Analiza wpływu wytrzymałości prętów sześciennej struktury komórkowej na rozkład krytycznych energii w stanie granicznym

Piotr Kordzikowski
Małgorzata Janus-Michalska
Ryszard B. Pęcherski

Katedra Wytrzymałości Materiałów
Instytut Mechaniki Budowli
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Krakowska

KRAKÓW – LISTOPAD 2003

1. WSTĘP

Podstawą analizy są prace L. J. Gibson, M. F. Ashby [1], W. E. Warren, A. M. Kraynik [7], M. Janus-Michalska, R. B. Pęcherski [2], P. Kowalczyk [3].

Celem pracy jest zbudowanie efektywnego modelu sprężystego zachowania się materiałów komórkowych oraz zastosowanie energetycznego kryterium J. Rychlewskiego [4] do określenia stanu granicznego, który w tym przypadku odpowiada osiągnięciu granicy liniowej sprężystości.

W pracy M. Janus-Michalska, R. B. Pęcherski [2] sformułowano taki model dla pianki metalicznej o komórce elementarnej w kształcie czworościanu. Dało to podstawę do prezentowanej analizy, w której przyjęto **sześcienną strukturę komórkową** w postaci regularnego układu sześciu prętów połączonych w sztywnym węźle.

Jako przykład do rozważań przyjęto strukturę kości ludzkiej, której budowa może być opisana sześcienną strukturą komórkową.

W pracy P. Kowalczyk [3] przedstawiono moduły sprężyste dla sześciennej struktury kości w zależności od typu struktury, uzyskane z obliczeń numerycznych w programie ABAQUS.

W omawianej pracy zostanie przedstawiony analityczny sposób wyznaczenia

- modułów sprężystych
- gęstości energii krytycznych

dla sześciennej struktury anizotropowej, przyjmując model belkowy.

Zostaną również przedstawione wyniki analizy rozkładu sztywności struktury z punktu widzenia gęstości energii krytycznych.

2. LITERATURA

[1] L. J. Gibson, M. F. Ashby;
CELLUAR SOLIDS: STRUCTURE AND PROPERTIES
Cambrige University Press 1997

[2] M. Janus-Michalska, R. B. Pęcherski;
MACROSCOPIC PROPERTIES OF OPEN-CELL FOAMS BASED ON MICROMECHANICAL MODELLING 2003

[3] P. Kowalczyk;
ANISOTROPIC PROPERTIES OF CANCELLOUS BONE DERIVED FROM 3-D FINITE ELEMENT MICROSTRUCTURE MODELS
Computer Methods in Mechanics 2003 June 3-6

[4] J. Rychlewski;
UNCONVENTIONAL APPROACH TO LINEAR ELASTICITY
Arch. Mech., 47, 149 – 171, 1995

[5] M. M. Mehrabadi, S. C. Cowin;
EIGENTENSORS OF LINEAR ANISOTROPIC ELASTIC MATERIALS
Mech. appl. Math. 1990 Vol 43, 15-41

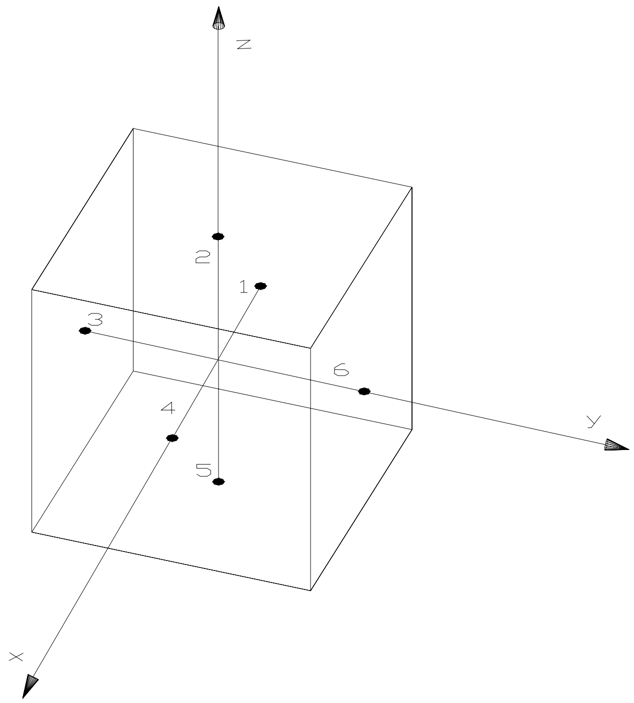
[6] K. Nalepka, R. B. Pęcherski;
FIZYCZNE PODSTAWY ENERGETYCZNEGO KRYTERIUM WYTĘŻENIA MONOKRYSZTAŁÓW
XXX Szkoła Inżynierii Materiałowej 2002 str. 311-316

[7] W. E. Warren, A. M. Kraynik;
THE LINEAR ELASTIC PROPERTIES OF OPEN-CELL FOAMS
Journal of Applied Mechanics 1988, Vol 55, 341-346

3. MODEL SZEŚCIENNEJ STRUKTURY KOMÓRKOWEJ

Do rozważań przyjęto model belkowy o sztywnym węźle dla powtarzalnej komórki o strukturze sześciennej.

struktura kości



P. Kowalczyk [3]

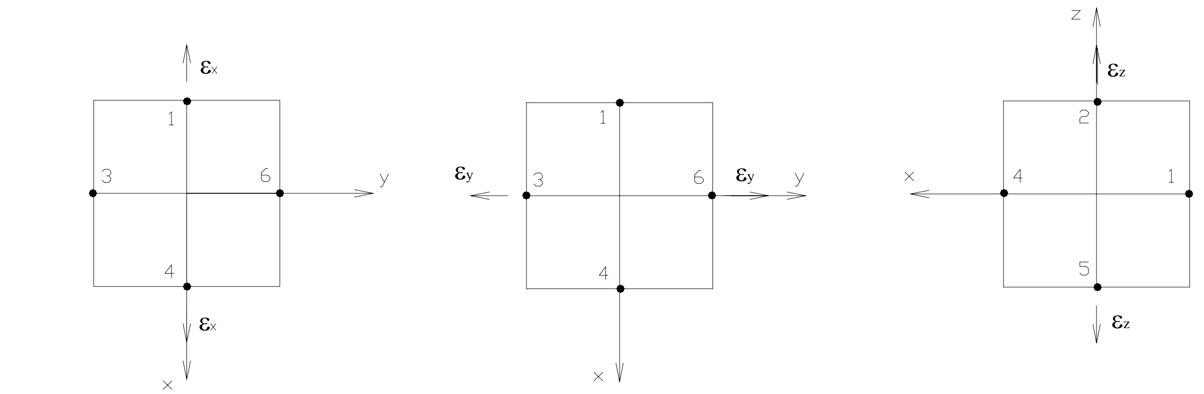
Analiza jest możliwa dzięki podobieństwu przemieszczeń punktów środkowych 1, 2, 3, 4, 5, 6, takim że w każdym z nich nie powstaje moment zginający.

Zakłada się małe przemieszczenia i jednorodne stany odkształcenia.

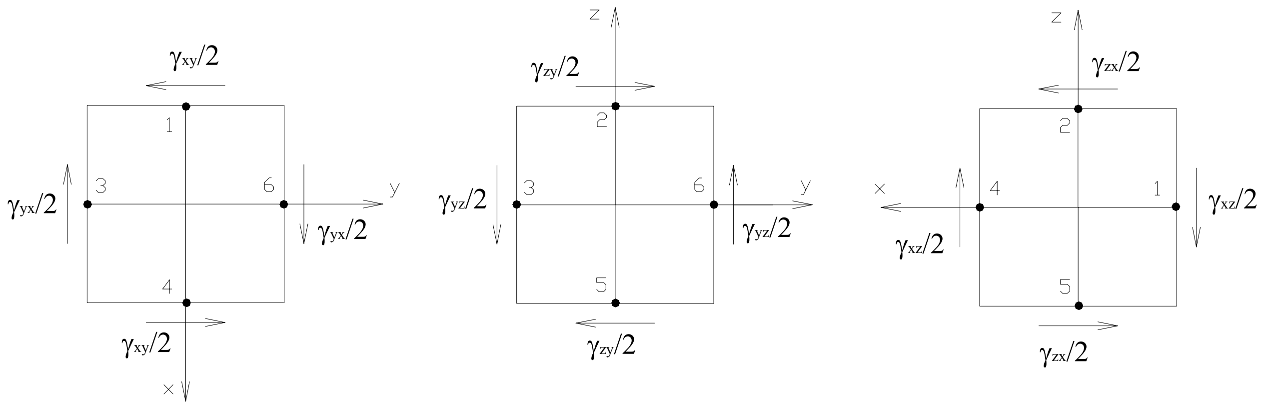
4. WYZNACZENIE MODUŁÓW SPRĘŻYSTYCH PODEJŚCIEM KINEMATYCZNYM

Aby wyznaczyć przemieszczenia końców elementów belkowych należy zrealizować sześć stanów jednostkowych.

$$\vec{\Delta}_i(\varepsilon_\alpha) = \varepsilon_\alpha(\vec{b}_i \cdot \vec{e}_\alpha)\vec{e}_\alpha \qquad i=1,2,3,4,5,6$$



$$\vec{\Delta}_i(\gamma_{\alpha\beta}) = \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2}\left[\left(\vec{b}_i \cdot \vec{e}_\alpha\right)\vec{e}_\beta + \left(\vec{b}_i \cdot \vec{e}_\beta\right)\vec{e}_\alpha\right]$$

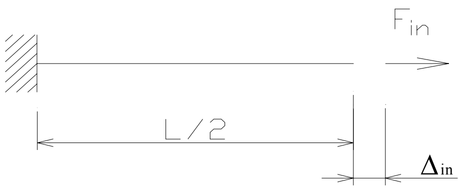


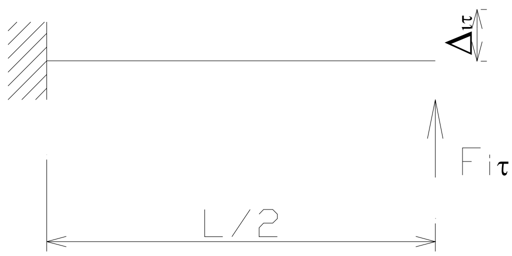
Całkowite przemieszczenie końców elementów belkowych przedstawia zależność:

$$\vec{\Delta}_i = \vec{\Delta}_{in} + \vec{\Delta}_{i\tau}$$

gdzie: $\vec{\Delta}_{in} = (\vec{\Delta}_i \cdot \vec{e}_i)\vec{e}_i, \;\; \vec{\Delta}_{i\tau} = (\vec{e}_i \times \vec{\Delta}_i) \times \vec{e}_i$

Znając przemieszczenia końców elementów belkowych należy wyznaczyć sztywność na rozciąganie i zginanie tych elementów.





$$F_{in} = \Delta_{in} s_n \qquad\qquad F_{i\tau} = \Delta_{i\tau} s_\tau$$

DEFORMACJA KOMÓREK DLA REALIZACJI STANÓW JEDNOSTKOWYCH PRZEZ ŚCIĘCIE.

Znając wartości sił można wyznaczyć naprężenia, a następnie macierz sztywności ***S*** komórki sześciennej

$$\overline{\sigma} = S\overline{\varepsilon}$$

Znając macierz sztywności jak również macierz podatności można wyznaczyć następujące moduły sprężyste:

- moduł Helmholtza (sprężystości objętościowej, ściśliwości):

$$K = \frac{s_\tau}{6L}$$

- moduł Younga:

$$E = \frac{s_n}{2L}$$

- moduł Kirchoffa (sprężystości postaciowej, ścinania):

$$G = \frac{2s_\tau}{4L}$$

- współczynnik Poissona:

$$\nu = 0$$

5. KRYTERIUM ENERGETYCZNE DLA SZEŚCIENNEJ STRUKTURY KOMÓRKOWEJ

Energetyczne kryterium wytężenia sformułowane przez J. Rychlewskiego [4] opisuje zakres sprężystej pracy materiału:

$$\frac{\Phi_I(\tilde{\sigma}_I)}{\Phi^I{}_{cr}}+\frac{\Phi_{II}(\tilde{\sigma}_{II})}{\Phi^{II}{}_{cr}}+\frac{\Phi_{III}(\tilde{\sigma}_{III})}{\Phi^{III}{}_{cr}}\leq 1$$

Zastosowanie propozycji obliczania gęstości energii krytycznych dla kryształów przedstawiono w pracy K. Nalepka, R. B. Pęcherski [6].

6. WYZNACZENIE GĘSTOŚCI KRYTYCZNYCH ENERGII DLA STANÓW GRANICZNYCH

Wartości gęstości krytycznych energii otrzymujemy w wyniku zrealizowania trzech stanów własnych.

Gęstość energii krytycznej dla ***I stanu własnego*** - stanu hydrostatycznego:

$$\Phi^{I}{}_{cr} = \frac{1}{\lambda_I}\frac{1}{3}\phi^2 R_e{}^2$$

$\phi = \dfrac{3A}{L^2}$ *- objętość względna,*

R_e- granica plastyczności elementu belkowego (szkieletu).

Gęstość energii krytycznej dla ***II stanu własnego*** - rozciągnięcia w kierunku np. osi X z równoczesnym ściśnięciem w kierunku osi Y, Z od stanu hydrostatycznego:

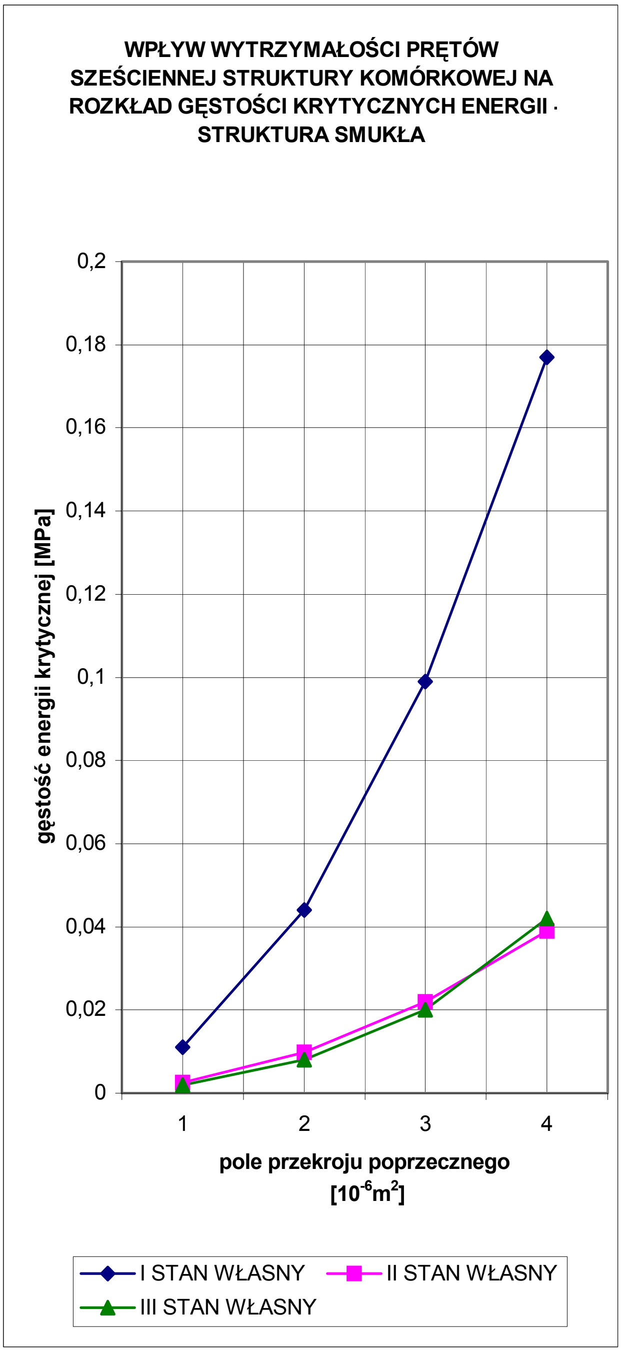
$$\Phi^{II}{}_{cr} = \frac{1}{\lambda_{II}}\frac{2}{27}\phi^2 R_e{}^2$$

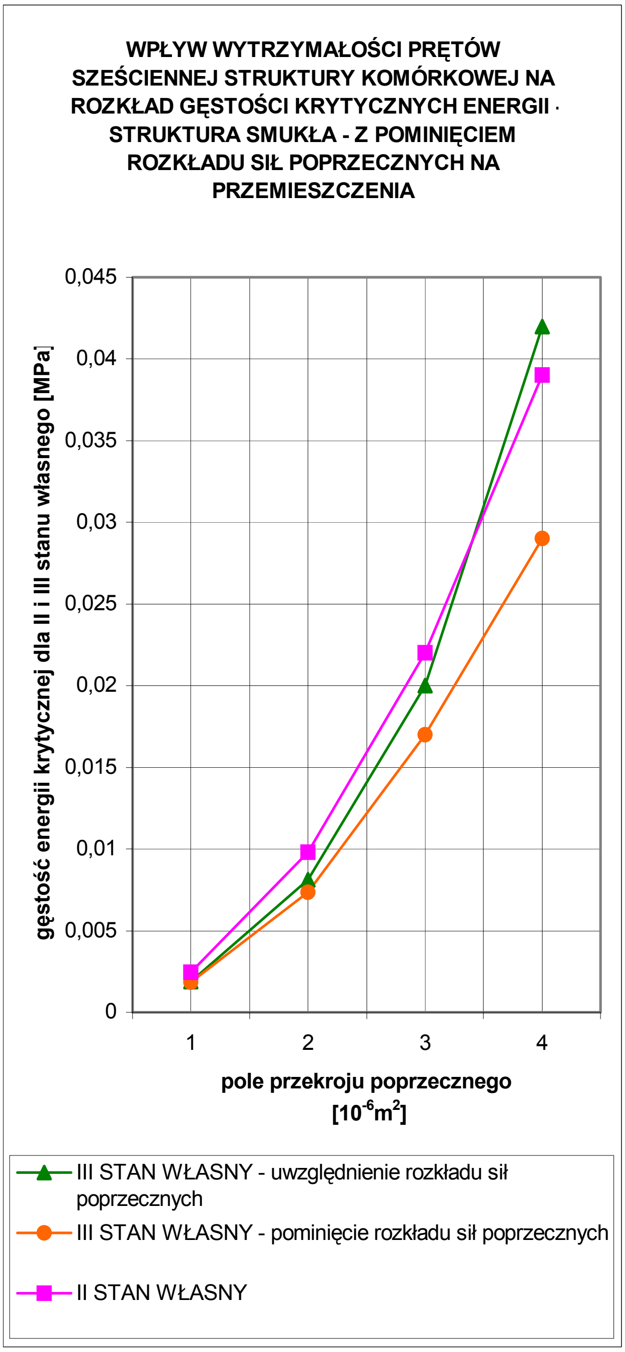
Gęstość energii krytycznej dla ***III stanu własnego*** - ścięcia w płaszczyźnie XY, YZ, ZX:

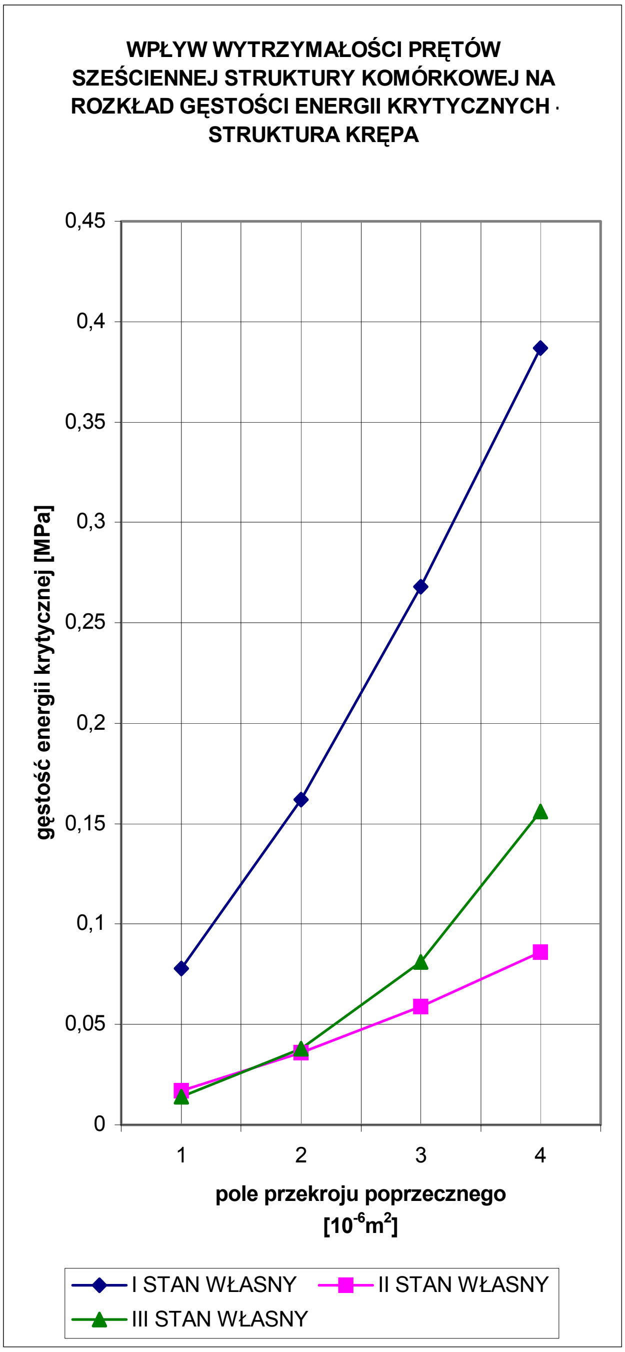
$$\Phi^{III}{}_{cr} = \frac{1}{\lambda_{III}} 24 \frac{I^2 R_e{}^2}{h^2 L^6}$$

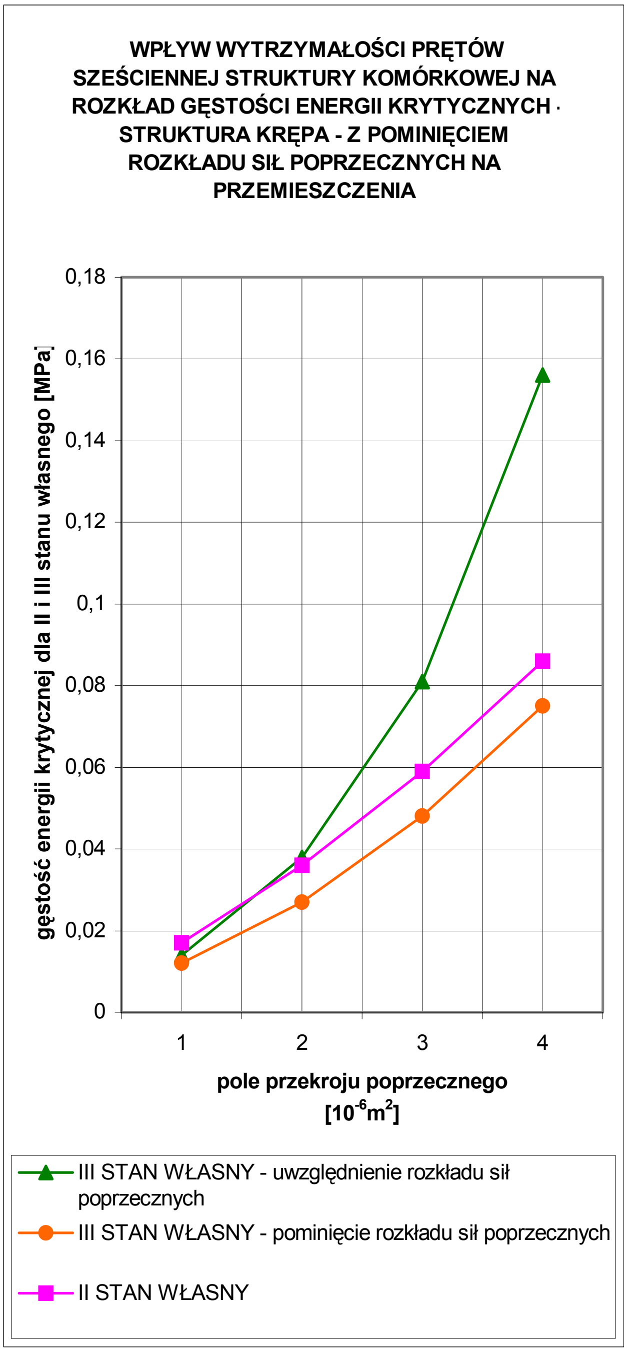
h – maksymalna odległość włókien górnych lub dolnych dla elementu belkowego (szkieletu).

7. ANALIZA ROZKŁADU SZTYWNOŚCI STRUKTURY KOMÓRKOWEJ Z PUNKTU WIDZENIA GĘSTOŚCI ENERGII STANÓW GRANICZNYCH






WPŁYW WYTRZYMAŁOŚCI PRĘTÓW SZEŚCIENNEJ STRUKTURY KOMÓRKOWEJ NA ROZKŁAD GĘSTOŚCI ENERGII KRYTYCZNYCH - STRUKTURA KRĘPA
gęstość energii krytycznej [MPa]
0,45
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
1
2
3
4
pole przekroju poprzecznego [10^-6m^2]
I STAN WŁASNY
II STAN WŁASNY
III STAN WŁASNY


WPŁYW WYTRZYMAŁOŚCI PRĘTÓW SZEŚCIENNEJ STRUKTURY KOMÓRKOWEJ NA ROZKŁAD GĘSTOŚCI ENERGII KRYTYCZNYCH - STRUKTURA KRĘPA - Z POMINIĘCIEM ROZKŁADU SIŁ POPRZECZNYCH NA PRZEMIESZCZENIA
gęstość energii krytycznej dla II i III stanu własnego [MPa]
0,18
0,16
0,14
0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
1
2
3
4
pole przekroju poprzecznego [10^-6m^2]
III STAN WŁASNY - uwzględnienie rozkładu sił poprzecznych
III STAN WŁASNY - pominięcie rozkładu sił poprzecznych
II STAN WŁASNY

8. WNIOSKI

- W przypadku struktury smukłej o zniszczeniu decyduje gęstość energii III stanu własnego, czyli struktura jest nieodporna na ścinanie.

- Gdy struktura staje się bardziej krępa to staje się odporna na ścinanie a o zniszczeniu decyduje gęstość energii II stanu własnego czyli rozciągnięcie w jednym kierunku i ściśnięcie w dwóch pozostałych kierunkach.

- Uwzględnienie rozkładu sił poprzecznych na przemieszczenie końca belki pozwala na dokładniejsze określenie gęstości energii krytycznej, a co za tym idzie racjonalne wykorzystanie wytrzymałości materiału.

- Otrzymane funkcje modułów sprężystych i gęstości energii krytycznej od parametrów mikrostruktury oraz morfologii szkieletu otwiera możliwości projektowania materiału według zadanych własności wytrzymałościowych.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ