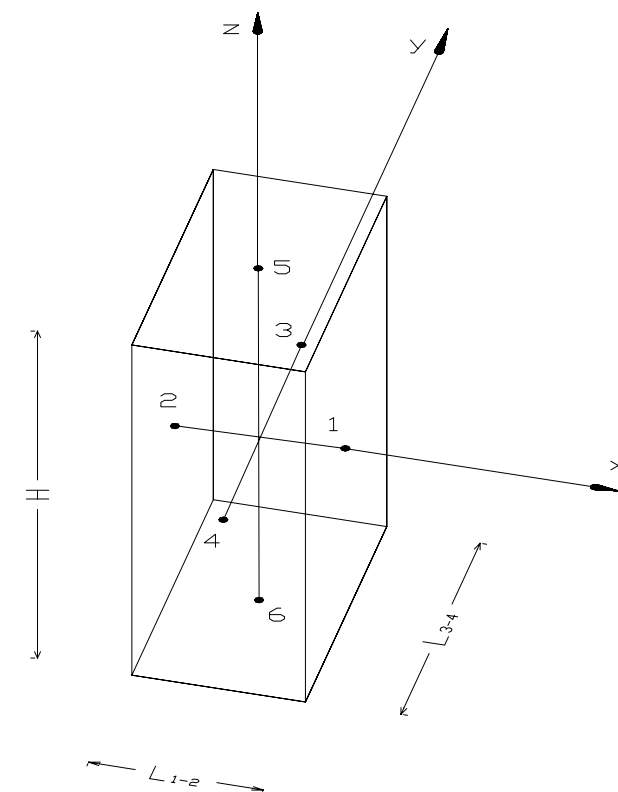
R_e - granica plastyczności,

h - maksymalna odległość włókien górnych lub dolnych elementu belkowego,

A - pole przekroju elementu belkowego,

I - moment bezwładności elementu belkowego

➤ KOMÓRKA PROSTOPADŁOŚCIENNA



PRZYJĘTE OZNACZENIA

L_{1-2} , L_{3-4} , H - wymiary elementów belkowych (szkieletu)

S_{n1-2} , S_{n3-4} , S_{n5-6} - sztywności elementów belkowych na rozciąganie

$S_{\tau 1-2}$, $S_{\tau 3-4}$, $S_{\tau 5-6}$ - sztywności elementów belkowych na zginanie

$$L_{1-2} \leq L_{3-4} \leq H$$

- WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY SZTYWNOŚCI

$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{L_{1-2} s_{n1-2}}{2 L_{3-4} H}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_2 = \frac{L_{3-4} s_{n3-4}}{2 L_{1-2} H}$$

$$\lambda_{III} = \lambda_3 = \frac{H s_{n5-6}}{2 L_{1-2} L_{3-4}}$$

$$\lambda_{IV} = \lambda_4 = \frac{\frac{2 H^2 s_{\tau 5-6}}{L_{3-4}^2 s_{\tau 3-4} + H^2 s_{\tau 5-6}} \frac{L_{3-4}}{2} s_{\tau 3-4}}{L_{1-2} H}$$

$$\lambda_V = \lambda_5 = \frac{\frac{2 H^2 s_{\tau 5-6}}{L_{1-2}^2 s_{\tau 1-2} + H^2 s_{\tau 5-6}} \frac{L_{1-2}}{2} s_{\tau 1-2}}{L_{3-4} H}$$

$$\lambda_{VI} = \lambda_6 = \frac{\frac{2 L_{3-4}^2 s_{\tau 3-4}}{L_{3-4}^2 s_{\tau 3-4} + L_{1-2}^2 s_{\tau 1-2}} \frac{L_{1-2}}{2} s_{\tau 1-2}}{L_{3-4} H}$$

- STANY WŁASNE I GĘSTOŚCI ENERGII KRYTYCZNYCH

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \frac{A R_e}{L_{3-4} H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I} \left(\frac{A R_e}{L_{3-4} H} \right)^2$$

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A R_e}{L_{1-2} H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}} \left(\frac{A R_e}{L_{1-2} H} \right)^2$$

$$\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A R_e}{L_{1-2} L_{3-4}} \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{III}} \left(\frac{A R_e}{L_{1-2} L_{3-4}} \right)^2$$

$$\omega_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \frac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{H}}{L_{1-2} L_{3-4}} \\ 0 & \sqrt{2} \frac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{H}}{L_{1-2} L_{3-4}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{IV}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{IV}} \delta \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 H^2}$$

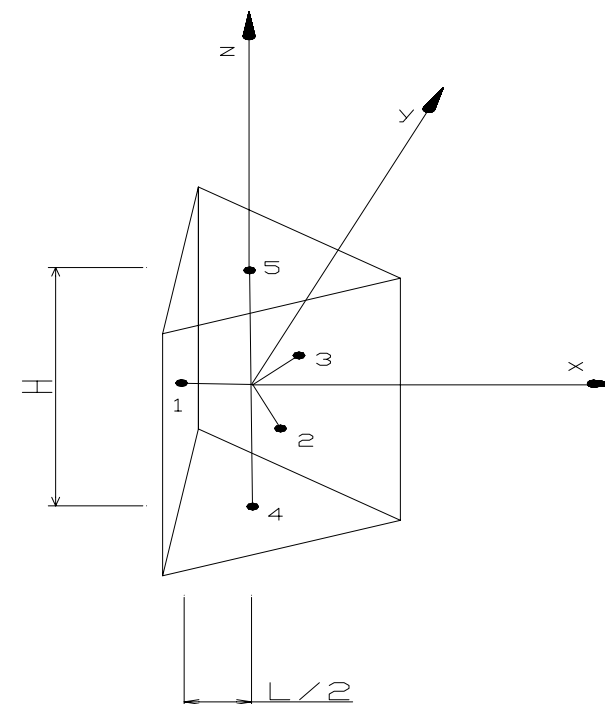
$$\omega_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \frac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{H}}{L_{1-2} L_{3-4}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} \frac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{H}}{L_{1-2} L_{3-4}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_V^{gr} = \frac{1}{\lambda_V} \delta \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 H^2}$$

$$\omega_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \frac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{L_{3-4}}}{L_{1-2} H} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} \frac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{L_{3-4}}}{L_{1-2} H} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{VI}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{VI}} \delta \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 H^2}$$

➤ KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O PODSTAWIE TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO



PRZYJĘTE OZNACZENIA

L, H - wymiary elementów belkowych (szkieletu)

S_{nL}, S_{nH} - sztywności elementów belkowych na rozciąganie

$S_{\tau L}, S_{\tau H}$ - sztywności elementów belkowych na zginanie

$$L \leq H$$

- WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY SZTYWNOŚCI

$$\lambda_{I} = \lambda_{1} = \frac{\sqrt{3} s_{nL}}{6 H}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_{3} = \frac{2 \sqrt{3} H s_{nH}}{9 L^2}$$

$$\lambda_{III} = \lambda_{2} = \lambda_{6} = \frac{\sqrt{3} s_{nL} s_{\tau L}}{3 H (s_{nL} + s_{\tau L})}$$

$$\lambda_{IV} = \lambda_{4} = \lambda_{5} = \frac{4 \sqrt{3} H s_{\tau H} s_{\tau L}}{3 (3 L^2 s_{\tau L} + 4 H^2 s_{\tau H})}$$

- STANY WŁASNE I GĘSTOŚCI ENERGII KRYTYCZNYCH

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3} A R_e}{3 L H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{3} A R_e}{3 L H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I} \frac{2}{3} \frac{A^2 R_e^2}{L^2 H^2}$$

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-4\sqrt{3} A R_e}{9 L^2} \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}} \frac{16}{27} \frac{A^2 R_e^2}{L^4}$$

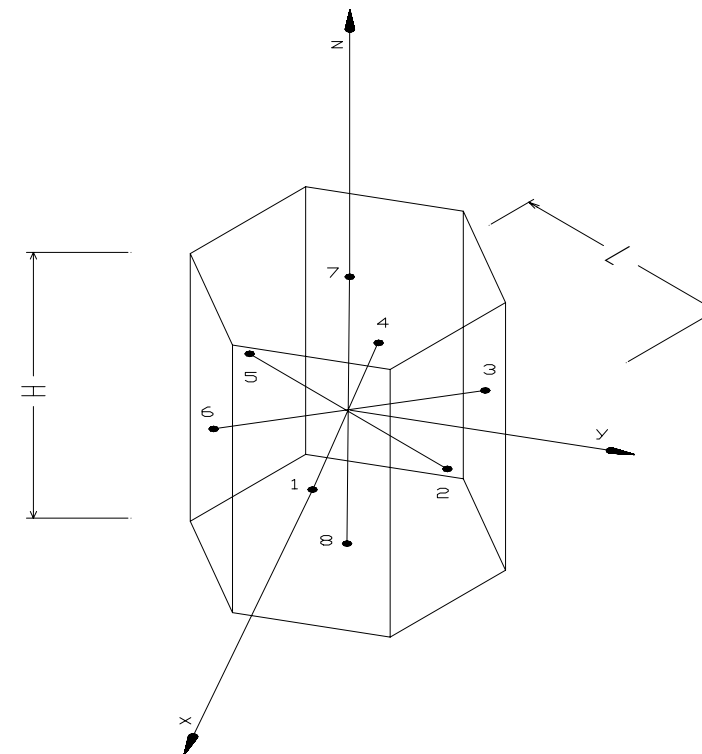
$$\omega_{3,4} = \begin{bmatrix} \frac{I A R_e (4\sqrt{3}-1)}{L H (4I+L h A)} & \frac{2\sqrt{3} I A R_e}{3 L H (4I+L h A)} & 0 \\ \frac{2\sqrt{3} I A R_e}{3 L H (4I+L h A)} & -\frac{I A R_e (4\sqrt{3}-1)}{L H (4I+L h A)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{III}} \frac{2}{9} \frac{I^2 A^2 R_e^2 (61-8\sqrt{3})}{H^2 L^2 (4I+L h A)^2}$$

$$\omega_{5,6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4\sqrt{3} I R_e}{9 L^2 h H} \\ 0 & 0 & \frac{4\sqrt{3} I R_e}{9 L^2 h H} \\ \frac{4\sqrt{3} I R_e}{9 L^2 h H} & \frac{4\sqrt{3} I R_e}{9 L^2 h H} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{IV}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{IV}} \frac{64}{27} \frac{I^2 R_e^2}{H^2 L^4 h^2}$$

➤ KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O PODSTAWIE SZEŚCIOKĄTA FOREMNEGO



PRZYJĘTE OZNACZENIA

L, H - wymiary elementów belkowych (szkieletu)

S_{nL}, S_{nH} - sztywności elementów belkowych na rozciąganie

$S_{\tau L}, S_{\tau H}$ - sztywności elementów belkowych na zginanie

- WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY SZTYWNOŚCI

$$\lambda_{I} = \lambda_{1} = \frac{\sqrt{3} s_{nL}}{2 H}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_{3} = \frac{\sqrt{3} H s_{nH}}{3 L^2}$$

$$\lambda_{III} = \lambda_{2} = \lambda_{6} = \frac{\sqrt{3} (s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{4 H}$$

$$\lambda_{IV} = \lambda_{4} = \lambda_{5} = \frac{2 \sqrt{3} H s_{\tau H} s_{\tau L}}{3 L^2 s_{\tau L} + 2 H^2 s_{\tau H}}$$

- STANY WŁASNE I GĘSTOŚCI ENERGII KRYTYCZNYCH

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3} A R_e}{L H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{3} A R_e}{L H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I} 6 \frac{A^2 R_e^2}{L^2 H^2}$$

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2\sqrt{3} A R_e}{3 L H} \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}} \frac{4}{3} \frac{A^2 R_e^2}{H^2 L^2}$$

$$\omega_{3,4} = \begin{bmatrix} \frac{2 I A R_e \sqrt{3} (s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{L H (4 I s_{nL} + L s_{\tau L} h A)} & \frac{I A R_e \sqrt{3} (s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{L H (4 I s_{nL} + L s_{\tau L} h A)} & 0 \\ \frac{I A R_e \sqrt{3} (s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{L H (4 I s_{nL} + L s_{\tau L} h A)} & -\frac{2 I A R_e \sqrt{3} (s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{L H (4 I s_{nL} + L s_{\tau L} h A)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{III}} 30 \frac{(s_{nL} + 2 s_{\tau L})^2 R_e^2 A^2 I^2}{H^2 L^2 (4 s_{nL} I + L s_{\tau L} h A)^2}$$

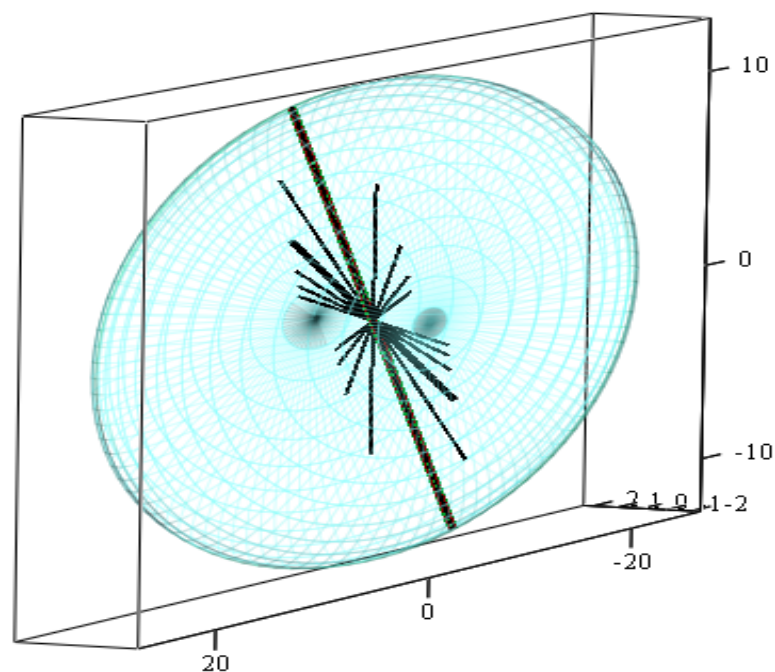
$$\omega_{5,6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3} I R_e}{3 L^2 h H} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3} I R_e}{3 L^2 h H} \\ \frac{2\sqrt{3} I R_e}{3 L^2 h H} & \frac{2\sqrt{3} I R_e}{3 L^2 h H} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \Phi_{IV}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{IV}} \frac{16}{3} \frac{I^2 R_e^2}{H^2 L^4 h^2}$$

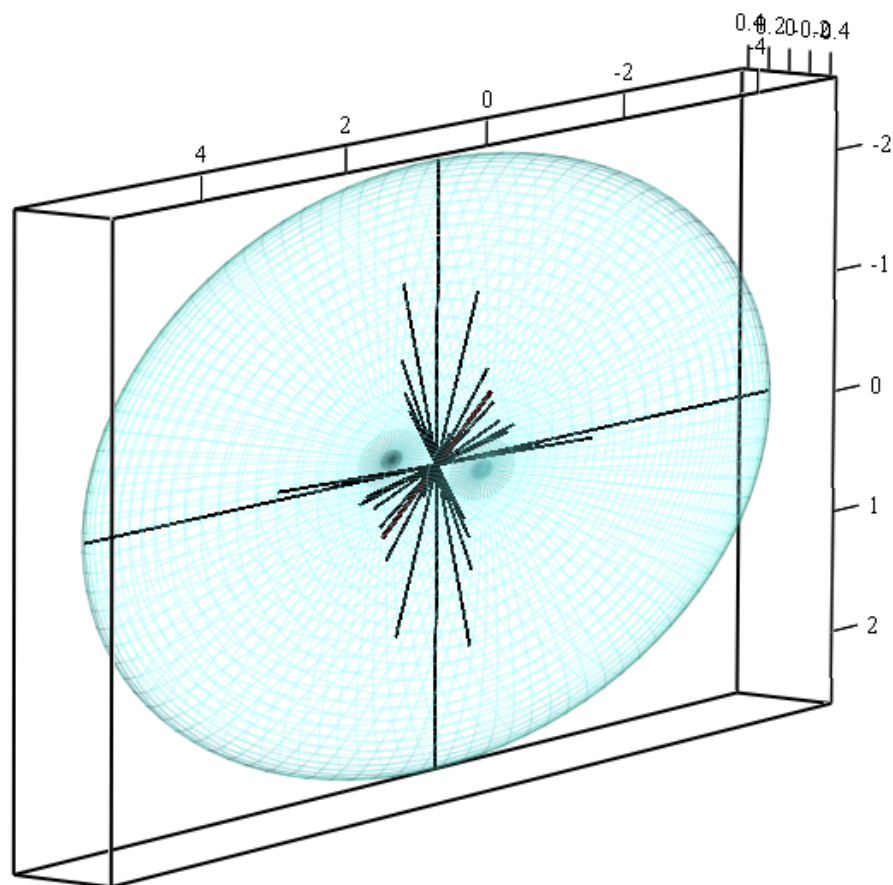
5. WIZUALIZACJA ROZKŁADU GĘSTOŚCI ENERGII W POSZCZEGÓLNYCH STANACH WŁASNYCH PRZY JEDNOOSIOWYM ROZCIĄGANIU WZDŁUŻ KIERUNKU „n”

PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA

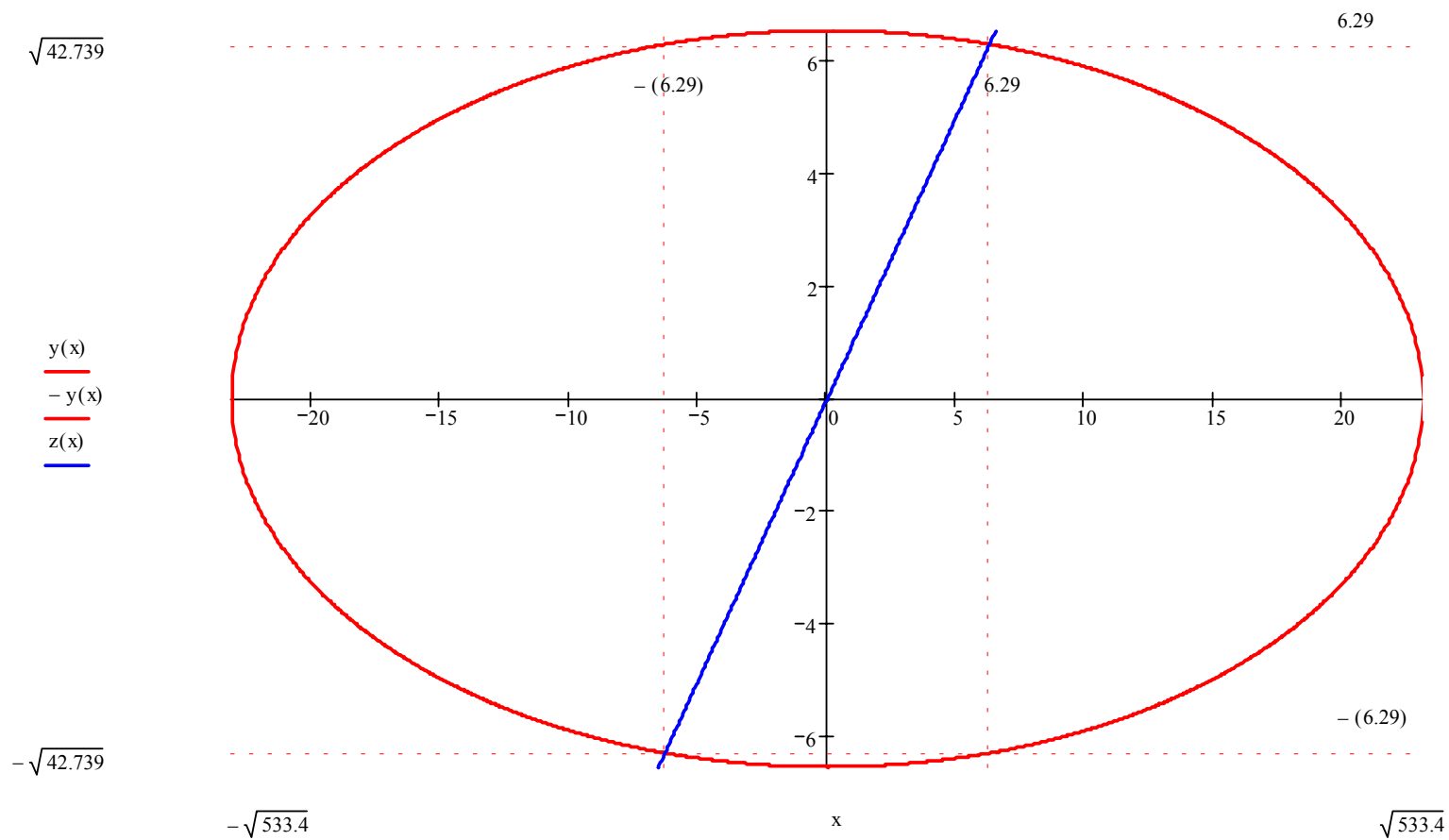
SYMETRIA KUBICZNA – *KOMÓRKA SZEŚCIENNA*



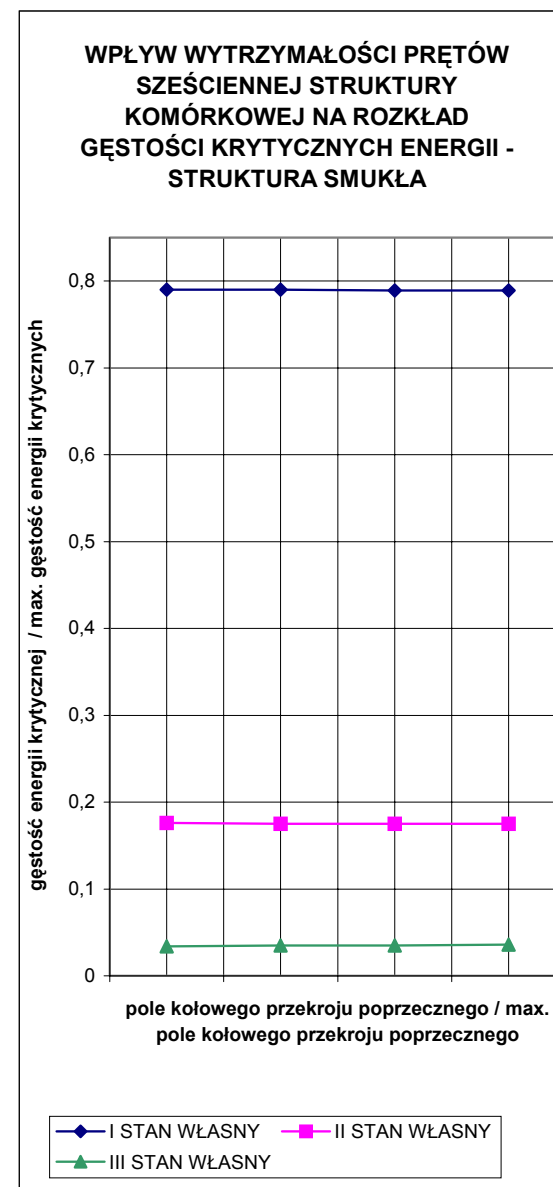
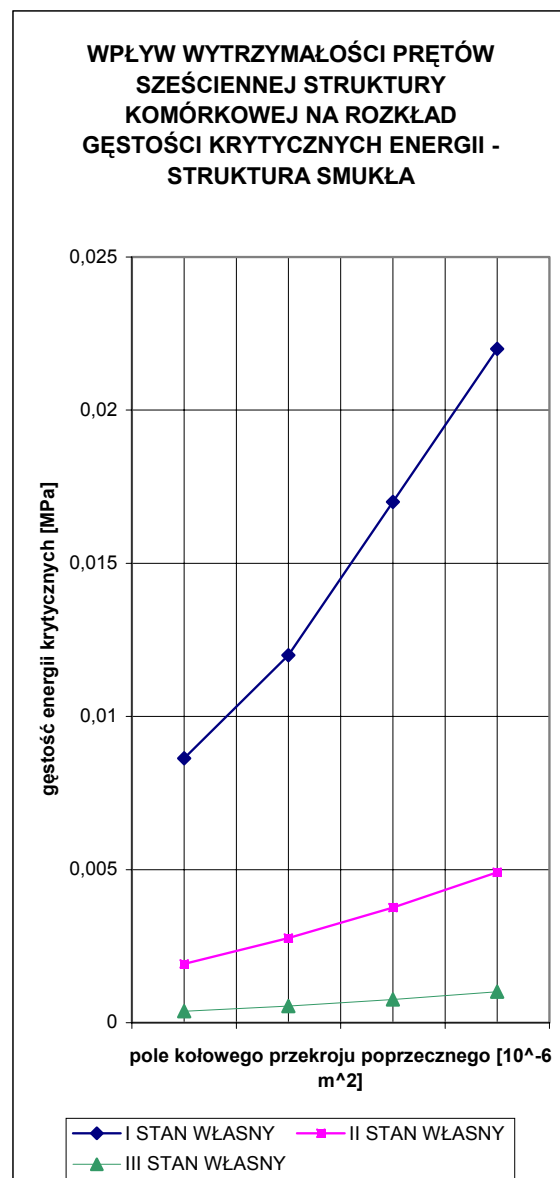
SYMETRIA ORTOTROPOWA - KOMÓRKA PROSTOPADŁOŚCIENNA



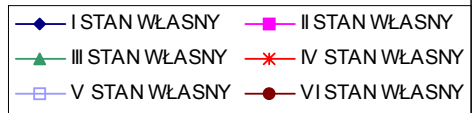
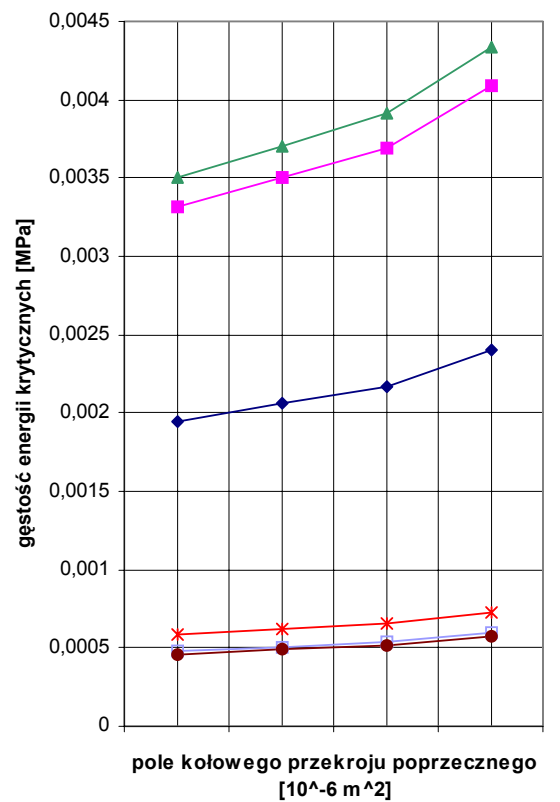
SYMETRIA TRANSWERSALNIE IZOTROPOWA -
KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O PODSTAWIE TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO



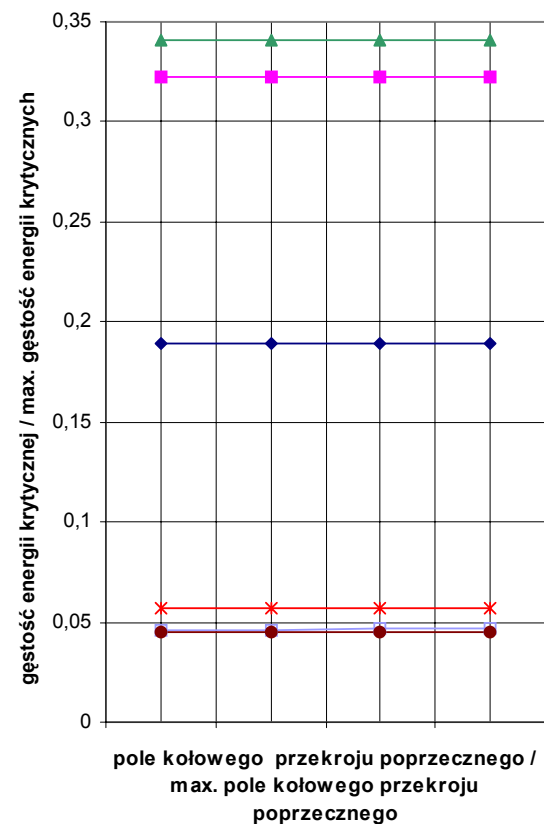
6. ANALIZA ROZKŁADU SZTYWNOŚCI STRUKTURY KOMÓRKOWEJ Z PUNKTU WIDZENIA GĘSTOŚCI ENERGII STANÓW GRANICZNYCH

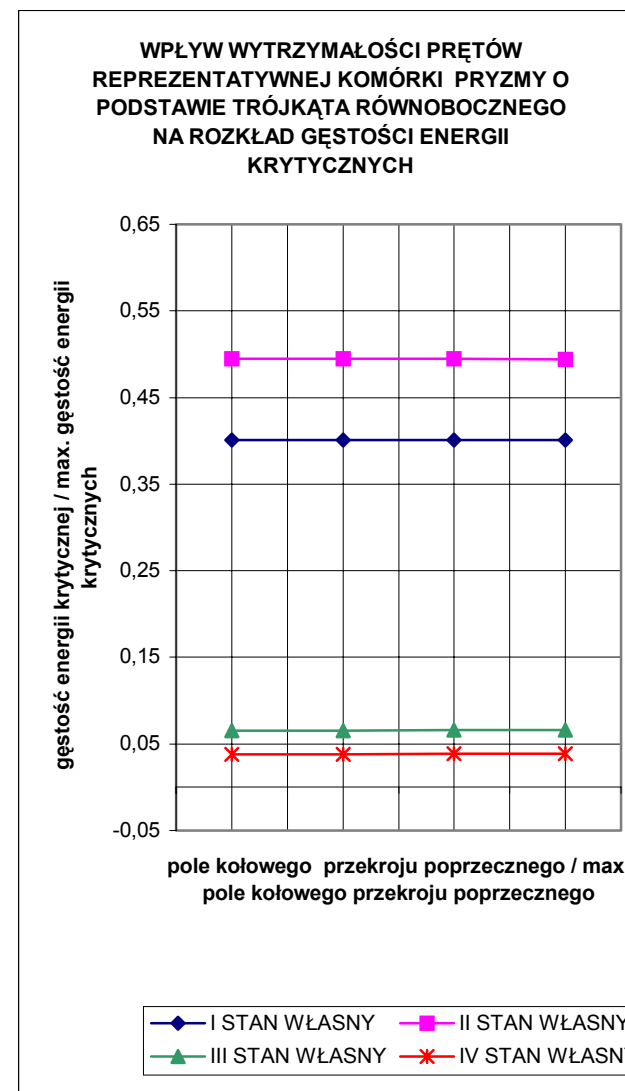
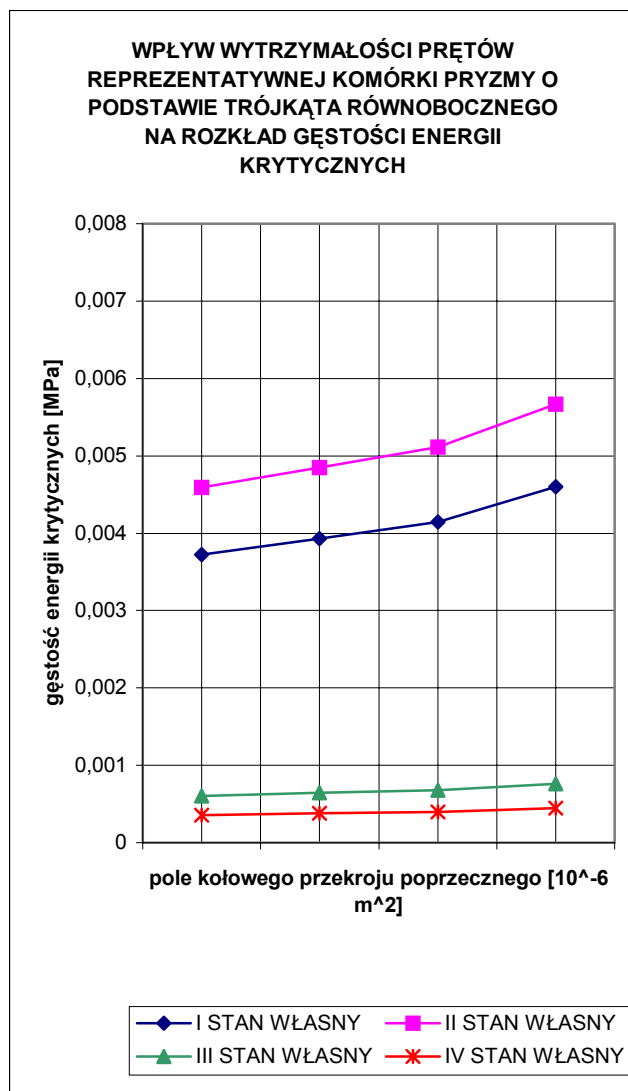


**WPLYW WYTRZYMAŁOŚCI PRĘTÓW
ORTOTROPOWEJ STRUKTURY
KOMÓRKOWEJ NA ROZKŁAD
GĘSTOŚCI ENERGII KRYTYCZNYCH**

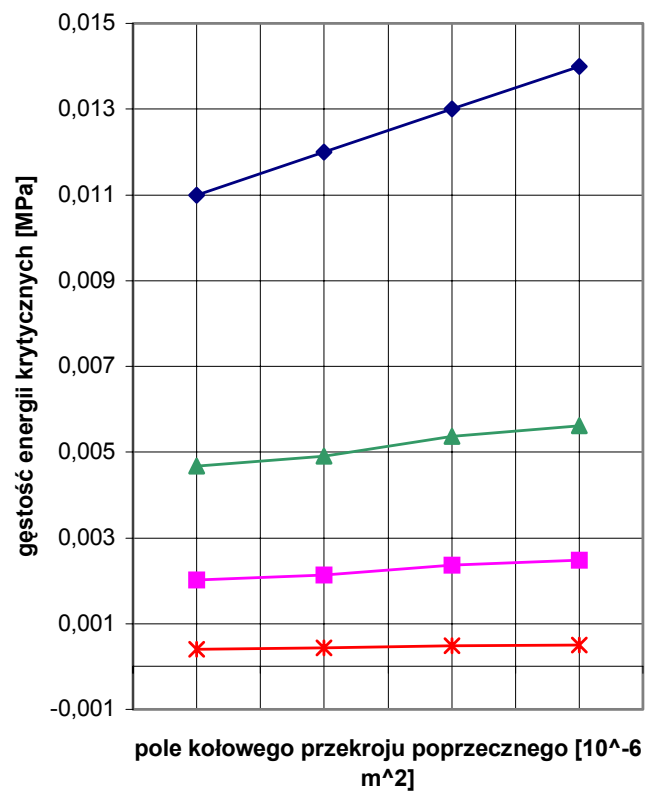


**WPLYW WYTRZYMAŁOŚCI PRĘTÓW
ORTOTROPOWEJ STRUKTURY
KOMÓRKOWEJ NA ROZKŁAD
GĘSTOŚCI ENERGII KRYTYCZNYCH**



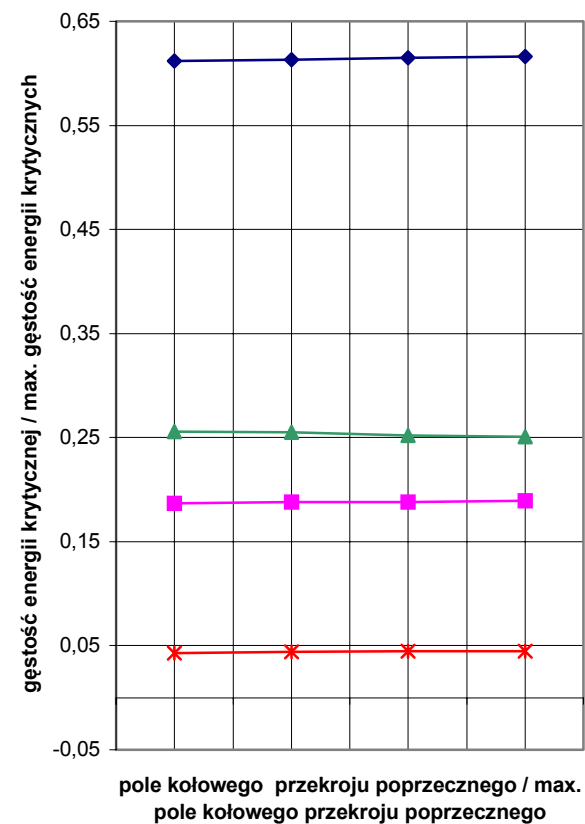


**WPLYW WYTRZYMAŁOŚCI PRĘTÓW
REPREZENTATYWNEJ KOMÓRKI PRYZMY O
PODSTAWIE SZEŚCIOKĄTA FOREMNEGO NA
ROZKŁAD GĘSTOŚCI ENERGII KRYTYCZNYCH**



I STAN WŁASNY II STAN WŁASNY
 III STAN WŁASNY IV STAN WŁASNY

**WPLYW WYTRZYMAŁOŚCI PRĘTÓW
REPREZENTATYWNEJ KOMÓRKI PRYZMY
O PODSTAWIE SZEŚCIOKĄTA
FOREMNEGO NA ROZKŁAD GĘSTOŚCI
ENERGII KRYTYCZNYCH**



I STAN WŁASNY II STAN WŁASNY
 III STAN WŁASNY IV STAN WŁASNY

7. WNIOSKI

Analityczna postać wzorów dla granicznych energii sprężystych pozwala modelować rozkłady sztywności struktury z punktu widzenia wytrzymałości w zależności od zadanych parametrów mikrostruktury i morfologii szkieletu, daje to możliwość projektowania materiałów z uwzględnieniem przyjętych własności mechanicznych wynikających z założonej funkcji, które mają spełniać.