Politechnika Krakowska
Wydział Inżynierii Lądowej
Instytut Mechaniki Budowli
Katedra Wytrzymałości Materiałów

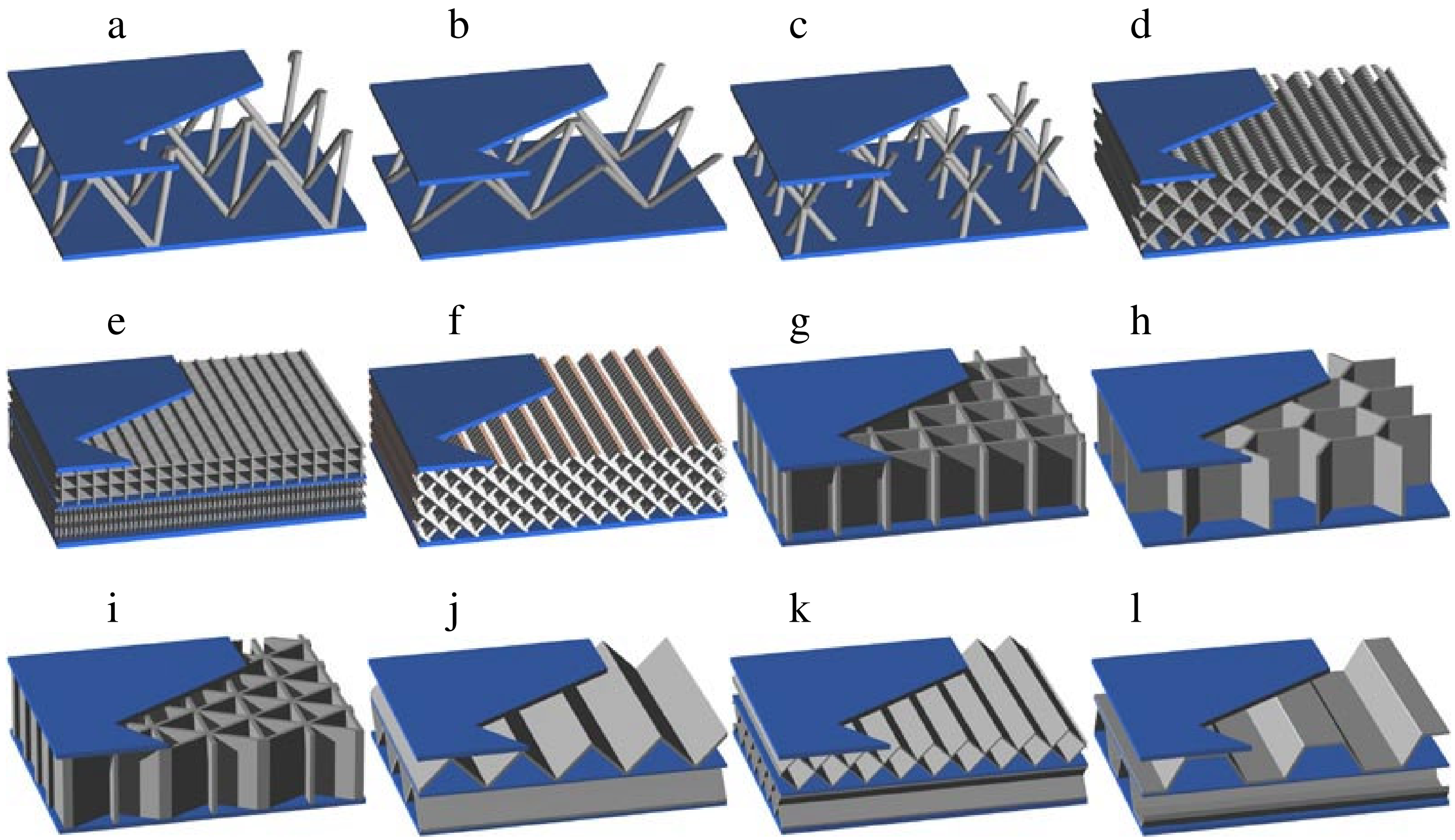
PORÓWNANIE ENERGETYCZNYCH KRYTERIÓW WYTĘŻENIA DLA SPRZĘŻONYCH I ROZŁĄCZNYCH STANÓW WŁASNYCH NA PRZYKŁADZIE WYBRANYCH MATERIAŁÓW ANIZOTROPOWYCH

Piotr Kordzikowski
Ryszard B. Pęcherski

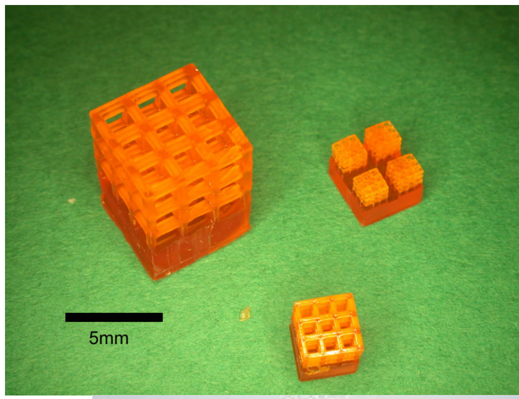
Bezmiechowa k/Leska – 2005

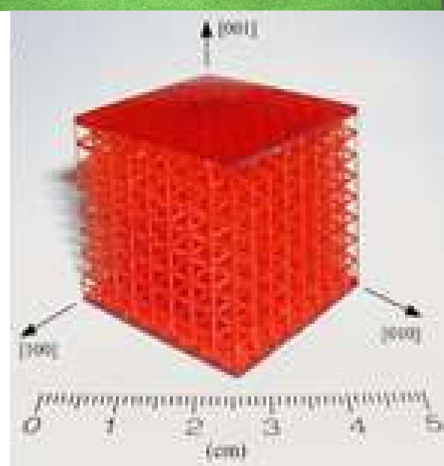
MATERIAŁY ANIZOTROPOWE

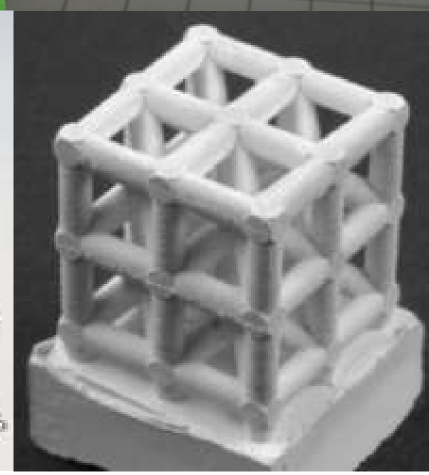
Przykłady płyt typu *sandwich*



Regularne struktury komórkowe

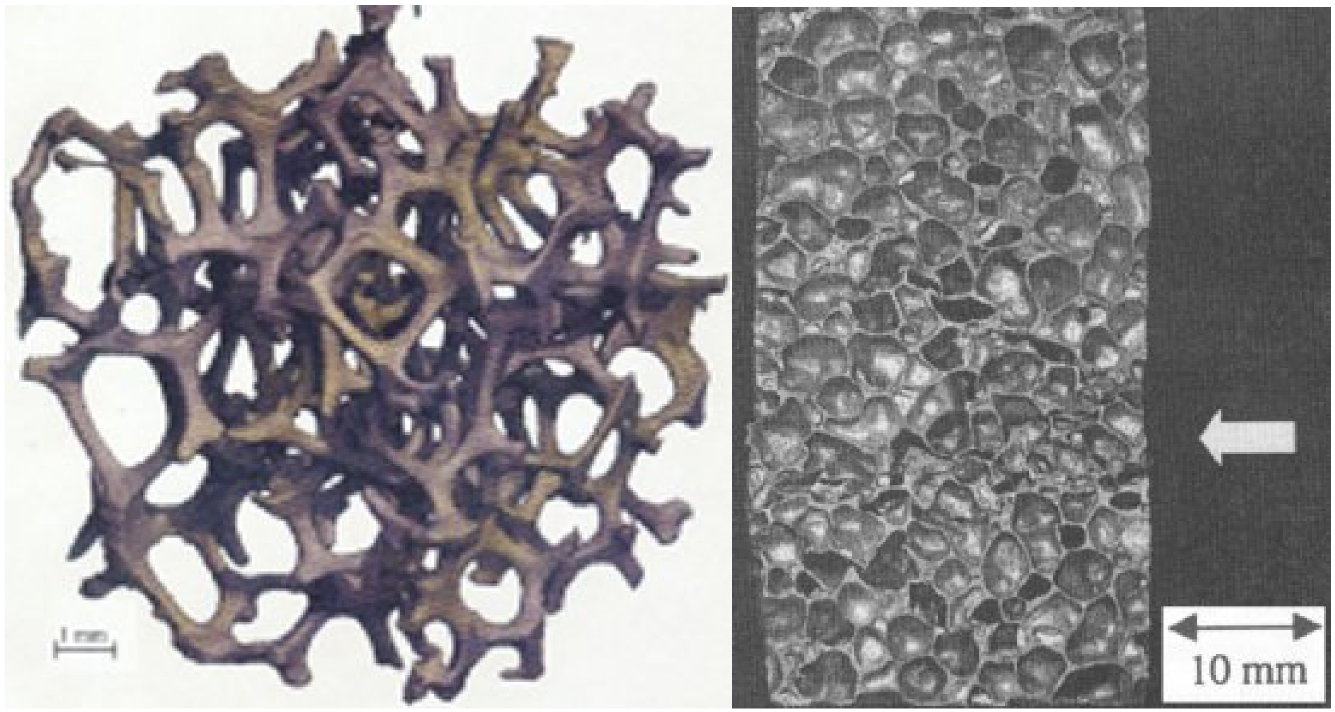






Pianki metaliczne

a b



a) pianka aluminiowa – komórka otwarta,
b) pianka aluminiowa – komórka zamknięta

CEL PRACY

Porównanie energetycznych kryteriów wytężenia dla sprzężonych i rozłącznych stanów własnych stosując:

- teorię sprężystych stanów własnych (J. Rychlewski1984)
- kryterium energetyczne

prawo Hooke'a

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

zagadnienie własne

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_i = \lambda_i \, \boldsymbol{\omega}_i, \quad \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{\lambda_i} \boldsymbol{\omega}_i$$

gęstość energii sprężystej

$$2\Phi(\sigma_i) = \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = C_{klmn} \, \sigma_{kl}{}^{(i)} \, \sigma_{mn}{}^{(i)} = \frac{1}{\lambda^{(i)}} (\sigma^{(i)})^2, \quad i = 1, \ldots, p \qquad p \le 6$$

gdzie: $(\sigma^{(i)})^2$ - kwadrat rzutu tensora naprężenia na i-ty wektor własny tensora $\mathbf{S}$

$\lambda^{(i)}$ - i-ta wartość własna tensora $\mathbf{S}$, nazywana modułem Kelvina energetyczne kryterium wytężenia sformułowane przez J. Rychlewskiego (1984) (kryterium dla sprzężonych stanów własnych)

$$\frac{\Phi\left(\boldsymbol{\sigma}_1\right)}{\Phi_1^{gr}} + \cdots + \frac{\Phi\left(\boldsymbol{\sigma}_p\right)}{\Phi_p^{gr}} \leq 1, \qquad p \leq 6$$

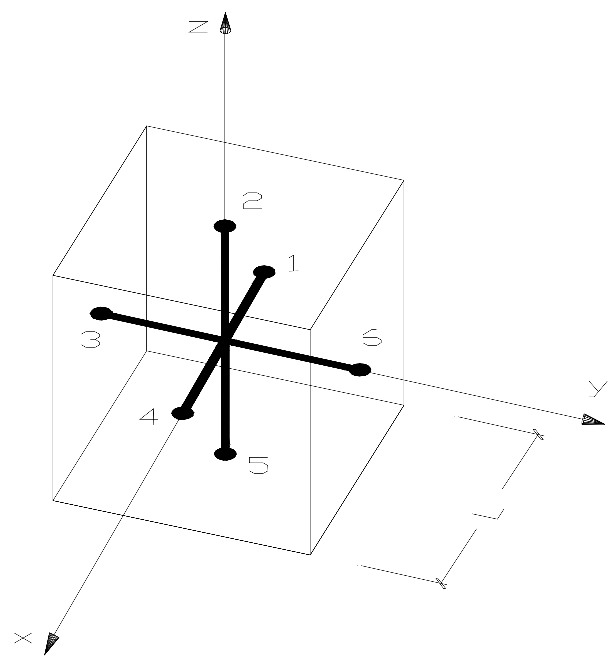
$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + ... + \boldsymbol{\sigma}_p$ - rozkład tensora naprężenia na *p* stanów własnych

Φ_p^{gr} - graniczna wartość gęstości energii sprężystej w stanie własnym *p*

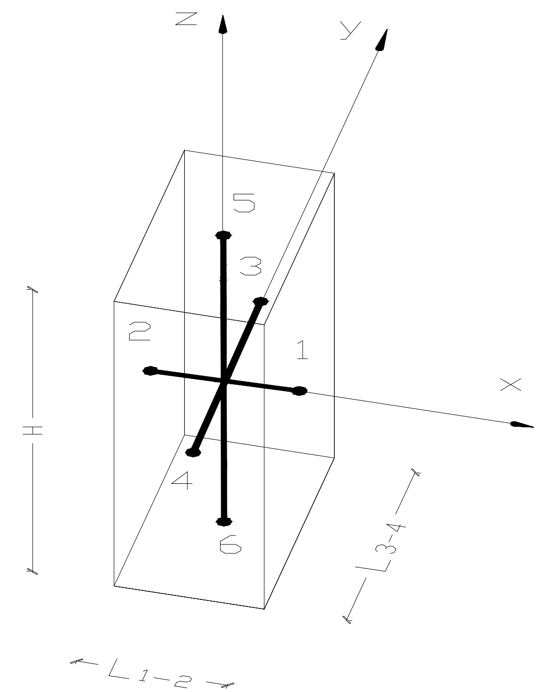
kryterium dla rozłącznych stanów własnych (S. C. Cowin et al.,1995)

$$\begin{aligned} &\Phi\left(\boldsymbol{\sigma}_1\right) \leq \Phi_1^{gr} \\ &\qquad\vdots \\ &\Phi\left(\boldsymbol{\sigma}_p\right) \leq \Phi_p^{gr} \qquad\qquad p \leq 6 \end{aligned}$$

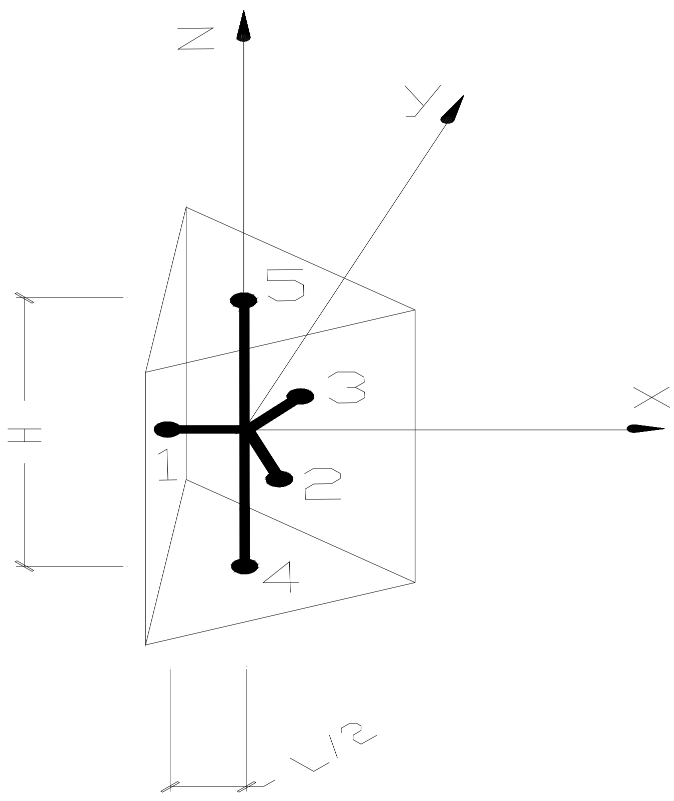
PRZEDMIOT BADAŃ



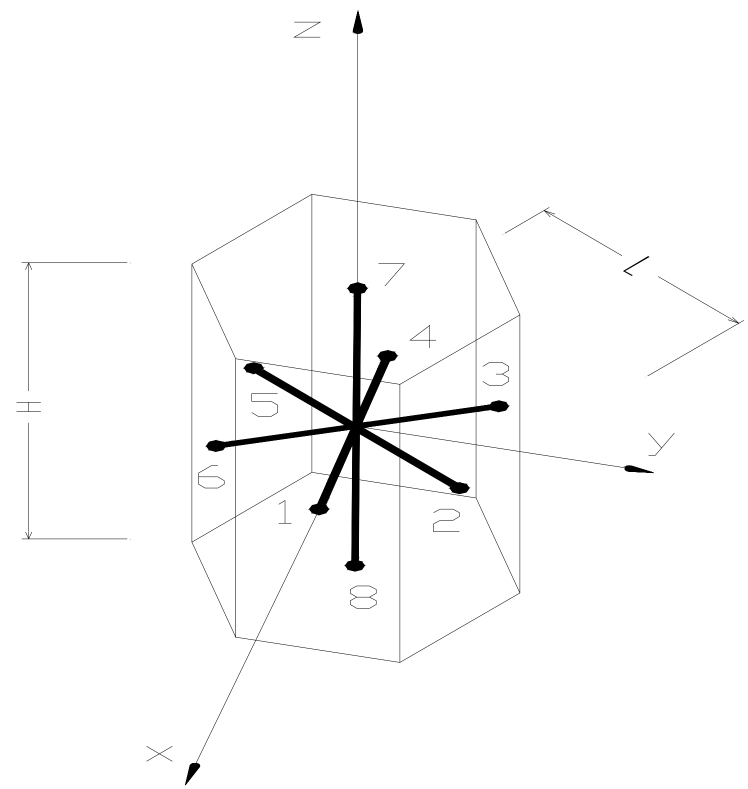
Komórka sześcienna



Komórka prostopadłościenna



Komórka w postaci pryzmy
o podstawie trójkąta
równobocznego



Komórka w postaci pryzmy
o podstawie sześciokąta
foremnego

SPRĘŻYSTE STANY WŁASNE I GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH

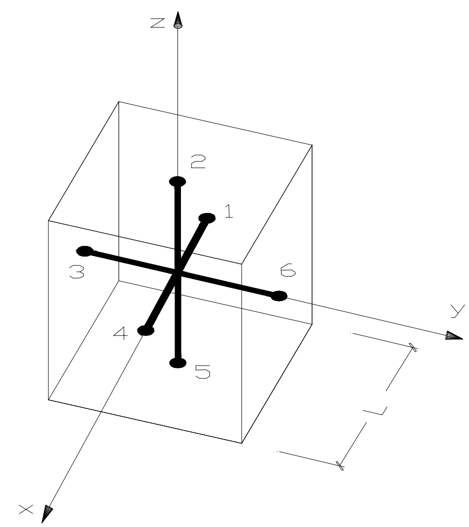
KOMÓRKA SZEŚCIENNA – SYMETRIA KUBICZNA

OZNACZENIA

L - *wymiar elementów belkowych (szkieletu)*

s_n - *sztywność elementów belkowych na rozciąganie*

s_τ **-** *sztywność elementów belkowych na zginanie*



MODUŁY KELVINA MACIERZY **S**

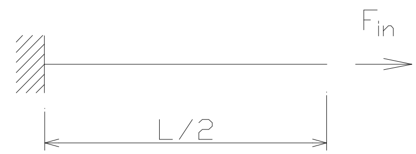
$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{s_n}{2L}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{s_n}{2L}$$

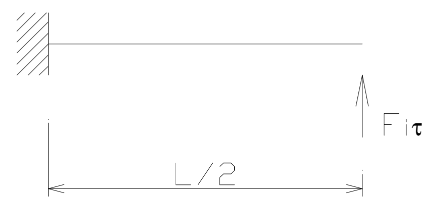
$$\lambda_{III} = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \frac{2s_\tau}{4L}$$

GRANICZNE SIŁY SPRĘŻYSTE DLA ELEMENTÓW BELKOWYCH

ściskanie (rozciąganie): $$F^{gr} = A\,R_e$$



ścinanie (zginanie): $$F^{gr} = \frac{R_e\,I}{L\,h}$$



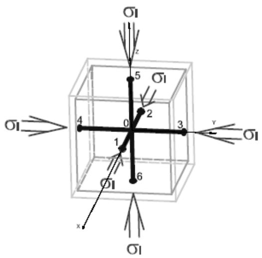
DEFINICJA NAPRĘŻENIA
dla ekwiwalentnego kontinuum

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V}\int_{V^S} \boldsymbol{\sigma}^S dV$$

gdzie:

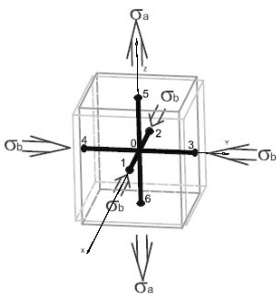
V – objętość reprezentatywnej komórki
V^S – objętość szkieletu
$\boldsymbol{\sigma}^S$ – naprężenie w szkielecie

GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH



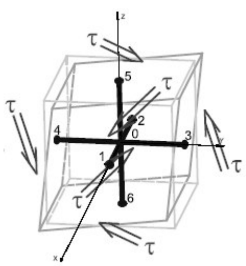
$$\sigma_I = \sigma_1 = \begin{bmatrix} \frac{-A\,R_e}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-A\,R_e}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-A\,R_e}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I}\,3\left(\frac{A\,R_e}{L^2}\right)^2$$



$$\sigma_{II} = \sigma_{2,3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\frac{A\,R_e}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3}\frac{A\,R_e}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3}\frac{A\,R_e}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}}\,\frac{2}{3}\left(\frac{A\,R_e}{L^2}\right)^2$$

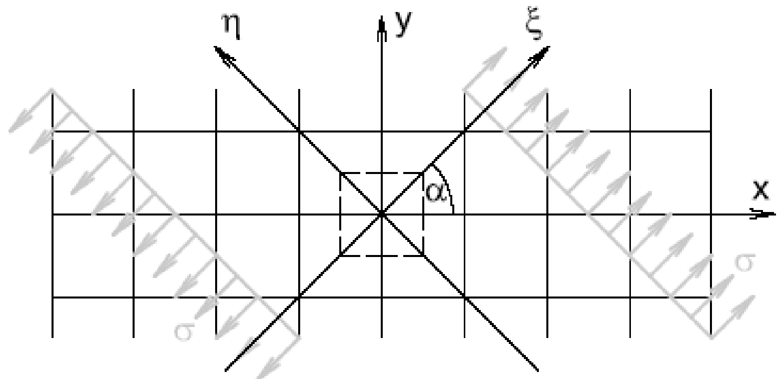


$$\sigma_{III} = \sigma_{4,5,6} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}\,I\,R_e}{h\,L^3} & \frac{\sqrt{2}\,I\,R_e}{h\,L^3} \\ \frac{\sqrt{2}\,I\,R_e}{h\,L^3} & 0 & \frac{\sqrt{2}\,I\,R_e}{h\,L^3} \\ \frac{\sqrt{2}\,I\,R_e}{h\,L^3} & \frac{\sqrt{2}\,I\,R_e}{h\,L^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{III}}\,6\,\frac{I^2\,R_e^2}{h^2\,L^6}$$

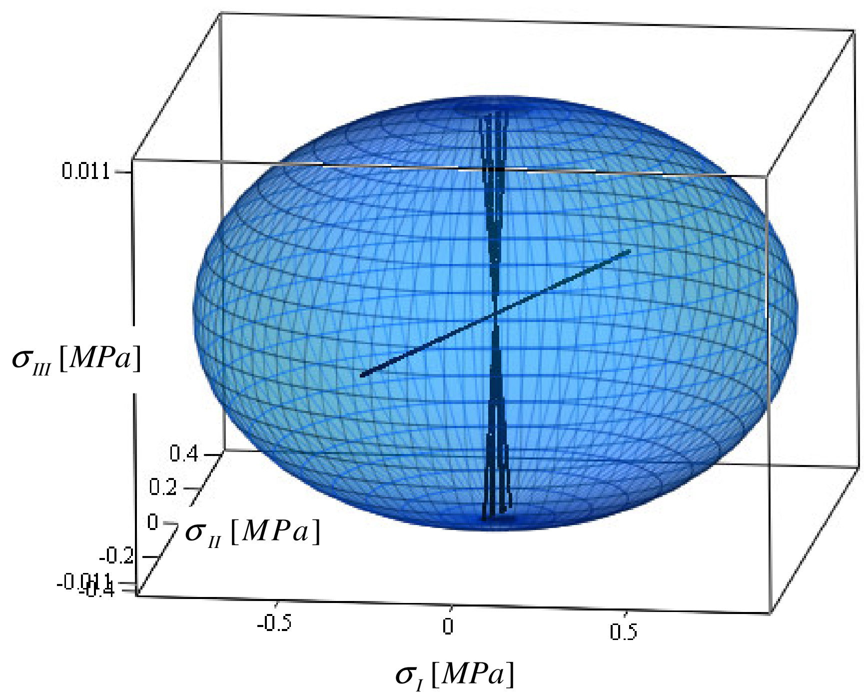
R_e - granica plastyczności, h - maksymalna odległość włókien górnych lub dolnych elementu belkowego, A - pole przekroju elementu belkowego, I - moment bezwładności elementu belkowego

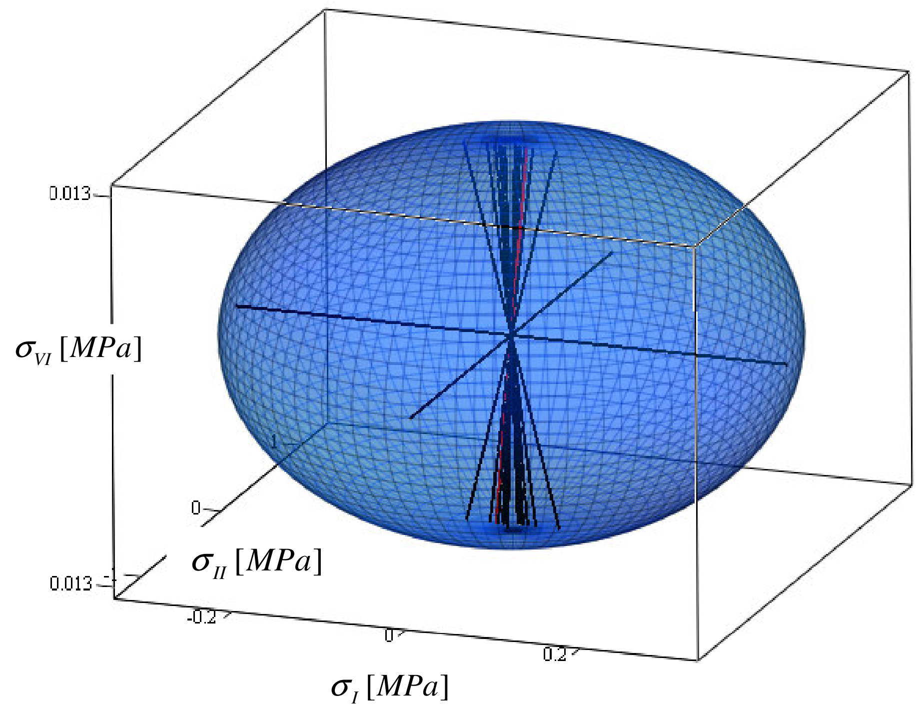
POWIERZCHNIE GRANICZNE WEDŁUG ENERGETYCZNEGO KRYTERIUM J. RYCHLEWSKIEGO DLA SPRĘŻYSTYCH STANÓW WŁASNYCH PRZY JEDNOOSIOWYM ROZCIĄGANIU WZDŁUŻ KIERUNKU „n”



$$\boldsymbol{\sigma}(\xi,\eta)=\begin{bmatrix}\sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow \boldsymbol{\sigma}(x,y)=\sigma\begin{bmatrix}\cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha)\end{bmatrix}$$

stop Cu-1%Ni, $E_s = 117\,GPa$, $G_s = 45\,GPa$, $R_e = 112\,MPa$ (D. L. McDowell et al., 2005)





Komórka sześcienna

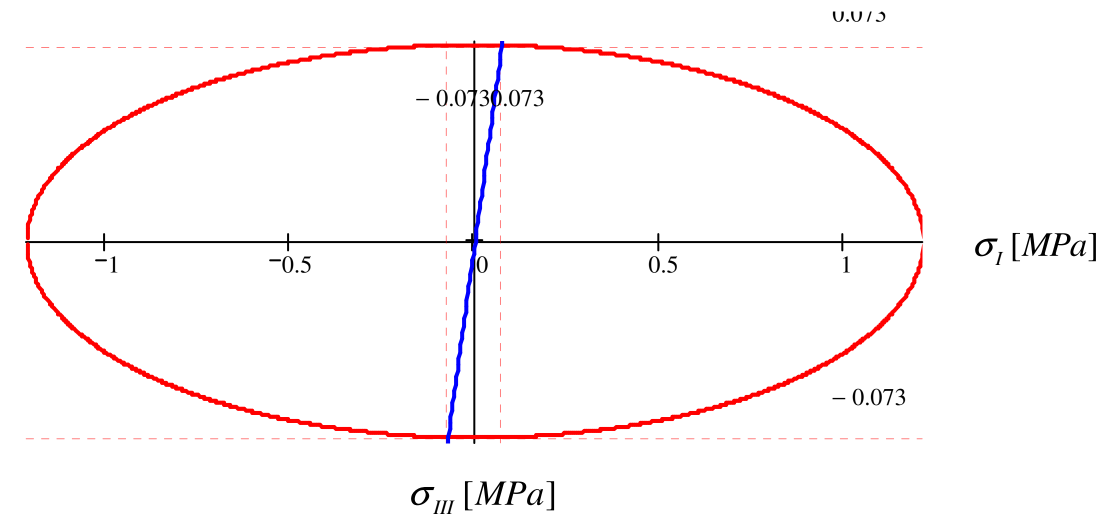
$L = 2000\,\mu m$, $d = 150\,\mu m$

Komórka prostopadłościenna

$L_{1-2} = 1000\,\mu m$, $L_{3-4} = 4000\,\mu m$, $H = 1000\,\mu m$,

$d = 120\,\mu m$

stop Cu-1%Ni, $E_s = 117\,GPa$, $G_s = 45\,GPa$, $R_e = 112\,MPa$



Komórka w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego

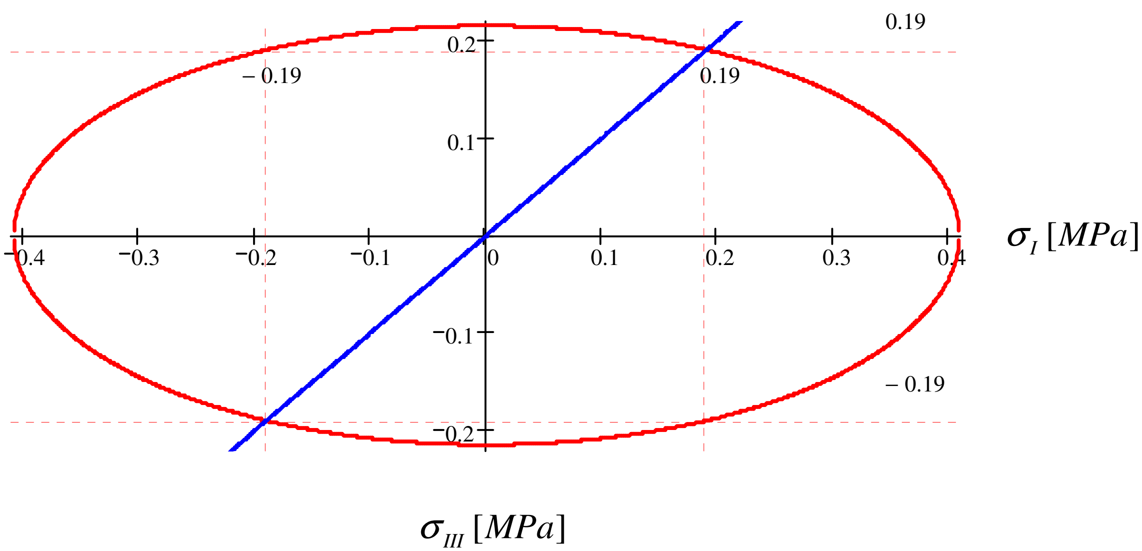
$L = 2000\,\mu m,\ H = 2000\,\mu m$

$d = 260\,\mu m$

stop Cu-1%Ni,

$E_s = 117\,GPa,\quad G_s = 45\,GPa$,

$R_e = 112\,MPa$



Komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego

$L = 2000\,\mu m,\ H = 2000\,\mu m$

$d = 87\,\mu m$

stop Cu-1%Ni,

$E_s = 117\,GPa,\quad G_s = 45\,GPa$,

$R_e = 112\,MPa$

POWIERZCHNIA GRANICZNA DLA SZEŚCIU ROZŁĄCZNYCH STANÓW WŁASNYCH MATERIAŁU ANIZOTROPOWEGO NA PRZYKŁADZIE TEKTURY

Wykorzystanie obliczonych gęstości granicznych energii sprężystych do energetycznego kryterium dla poszczególnych stanów własnych.
Omówienie realizacji na przykładzie : Y. A. Arramon et al., 2000

gęstości granicznych energii

$$2\lambda_A \Phi_T^{(A)} = (\sigma_T^{(A)})^2$$

$$2\lambda_A \Phi_C^{(A)} = (\sigma_C^{(A)})^2$$

postulowane kryterium:

- w przestrzeni stanów własnych $$(\sigma^{(A)} - \sigma_T^{(A)})(\sigma^{(A)} - \sigma_C^{(A)}) = 0$$

  gdzie:

  $\sigma_T^{(A)} = \sigma_{\max}^{(A)}$, $\sigma_C^{(A)} = \sigma_{\min}^{(A)}$,

  $A = 1, \ldots K$ kolejny stan własny

- w przestrzeni naprężeń głównych $$(\sigma^{(P)} - \sigma_T^{(P)})(\sigma^{(P)} - \sigma_C^{(P)}) = 0$$

  gdzie:

  $\sigma_T^{(P)} = \sigma_{\max}^{(P)}$, $\sigma_C^{(P)} = \sigma_{\min}^{(P)}$,

  $\sigma^{(I)} = T_1$, $\sigma^{(II)} = T_2$, $\sigma^{(III)} = T_3$

Wykorzystując dane doświadczalne dla materiału anizotropowego

$$E_1 = 3510\,MPa, \quad E_2 = 3510\,MPa, \quad E_3 = 6930\,MPa, \quad \nu_{13} = 0.15,$$

$$\nu_{23} = 0.15, \quad \nu_{12} = 0.3, \quad G_{23} = 1700\,MPa, \quad G_{13} = 1700\,MPa \quad G_{12} = 1500\,MPa$$

Tensor sztywności

$$S = \begin{bmatrix} 4220 & 1520 & 1700 & 0 & 0 & 0 \\ 1520 & 4220 & 1700 & 0 & 0 & 0 \\ 1700 & 1700 & 7940 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1700 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1500 \end{bmatrix} MPa$$

Wartości własne

$$\lambda = \begin{bmatrix} 9480 \\ 4200 \\ 2700 \\ 1700 \\ 1700 \\ 1500 \end{bmatrix} MPa$$

Wektory własne

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0.382 \\ 0.382 \\ 0.841 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} -0.594 \\ -0.594 \\ 0.54 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6 \text{ pominięto}$$

Powierzchnie graniczne dla rozłącznych stanów własnych opisują zależności;

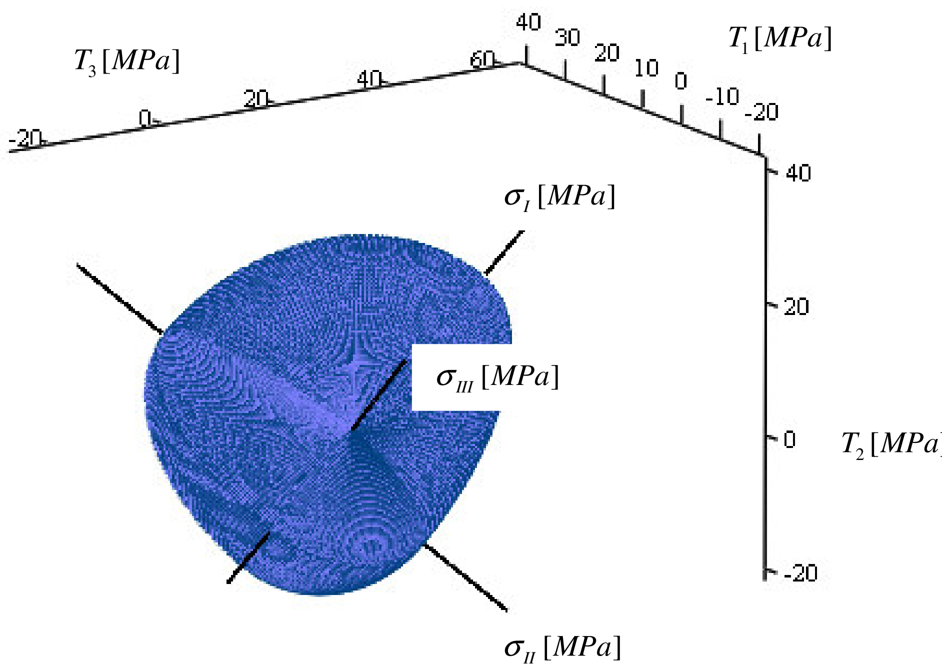
$$(0.382T_1 + 0.382T_2 + 0.841T_3 - 47.1)(0.382T_1 + 0.382T_2 + 0.841T_3 + 16.8) = 0$$

$$(0.595T_1 + 0.595T_2 - 0.54T_3 - 18.1)(0.595T_1 + 0.595T_2 - 0.54T_3 + 30.3) = 0$$

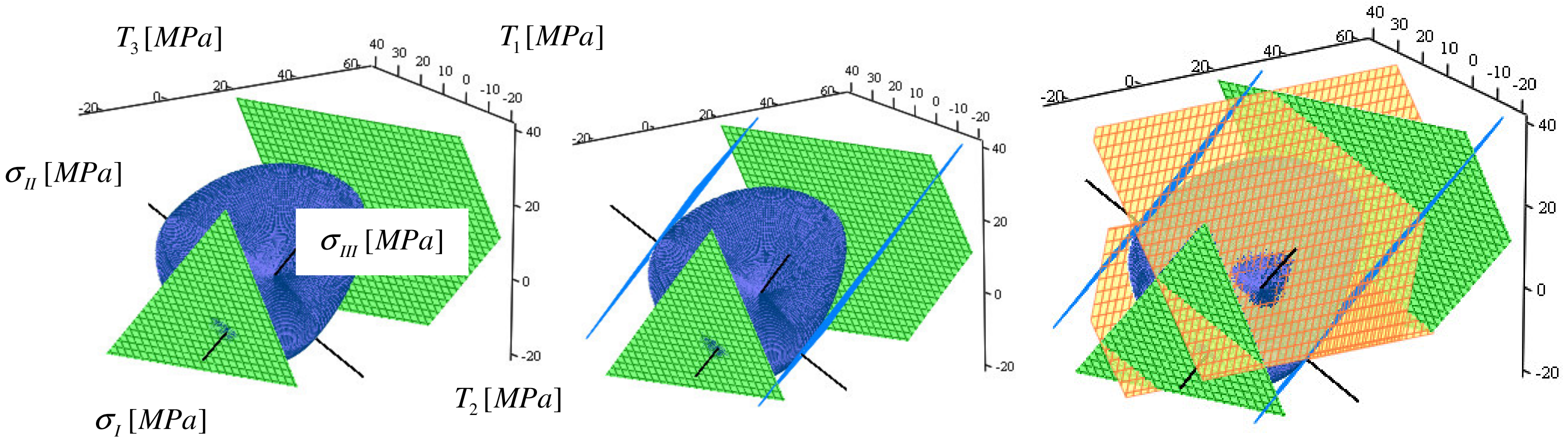
$$(0.707T_1 - 0.707T_2 - 21.6)(0.707T_1 - 0.707T_2 + 9.19) = 0$$

Powierzchnie graniczne na podstawie kryteriów:

- Granicznych energii dla sprzężonych stanów własnych

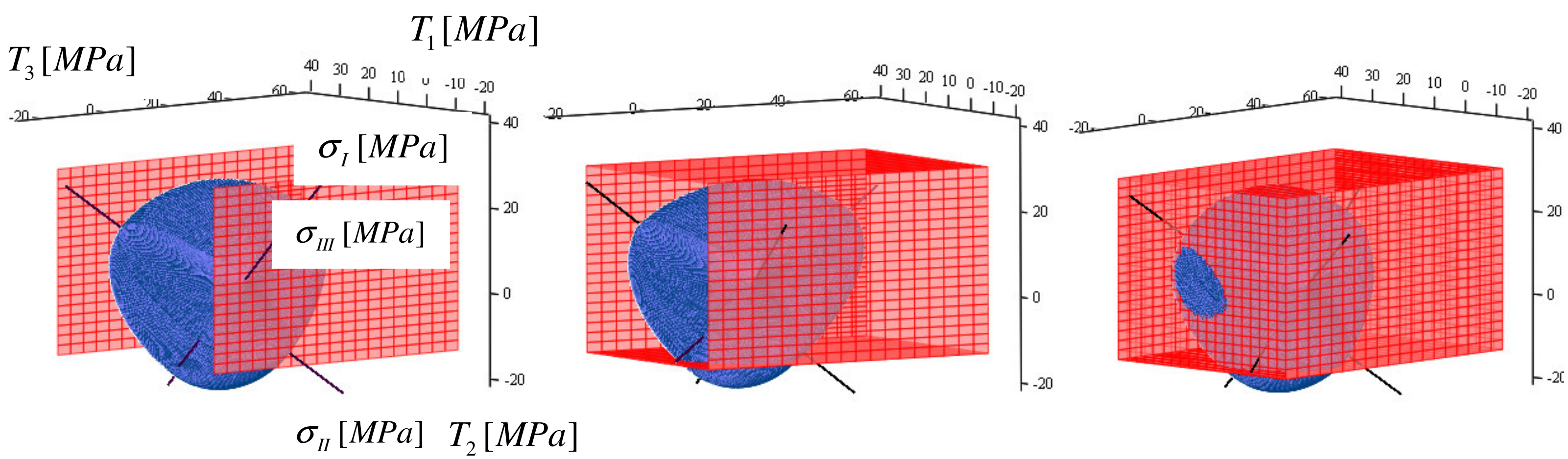


- Granicznych energii dla rozłącznych stanów własnych

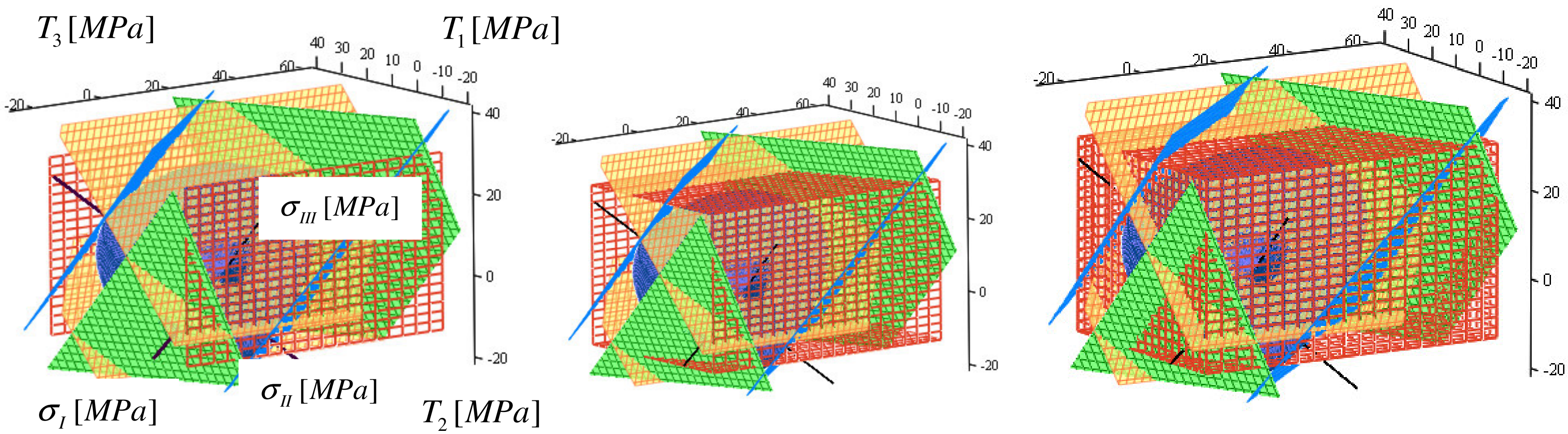


- Granicznych naprężeń głównych

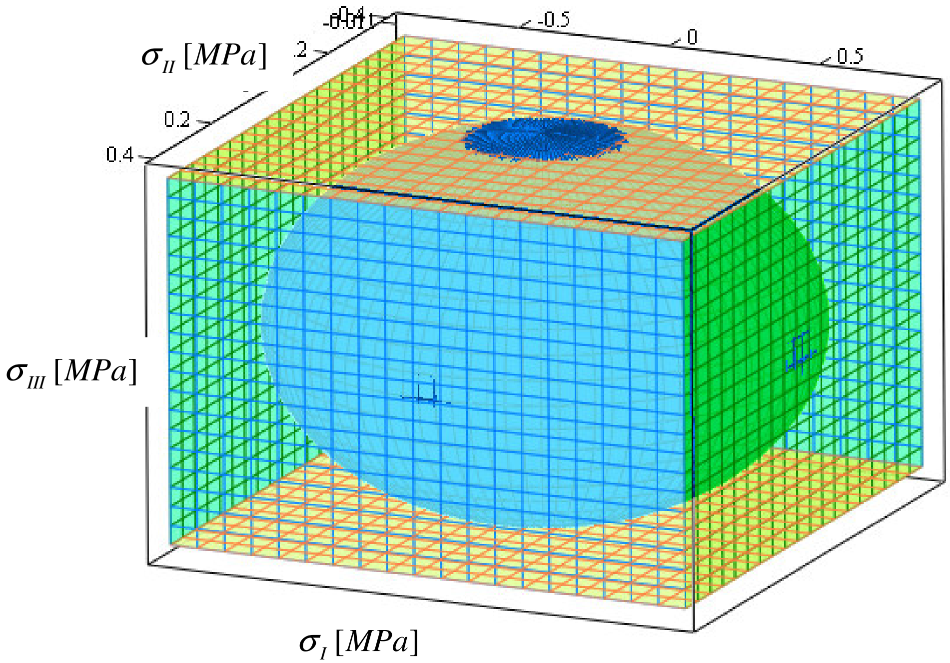
$$T_{1r} = 36\,MPa,\ T_{1s} = 18\,MPa,\ T_{2r} = 30.5\,MPa,\ T_{2s} = 13\,MPa,\ T_{3r} = 56\,MPa,\ T_{3s} = 20\,MPa$$

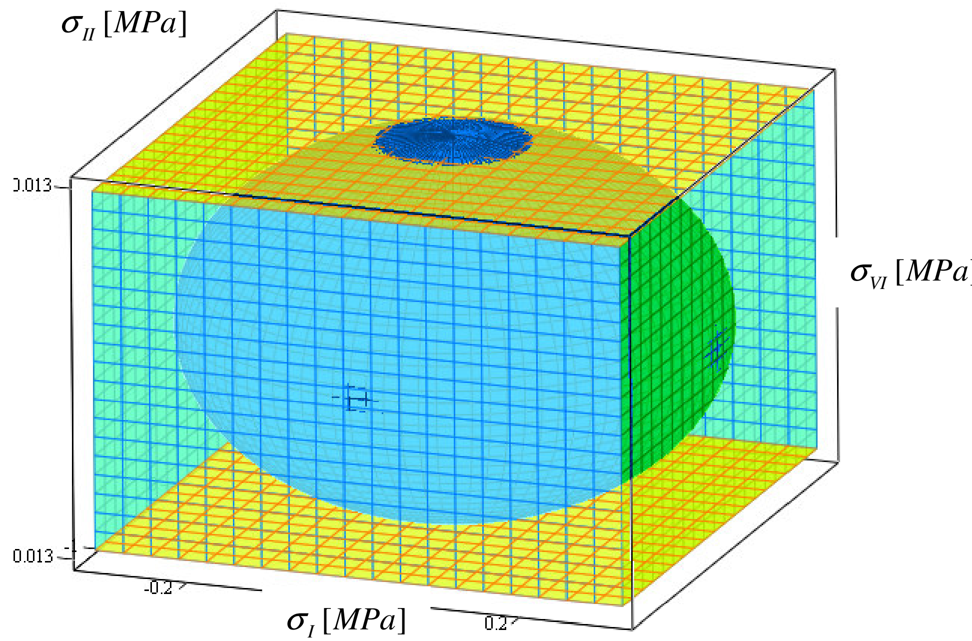


- Powierzchnia graniczna powstała w wyniku złożenia ww. kryteriów



PORÓWNANIE POWIERZCHNI GRANICZNYCH W PRZESTRZENI STANÓW WŁASNYCH





Komórka sześcienna

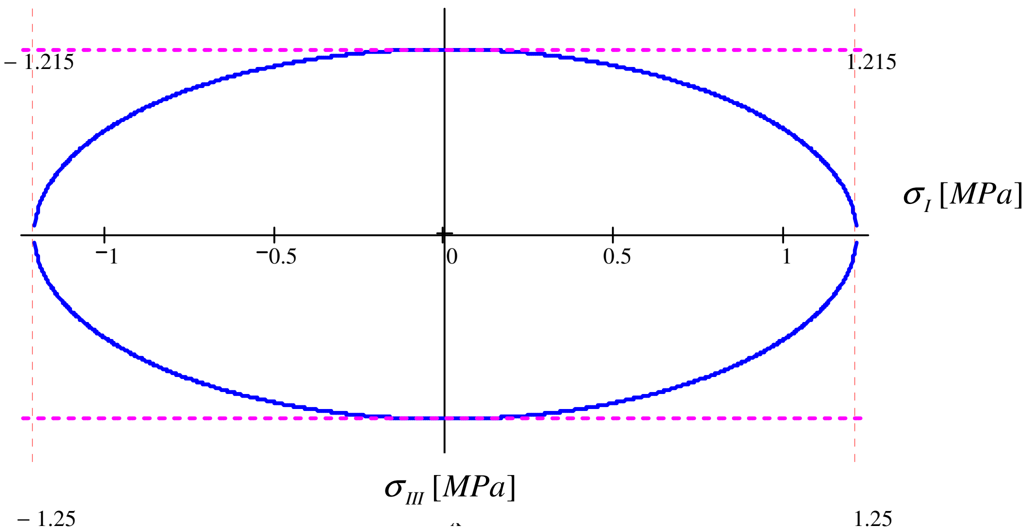
$L = 2000\,\mu m$, $d = 150\mu m$

Komórka prostopadłościenna

$L_{1-2} = 1000\,\mu m$, $L_{3-4} = 4000\,\mu m$, $H = 1000\,\mu m$,

$d = 120\mu m$

stop Cu-1%Ni, $E_s = 117\,GPa$, $G_s = 45\,GPa$, $R_e = 112\,MPa$



Komórka w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego

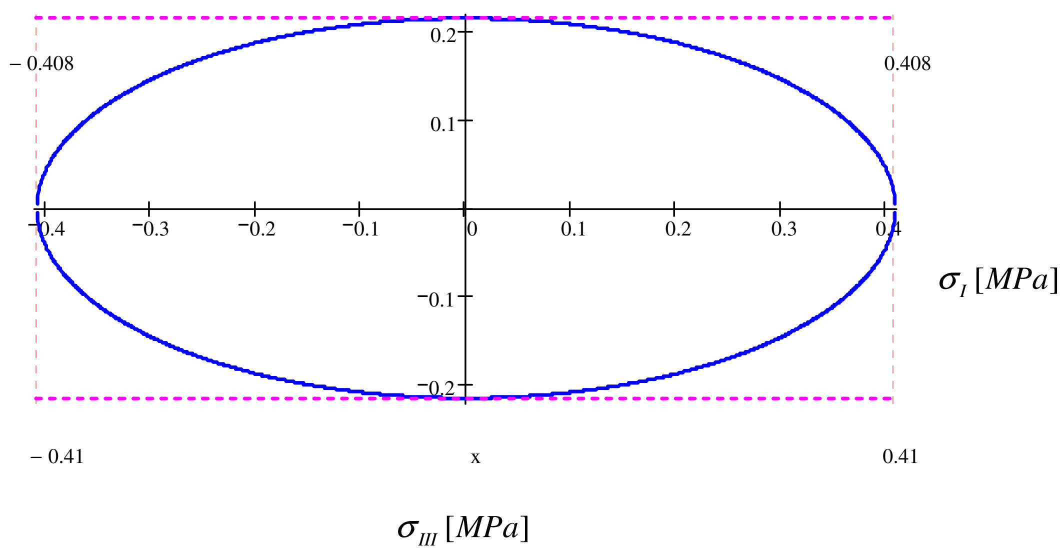
$L = 2000\,\mu m,\ H = 2000\,\mu m$

$d = 260\,\mu m$

stop Cu-1%Ni,

$E_s = 117\,GPa,\quad G_s = 45\,GPa$,

$R_e = 112\,MPa$



Komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego

$L = 2000\,\mu m,\ H = 2000\,\mu m$

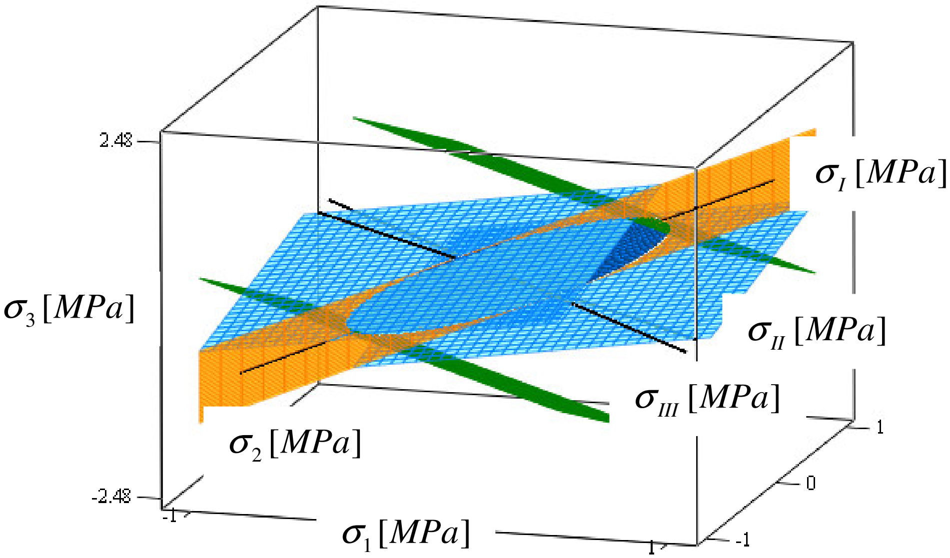
$d = 87\,\mu m$

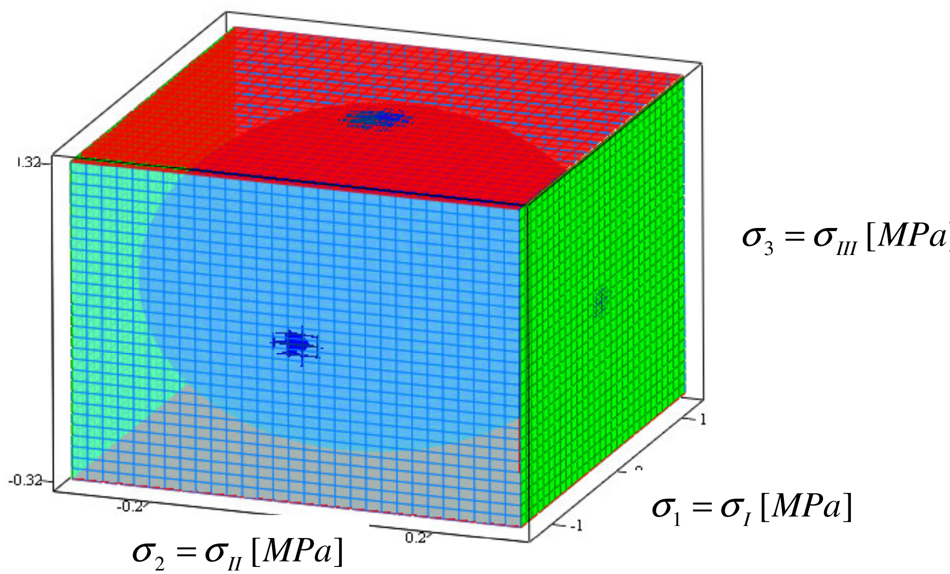
stop Cu-1%Ni,

$E_s = 117\,GPa,\quad G_s = 45\,GPa$,

$R_e = 112\,MPa$

PORÓWNANIE POWIERZCHNI GRANICZNYCH W PRZESTRZENI NAPRĘŻEŃ GŁÓWNYCH





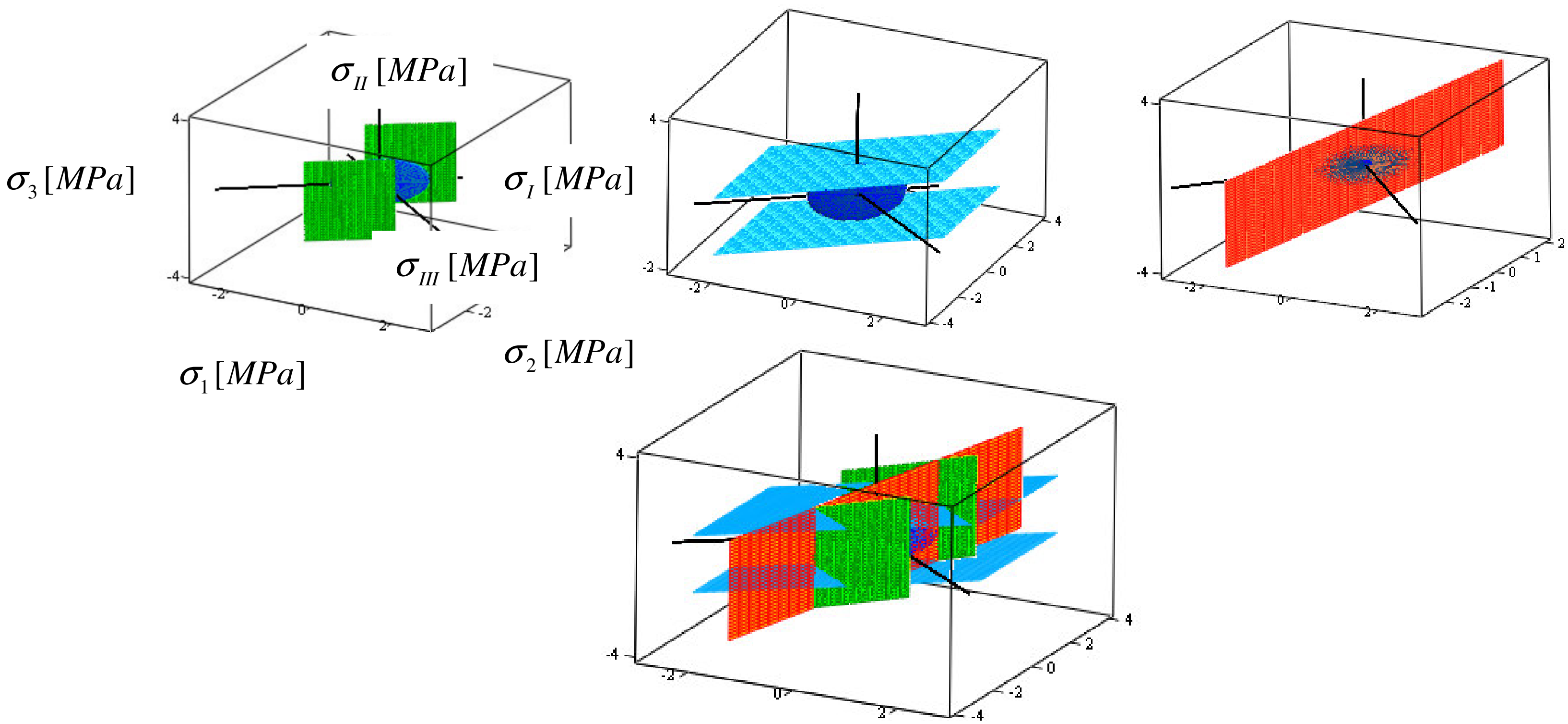
Komórka sześcienna

$L = 2000\,\mu m$, $d = 150\,\mu m$

Komórka prostopadłościenna

$L_{1-2} = 1000\,\mu m$, $L_{3-4} = 4000\,\mu m$, $H = 1000\,\mu m$, $d = 120\,\mu m$

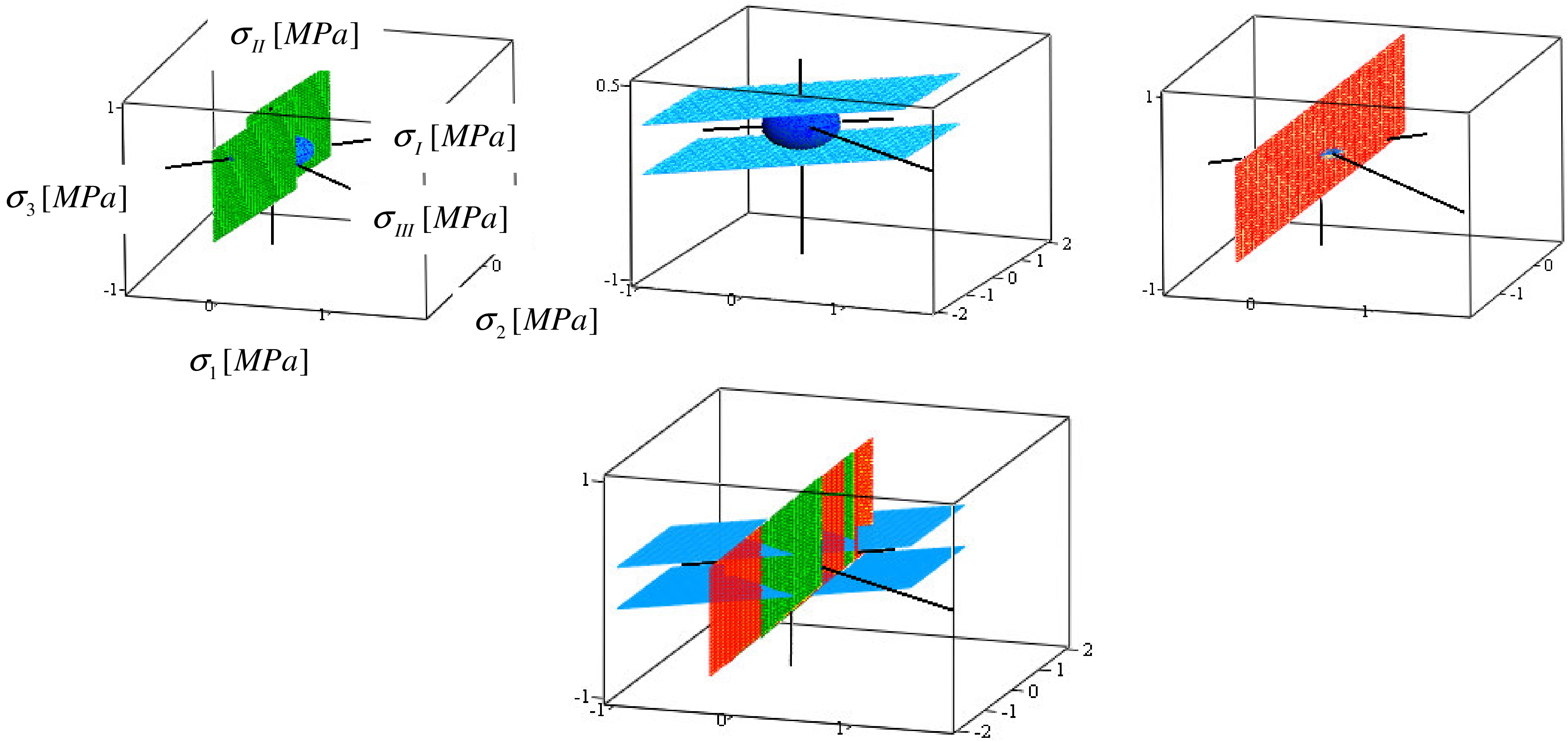
stop Cu-1%Ni, $E_s = 117\,GPa$, $G_s = 45\,GPa$, $R_e = 112\,MPa$



Komórka w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego

$L = 2000\,\mu m, \quad H = 2000\,\mu m, \quad d = 260\,\mu m$

stop Cu-1%Ni, $E_s = 117\,GPa, \quad G_s = 45\,GPa, \quad R_e = 112\,MPa$



Komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego

$$L = 2000\,\mu m,\quad H = 2000\,\mu m,\quad d = 87\,\mu m$$

stop Cu-1%Ni, $E_s = 117\,GPa,\quad G_s = 45\,GPa,\quad R_e = 112\,MPa$

NUMERYCZNA ANALIZA DEFORMACJI STRUKTUR KOMÓRKOWYCH

KOMÓRKA SZEŚCIENNA

Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) przedstawia zależność:

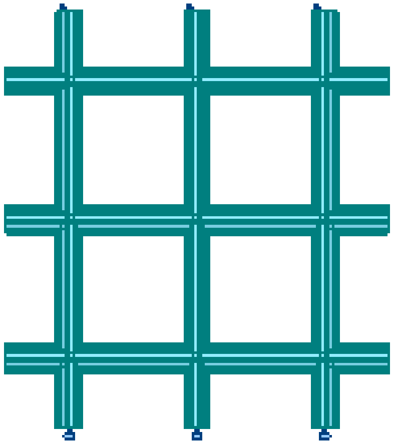
$$\sigma^{gr} = \pm \frac{3 R_e \dfrac{I\,A}{L^2}}{\sqrt{10\,I^2 + 27\,I^2 \sin^4\alpha + 3\sin^2\alpha\; h^2 L^2 A^2 - 3\sin^4\alpha\; h^2 L^2 A^2 - 27\,I^2 \sin^2\alpha}}$$

gdzie α jest dowolnym kierunkiem obciążenia.

Przyjmując σ^{gr} i $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ (rozciągnięcie wzdłuż osi y) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) w żadnym pręcie struktury nie jest przekroczona granica plastyczności R_e elementu belkowego, dla stali $E = 205GPa,\ G = 80.8GPa,$

$R_e = 215MPa, \quad \sigma^{z\ programu\ Robot} = 201MPa$

błąd; *6.9 %*



KOMÓRKA PROSTOPADŁOŚCIENNA

Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) przedstawia zależność:

$$\sigma^{gr} = \pm[2(4L_{3-4}^2 I^2 - 8L_{3-4}^2 I^2 \sin^2\alpha + 4L_{3-4}^2 I^2 \sin^4\alpha + 4\sin^4\alpha \, L_{1-2}^2 I^2 +$$

$$+\sin^2\alpha \, h^2 \, L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2 - \sin^4\alpha \, h^2 \, L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2)^{1/2} R_e I \frac{A}{R_e}]/[-4L_{3-4}^2 I^2 +$$

$$-8L_{3-4}^2 I^2 \sin^2\alpha - 4L_{3-4}^2 I^2 \sin^4\alpha - 4\sin^4\alpha \, L_{1-2}^2 I^2 - \sin^2\alpha \, h^2 \, L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2 +$$

$$+\sin^4\alpha \, h^2 \, L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2]$$

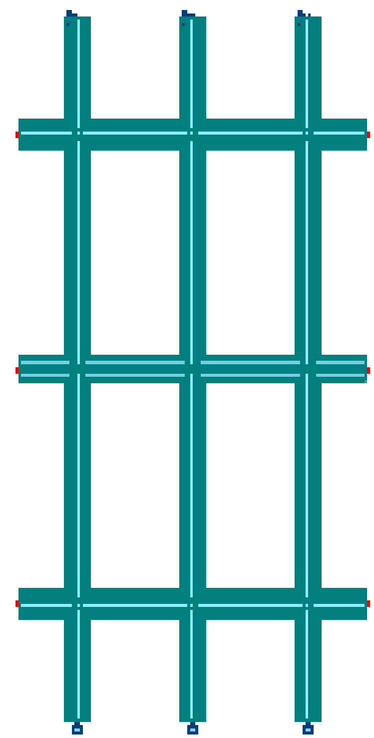
gdzie α jest dowolnym kierunkiem obciążenia.

Przyjmując σ^{gr} i $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (rozciągnięcie wzdłuż osi y) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) w żadnym pręcie struktury nie jest przekroczona granica plastyczności R_e elementu belkowego,

dla stali $E = 205GPa, \; G = 80.8GPa,$

$$R_e = 215MPa, \qquad \sigma^{z\ programu\ Robot} = 210.83\,MPa$$

błąd; *1.9 %*



KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O PODSTAWIE TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO

Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) przedstawia zależność:

$$\sigma^{gr} = \pm[2((35067\, I^2 - 72\, L^2\, h^2\, A^2 \sqrt{3} + 981\, L^2\, h^2\, A^2 + 576\, L\, I\, h\, A\sqrt{3} +$$

$$7848\, L\, I\, h\, A)(6457 - 384\sqrt{3}))^{1/2}\, I\, A \frac{R_e}{L\, H}]/[35067\, I^2 + 72\, L^2\, h^2\, A^2 \sqrt{3} +$$

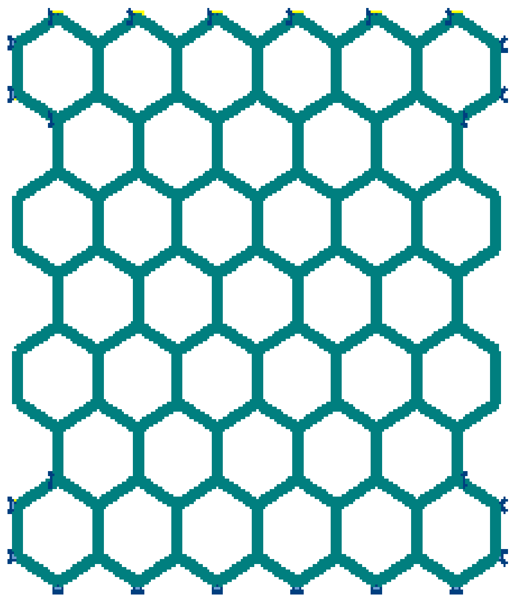
$$+981\, L^2\, h^2\, A^2 + 576\, L\, I\, h\, A\sqrt{3} + 7848\, L\, I\, h\, A]$$

Przyjmując σ^{gr} (rozciągnięcie wzdłuż osi x) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) w żadnym pręcie struktury nie jest przekroczona granica plastyczności R_e elementu belkowego,

dla stali $E = 205 GPa,\ G = 80.8 GPa,$

$R_e = 215 MPa, \quad \sigma^{z\ programu\ Robot} = 191.11 MPa$

błąd; *12 %*



KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O PODSTAWIE SZEŚCIOKĄTA FOREMNEGO

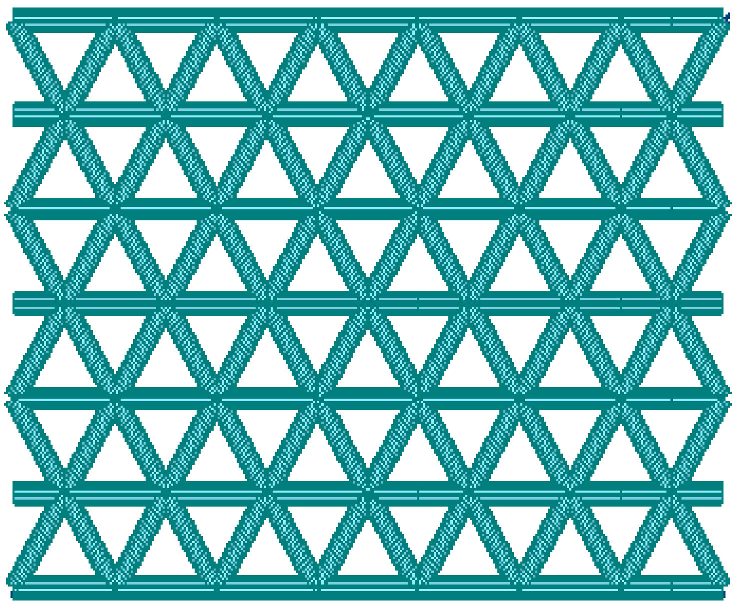
Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) przedstawia zależność:

$$\sigma^{gr} = \frac{2\sqrt{(\lambda_{III}\,\Phi_{III}^{gr} + \lambda_{I}\,\Phi_{I}^{gr})\,\lambda_{III}\,\Phi_{III}^{gr}\,\lambda_{I}\,\Phi_{I}^{gr}}}{\lambda_{III}\,\Phi_{III}^{gr} + \lambda_{I}\,\Phi_{I}^{gr}}$$

Przyjmując σ^{gr} (rozciągnięcie wzdłuż osi y) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) naprężenia w prętach struktury są w przybliżeniu równe granicy plastyczności R_e elementu belkowego, dla stali $E = 205 GPa,\ G = 80.8 GPa,$

$R_e = 215 MPa,\ \sigma^{z\ programu\ Robot} = 230.90\, MPa$

błąd; 7.3 %



PODSUMOWANIE

Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) komórki sześciennej przedstawia zależność:

$$\sigma^{gr} = \pm \frac{3 R_e \dfrac{I\,A}{L^2}}{\sqrt{10\,I^2 + 27\,I^2 \sin^4\alpha + 3\sin^2\alpha\; h^2 L^2 A^2 - 3\sin^4\alpha\; h^2 L^2 A^2 - 27\,I^2 \sin^2\alpha}}$$

Przyjmując σ^{gr} i $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (rozciągnięcie po kątem 45^{O} do osi x i y) dla dowolnego materiału elementu belkowego: stal $E = 205 GPa,\; G = 80.8 GPa,\; R_e = 215 MPa$.

Wartość naprężenia w elementach belkowych uwzględniając:

- kryterium J. Rychlewskiego jest równa

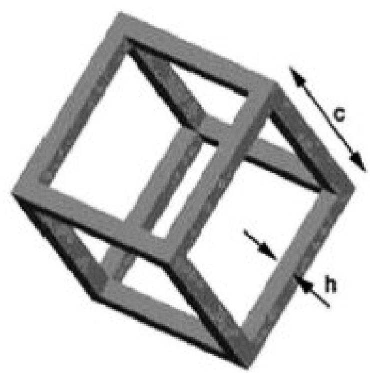
$$\sigma^{z\ programu\ Robot} = 192.05\,MPa$$

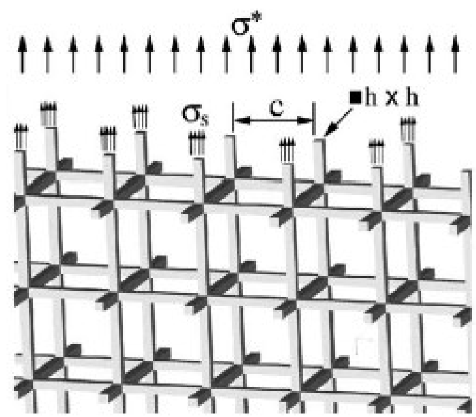
- kryterium dla rozłącznych stanów własnych jest równa

$$\sigma^{z\ programu\ Robot} = 192.76\,MPa$$

PORÓWNANIE OTRZYMANYCH REZULTATÓW Z DANYMI PREZENTOWANYMI W LITERATURZE

komórka sześcienna: $c = L = 1.8\ 10^{-3}\ m$, $h = 0.409610^{-3} m$





piana węglowa: $E_s = 2.6\,GPa,\quad G_s = 1.04\,GPa,\quad \sigma_s = R_e = 69.5\,MPa,\quad \nu_s = 0.17$

rozwiązanie analityczne wg [Sukjoo Choi et al. 2005]:

$E^* = 134.632\,GPa,\quad G^* = 3.486\,GPa,\quad \sigma_{gr}{}^* = 3.599\,MPa$ ($\uparrow$ 0.5%)

wyniki doświadczalne wg [Sukjoo Choi et al. 2005]:

$E^* = 124\,GPa,\quad \sigma_{gr}{}^* = 3.5805\,MPa$

rozwiązanie analityczne wg obliczeń własnych:

$E^* = 134.632\,GPa,\quad G^* = 2.919\,GPa,\quad \sigma_{gr}{}^* = 3.414\,MPa$ ($\downarrow$ 5%)

LITERATURA

1. Rychlewski J.: Elastic energy decomposition and limit criteria, Uspekhi Mekh. - Advances in Mech., 1984, t. 7, s. 51÷80 (po rosyjsku).
2. Rychlewski J.: Unconventional approach to linear elasticity, Arch. Mech., 1995, t. 47, s. 149÷171.
3. Arramon Y. A., Mehrabadi M. M., Martin D. W., Cowin S. C.: A multidimensional anisotropic strength criterion based on Kelvin modes, Interational Journal of Solids and Struktures, 2000, t. 37, s. 2915-2935.
4. Wang A. J., McDowell D. L.: Yield surfaces of various periodic metal honeycombs at intermediate relative density, International af of Plasticity, 2005, t. 21, s. 285-320.
5. Choi S., Sankar B. V.: A micromechanical method to predict the fracture toughness of cellular material, International Journal and Structures 42, 2005, 1797-1817.
6. Choi S., Sankar B. V.: Fracture toughnes of carbon foam, Journal of Composite Materials, Vol 37, No. 23/2003.

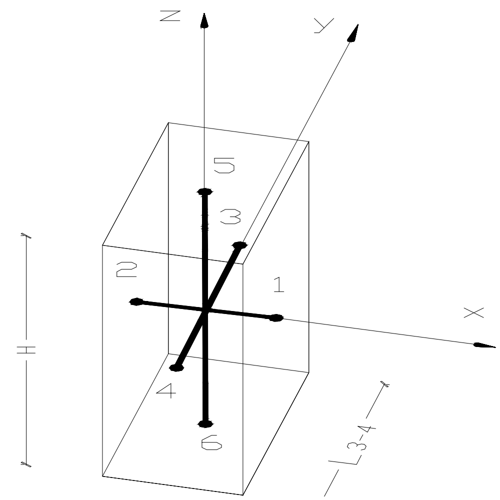
KOMÓRKA PROSTOPADŁOŚCIENNA - ORTOTROPIA

OZNACZENIA

L_{1-2} , L_{3-4} , H - *wymiary elementów belkowych (szkieletu)*

s_{n1-2} , s_{n3-4} , s_{n5-6} - *sztywności elementów belkowych na rozciąganie*

$s_{\tau 1-2}$, $s_{\tau 3-4}$, $s_{\tau 5-6}$ - *sztywności elementów belkowych na zginanie*



MODUŁY KELVINA

$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{L_{1-2}\; s_{n1-2}}{2\, L_{3-4}\; H} \qquad \lambda_{II} = \lambda_2 = \frac{L_{3-4}\; s_{n3-4}}{2\, L_{1-2}\; H} \qquad \lambda_{III} = \lambda_3 = \frac{H\; s_{n5-6}}{2\, L_{1-2}\; L_{3-4}}$$

$$\lambda_{IV} = \lambda_4 = \frac{\dfrac{2\, H^2\; s_{\tau 5-6}}{L_{3-4}^{\;2}\; s_{\tau 3-4} + H^2\; s_{\tau 5-6}} \; \dfrac{L_{3-4}}{2}\; s_{\tau 3-4}}{L_{1-2}\; H}$$

$$L_{1-2} \le L_{3-4} \le H$$

$$\lambda_V = \lambda_5 = \frac{\dfrac{2\, H^2\; s_{\tau 5-6}}{L_{1-2}^{\;2}\; s_{\tau 1-2} + H^2\; s_{\tau 5-6}} \; \dfrac{L_{1-2}}{2}\; s_{\tau 1-2}}{L_{3-4}\; H} \qquad \lambda_{VI} = \lambda_6 = \frac{\dfrac{2\, L_{3-4}^{\;2}\; s_{\tau 3-4}}{L_{3-4}^{\;2}\; s_{\tau 3-4} + L_{1-2}^{\;2}\; s_{\tau 1-2}} \; \dfrac{L_{1-2}}{2}\; s_{\tau 1-2}}{L_{3-4}\; H}$$

GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH

$$\sigma_I = \sigma_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{A\,R_e}{L_{3-4}\,H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I}\left(\frac{A\,R_e}{L_{3-4}\,H}\right)^2$$

$$\sigma_{II} = \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{A\,R_e}{L_{1-2}\,H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}}\left(\frac{A\,R_e}{L_{1-2}\,H}\right)^2$$

$$\sigma_{III} = \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{A\,R_e}{L_{1-2}\,L_{3-4}} \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{III}}\left(\frac{A\,R_e}{L_{1-2}\,L_{3-4}}\right)^2$$

$$\sigma_{IV}=\sigma_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\,\dfrac{\frac{I}{2}R_e\frac{2}{H}}{L_{1-2}\,L_{3-4}} \\ 0 & \sqrt{2}\,\dfrac{\frac{I}{2}R_e\frac{2}{H}}{L_{1-2}\,L_{3-4}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{IV}^{gr}=\frac{1}{\lambda_{IV}}\,8\,\frac{I^2\,R_e^2}{h^2\,L_{1-2}{}^2\,L_{3-4}{}^2\,H^2}$$

$$\sigma_V=\sigma_5=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}\,\dfrac{\frac{I}{2}R_e\frac{2}{H}}{L_{1-2}\,L_{3-4}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\,\dfrac{\frac{I}{2}R_e\frac{2}{H}}{L_{1-2}\,L_{3-4}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{V}^{gr}=\frac{1}{\lambda_{V}}\,8\,\frac{I^2\,R_e^2}{h^2\,L_{1-2}{}^2\,L_{3-4}{}^2\,H^2}$$

$$\sigma_{VI} = \sigma_6 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}\,\dfrac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{L_{3-4}}}{L_{1-2}\, H} & 0 \\ \sqrt{2}\,\dfrac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{L_{3-4}}}{L_{1-2}\, H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{VI}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{VI}}\, 8\, \frac{I^2\, R_e^2}{h^2\, L_{1-2}{}^2\, L_{3-4}{}^2\, H^2}$$

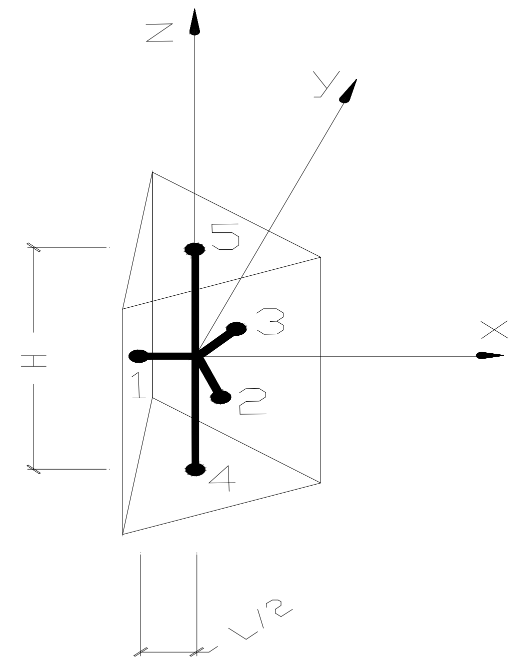
KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O PODSTAWIE TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO – SYMETRIA TRANSWERSALNIE IZOTROPOWA

OZNACZENIA

$L\,,H$ - *wymiary elementów belkowych (szkieletu)*

$s_{nL}\;,\,s_{nH}$ - *sztywności elementów belkowych na rozciąganie*

$s_{\tau L}\;,\,s_{\tau H}$ - *sztywności elementów belkowych na zginanie*



MODUŁY KELVINA

$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}\, s_{nL}}{6\,H}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_3 = \frac{2\sqrt{3}\,H\,s_{nH}}{9\,L^2}$$

$$\lambda_{III} = \lambda_2 = \lambda_6 = \frac{\sqrt{3}\,s_{nL}\,s_{\tau L}}{3\,H\,(s_{nL}+s_{\tau L})}$$

$$\lambda_{IV} = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{4\sqrt{3}\,H\,s_{\tau H}\,s_{\tau L}}{3\,(3\,L^2\,s_{\tau L}+4\,H^2\,s_{\tau H})}$$

$L \le H$

GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH

$$\sigma_I = \sigma_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}\, A\, R_e}{3\, L\, H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}\, A\, R_e}{3\, L\, H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I}\,\frac{2}{3}\,\frac{A^2\, R_e^2}{L^2\, H^2}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-4\sqrt{3}\, A\, R_e}{9\, L^2} \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}}\,\frac{16}{27}\,\frac{A^2\, R_e^2}{L^4}$$

$$\sigma_{III} = \sigma_{3,4} = \begin{bmatrix} \dfrac{I\,A\,R_e\,(4\sqrt{3}-1)}{L\,H\,(4\,I + L\,h\,A)} & \dfrac{2\sqrt{3}\,I\,A\,R_e}{3\,L\,H\,(4\,I + L\,h\,A)} & 0 \\ \dfrac{2\sqrt{3}\,I\,A\,R_e}{3\,L\,H\,(4\,I + L\,h\,A)} & -\dfrac{I\,A\,R_e\,(4\sqrt{3}-1)}{L\,H\,(4\,I + L\,h\,A)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{III}}\,\frac{2}{9}\,\frac{I^2\,A^2\,R_e^{\,2}\,(61 - 8\sqrt{3}\,)}{H^2\,L^2\,(4\,I + L\,h\,A)^2}$$

$$\sigma_{IV} = \sigma_{5,6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{4\sqrt{3}\,I\,R_e}{9\,L^2\,h\,H} \\ 0 & 0 & \dfrac{4\sqrt{3}\,I\,R_e}{9\,L^2\,h\,H} \\ \dfrac{4\sqrt{3}\,I\,R_e}{9\,L^2\,h\,H} & \dfrac{4\sqrt{3}\,I\,R_e}{9\,L^2\,h\,H} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{IV}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{IV}}\,\frac{64}{27}\,\frac{I^2\,R_e^2}{H^2\,L^4\,h^2}$$

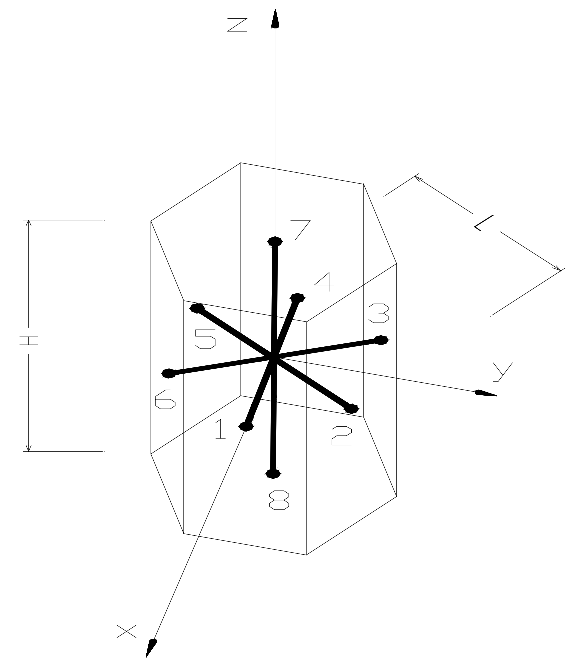
KOMÓRKA W POSTACI PRYZMY O PODSTAWIE SZEŚCIOKĄTA FOREMNEGO – SYMETRIA TRANSWERSALNIE IZOTROPOWA

OZNACZENIA

$L\,,\,H$ - *wymiary elementów belkowych (szkieletu)*

$s_{nL}\;,\;s_{nH}$ - *sztywności elementów belkowych na rozciąganie*

$s_{\tau L}\;,\;s_{\tau H}$ - *sztywności elementów belkowych na zginanie*



MODUŁY KELVINA

$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}\,s_{nL}}{2\,H}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_3 = \frac{\sqrt{3}\,H\,s_{nH}}{3\,L^2}$$

$$\lambda_{III} = \lambda_2 = \lambda_6 = \frac{\sqrt{3}\,(s_{nL} + 2\,s_{\tau L})}{4\,H}$$

$$\lambda_{IV} = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{2\sqrt{3}\,H\,s_{\tau H}\,s_{\tau L}}{3\,L^2\,s_{\tau L} + 2\,H^2\,s_{\tau H}}$$

GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH

$$\sigma_I = \sigma_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}\, A\, R_e}{L\, H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}\, A\, R_e}{L\, H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I}\, 6\, \frac{A^2\, R_e^2}{L^2\, H^2}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2\sqrt{3}\, A\, R_e}{3\, L\, H} \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}}\, \frac{4}{3}\, \frac{A^2\, R_e^2}{H^2\, L^2}$$

$$\sigma_{III} = \sigma_{3,4} = \begin{bmatrix} \frac{2\,I\,A\,R_e\,\sqrt{3}\,(s_{nL}+2\,s_{\tau L})}{L\,H\,(4\,I\,s_{nL}+L\,s_{\tau L}\,h\,A)} & \frac{I\,A\,R_e\,\sqrt{3}\,(s_{nL}+2\,s_{\tau L})}{L\,H\,(4\,I\,s_{nL}+L\,s_{\tau L}\,h\,A)} & 0 \\ \frac{I\,A\,R_e\,\sqrt{3}\,(s_{nL}+2\,s_{\tau L})}{L\,H\,(4\,I\,s_{nL}+L\,s_{\tau L}\,h\,A)} & -\frac{2\,I\,A\,R_e\,\sqrt{3}\,(s_{nL}+2\,s_{\tau L})}{L\,H\,(4\,I\,s_{nL}+L\,s_{\tau L}\,h\,A)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{\,III}}\,30\,\frac{(s_{nL}+2\,s_{\tau L})^2\,R_e^2\,A^2\,I^2}{H^2\,L^2\,(4\,s_{nL}\,I+L\,s_{\tau L}\,h\,A)^2}$$

$$\sigma_{IV} = \sigma_{5,6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}\,I\,R_e}{3\,L^2\,h\,H} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}\,I\,R_e}{3\,L^2\,h\,H} \\ \frac{2\sqrt{3}\,I\,R_e}{3\,L^2\,h\,H} & \frac{2\sqrt{3}\,I\,R_e}{3\,L^2\,h\,H} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{IV}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{\,IV}}\,\frac{16}{3}\,\frac{I^2\,R_e^2}{H^2\,L^4\,h^2}$$