Politechnika Krakowska
Wydział Inżynierii Lądowej
Instytut Mechaniki Budowli
Katedra Wytrzymałości Materiałów

Podstawy teorii wytężenia materiałów komórkowych w oparciu o energetyczne kryteria stanów granicznych

Piotr Kordzikowski

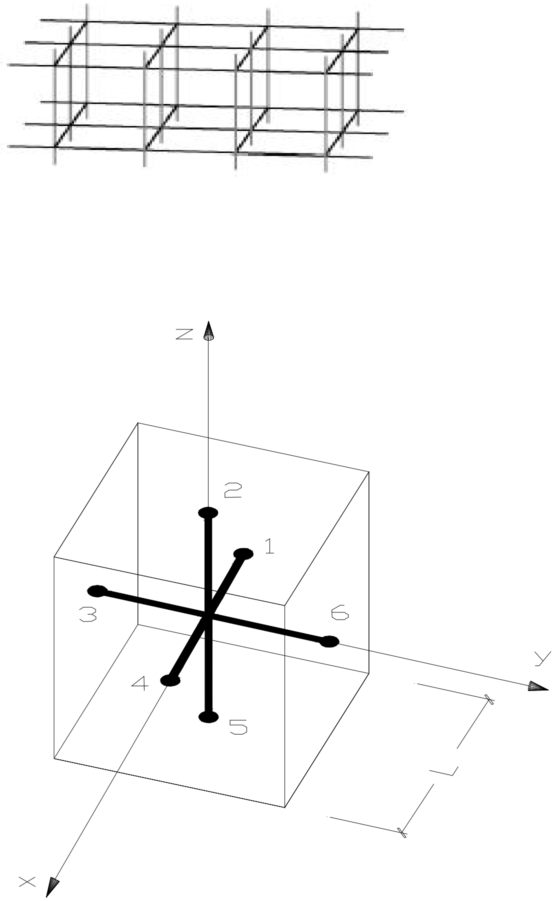
Kraków 2006

PLAN PREZENTACJI

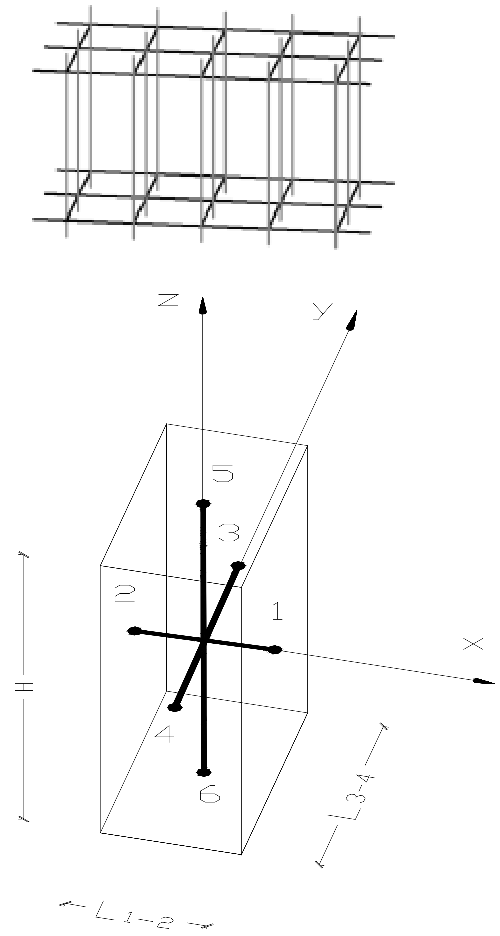
- Przedmiot badań
- Cel pracy
- Aktualne problemy dotyczące zastosowań, wytwarzania i modelowania własności mechanicznych materiałów komórkowych na podstawie literatury
- Podstawy teorii sprężystych stanów własnych i stanów granicznych materiałów anizotropowych
- Kryteria energetyczne dla materiałów komórkowych
- Analiza rozkładu gęstości energii stanów granicznych
- Porównanie otrzymanych rezultatów z danymi prezentowanymi w literaturze
- Literatura

PRZEDMIOT BADAŃ

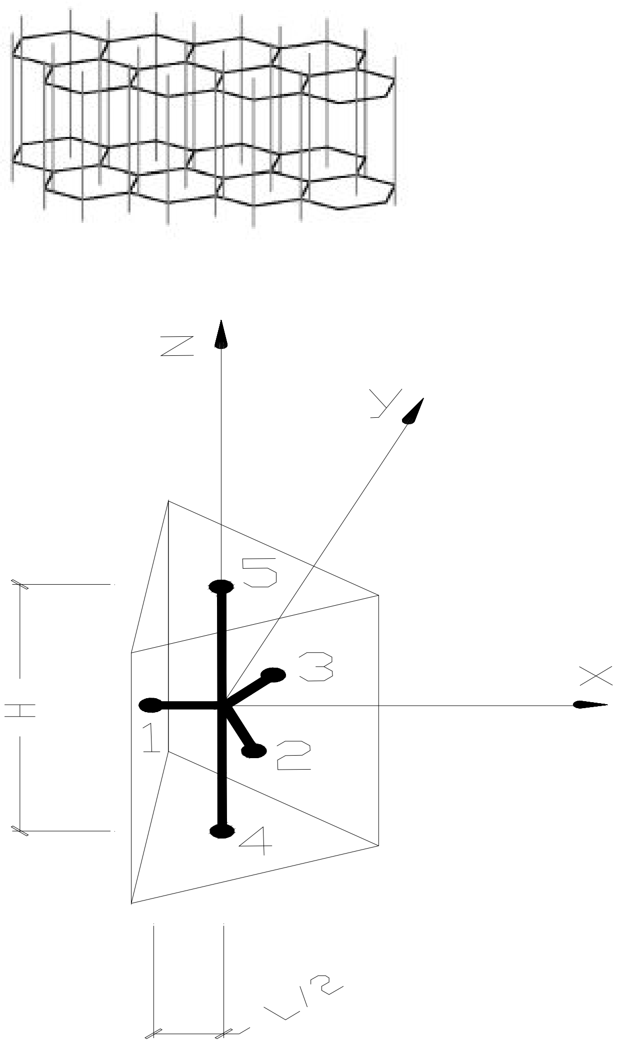
Materiały komórkowe o szkielecie regularnym



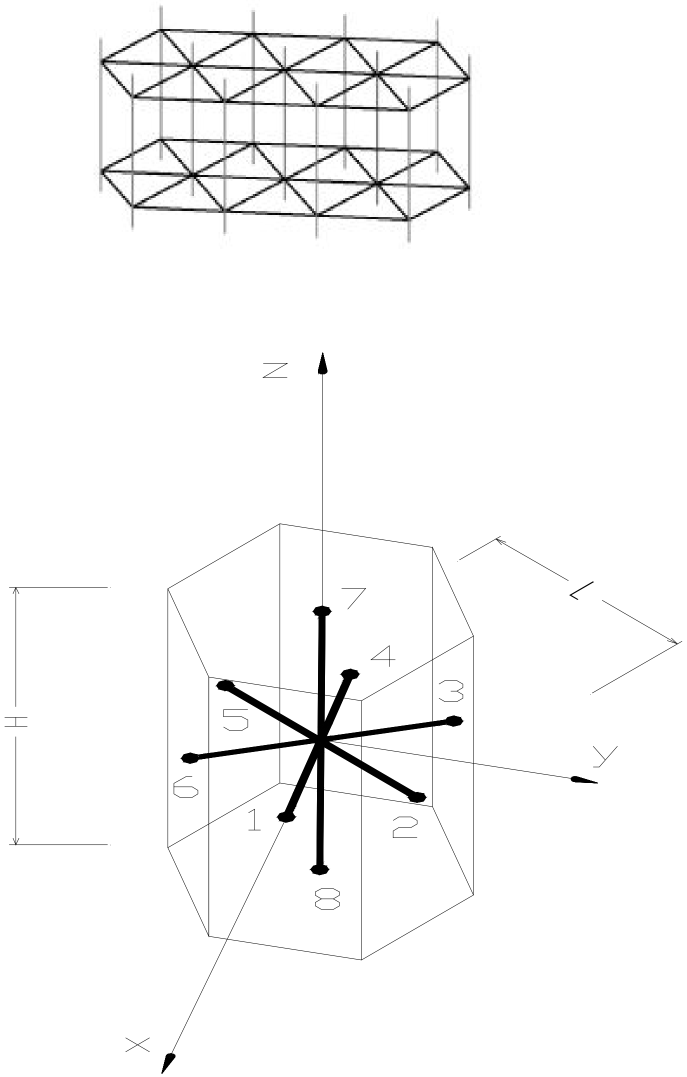
Komórka sześcienna



Komórka prostopadłościenna



Komórka w postaci pryzmy
o podstawie trójkąta
równobocznego



Komórka w postaci pryzmy
o podstawie sześciokąta
foremnego

CEL PRACY

Opracowanie teorii wytężenia materiałów komórkowych z uwzględnieniem parametrów mikrostruktury szkieletu z zastosowaniem teorii sprężystych stanów własnych i energetycznych warunków granicznych podanych przez J. Rychlewskiego [1984].

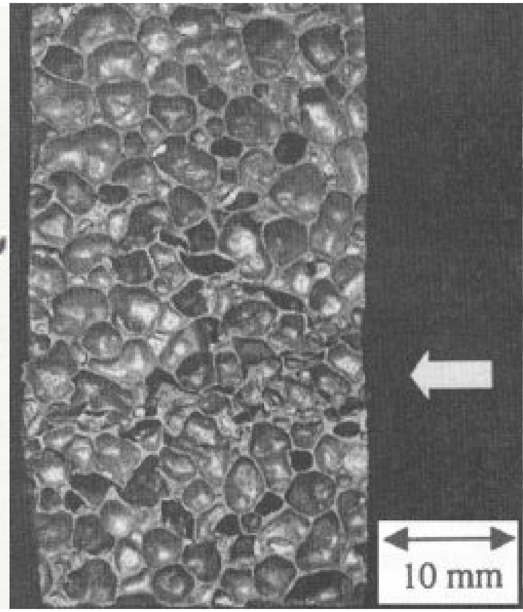
Zastosowanie do materiałów komórkowych propozycji, że graniczne wartości gęstości energii sprężystych Φ_p^{gr} dla poszczególnych stanów własnych można obliczać z mikrostrukturalnego modelu materiału (K. T. Nalepka, R. B. Pęcherski [2003]).

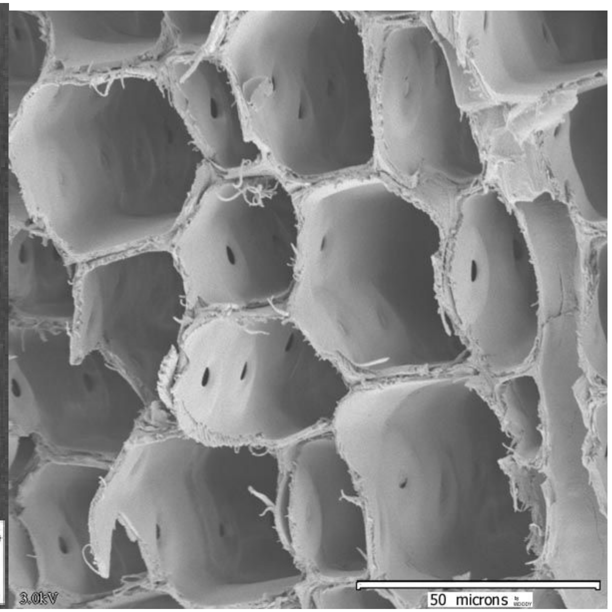
Wyprowadzono analityczne formuły dla sprężystych modułów Kelvina oraz granicznych energii sprężystych z wykorzystaniem programu do symbolicznych obliczeń Mathcad.

MATERIAŁY KOMÓRKOWE RODZAJE, ZASTOSOWANIE I MODELOWANIE

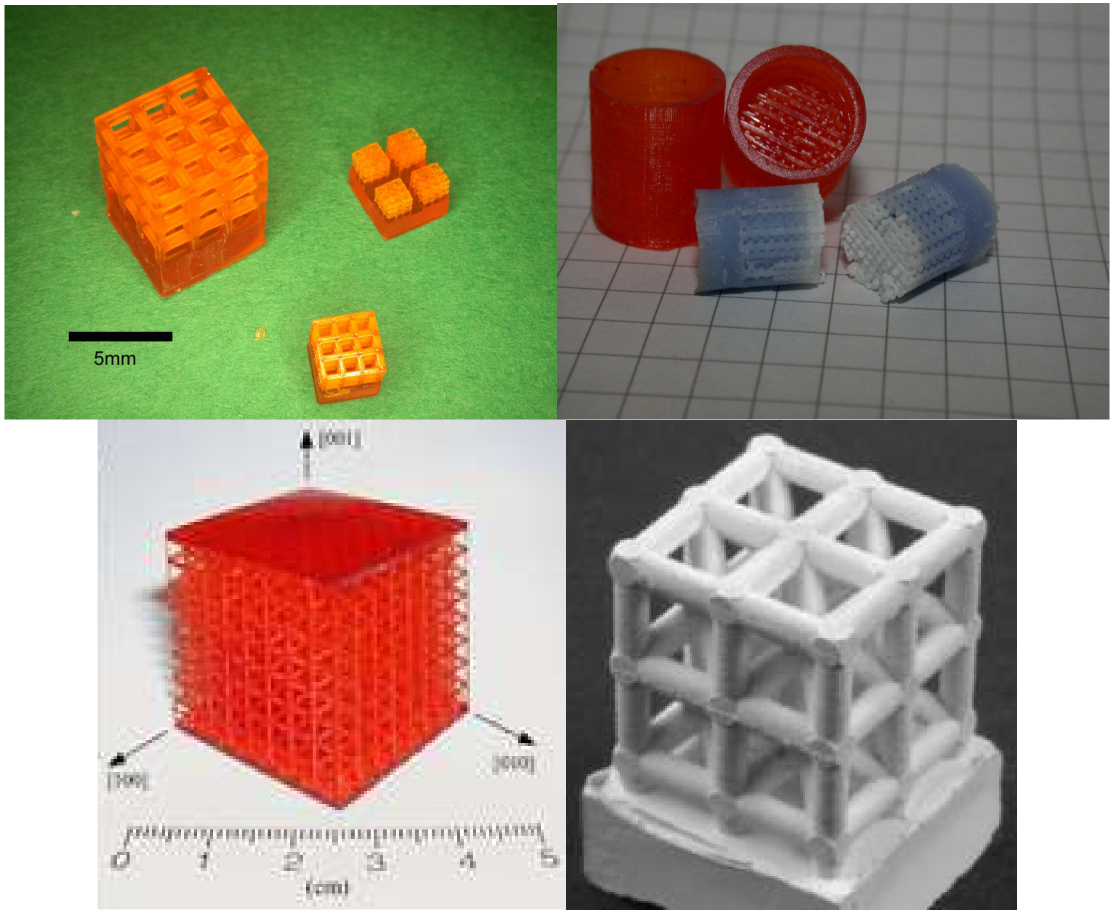
OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA

a b c



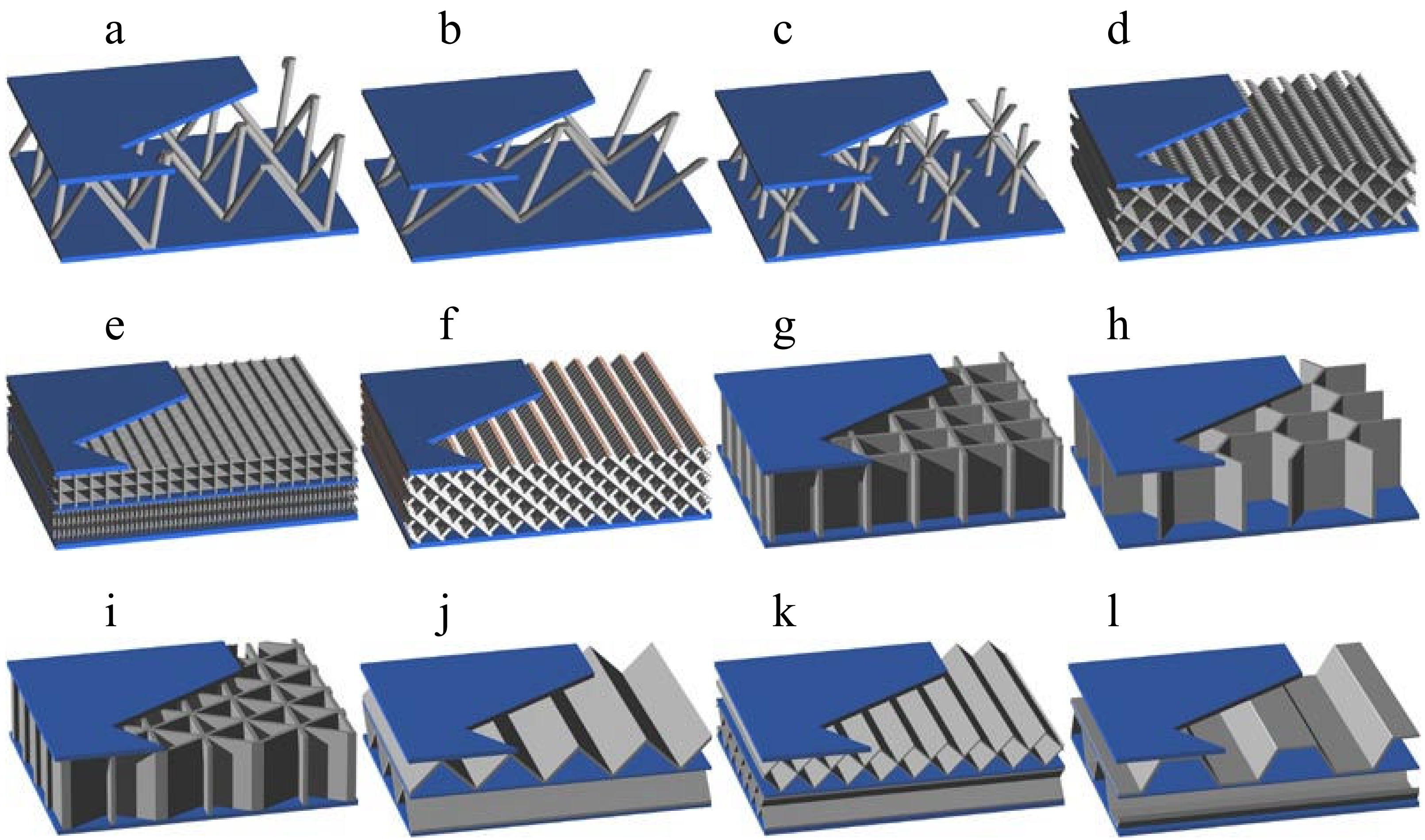


a) pianka aluminiowa – komórka otwarta,
b) pianka aluminiowa – komórka zamknięta
c) struktura drewna



Struktury komórkowe polimerowe lub ceramiczne

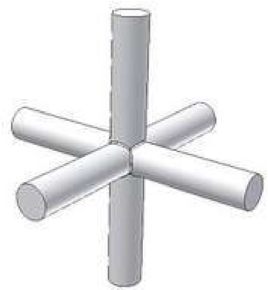
ZASTOSOWANIE MATERIAŁÓW KOMÓRKOWYCH



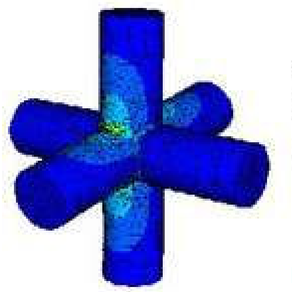
Wypełnienie płyt strukturami komórkowymi

MODELOWANIE MATERIAŁÓW KOMÓRKOWYCH

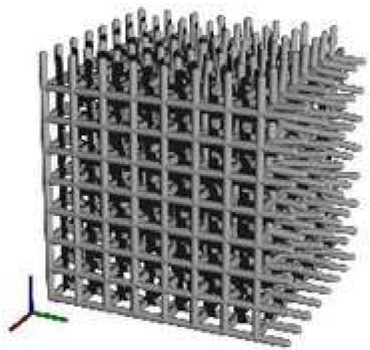
a

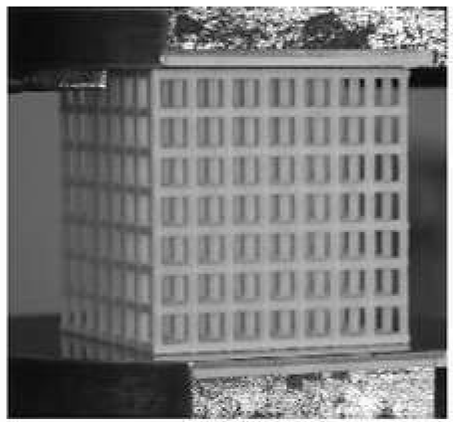


b



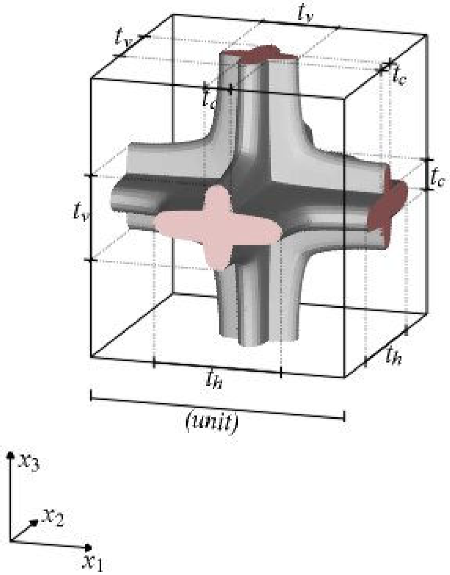
Reprezentatywny element struktury komórkowej: a) model teoretyczny ze sztywnym węzłem, b) zastosowanie metody elementów skończonych do analizy węzła



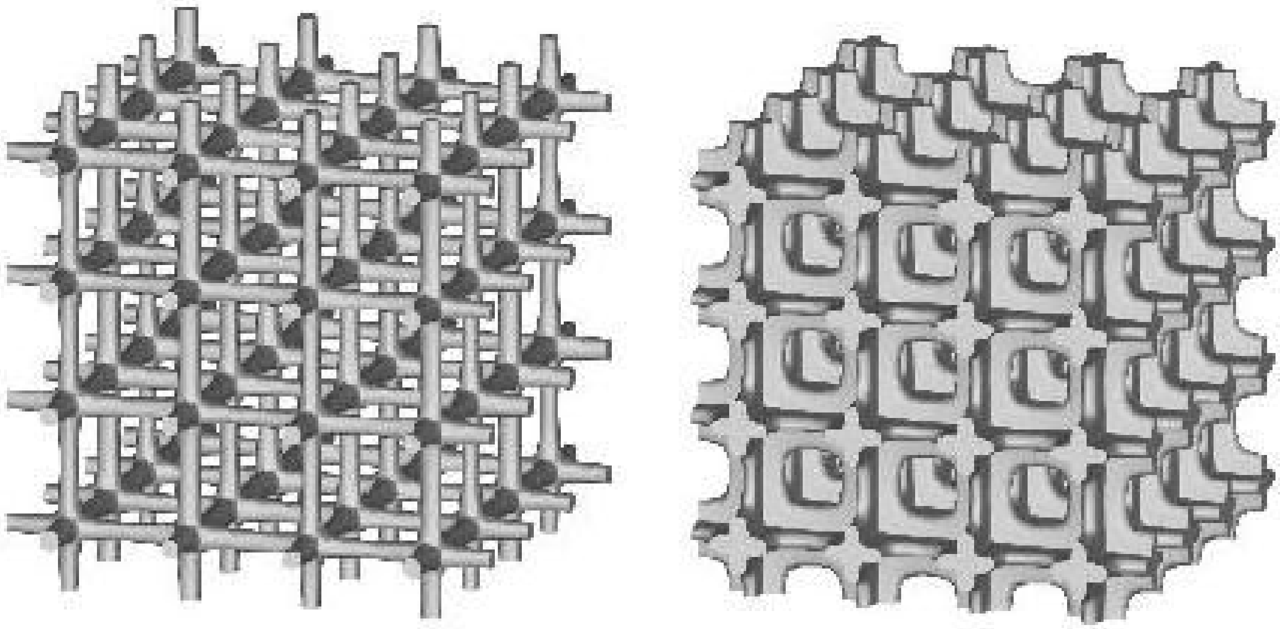


Badania doświadczalne

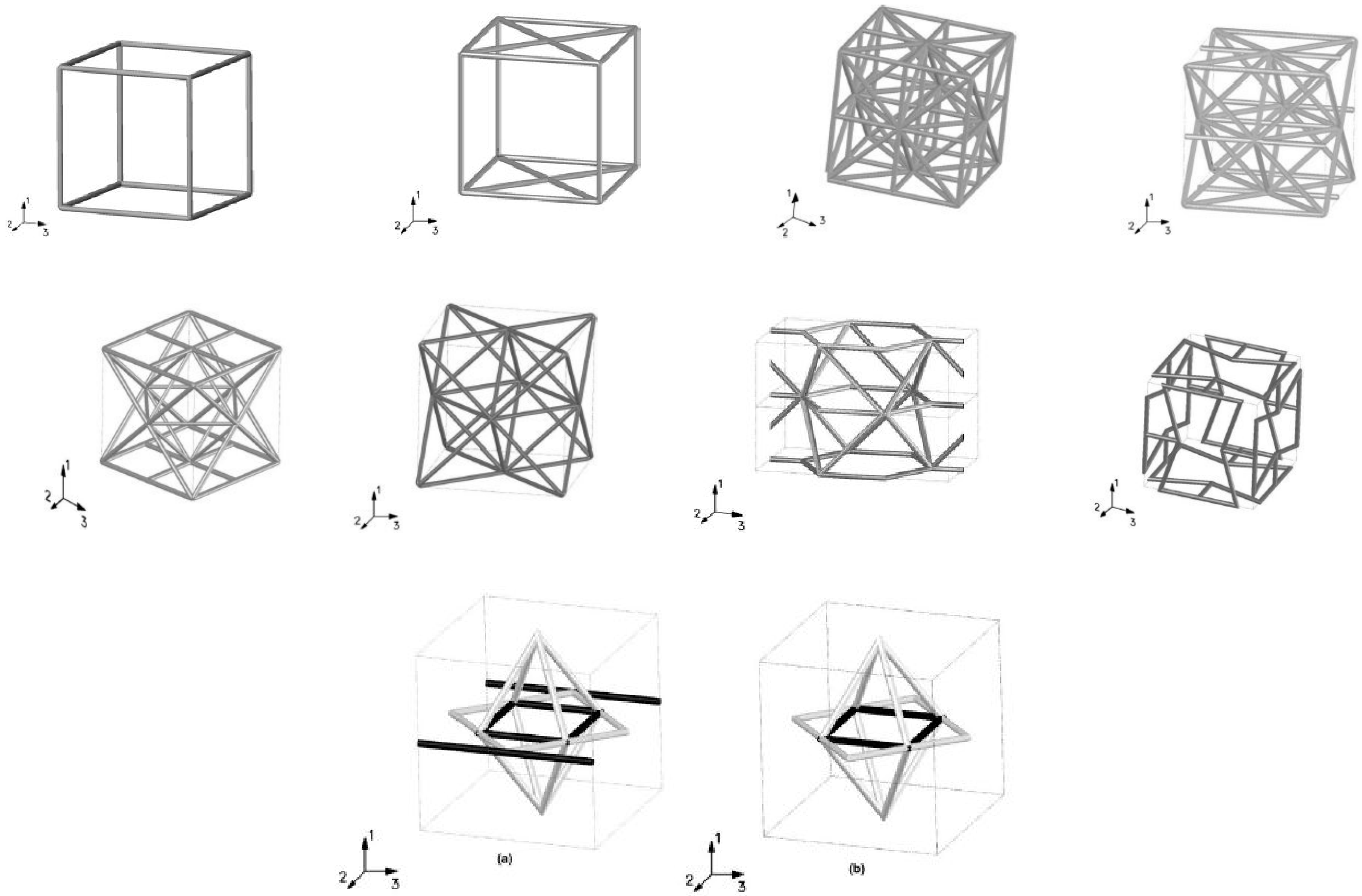
a



b



a) reprezentatywna komórka sześcienna
b) model struktury kości gąbczastej przyjęty do obliczeń numerycznych
(P. Kowalczyk [2003])



Przykłady struktur komórkowych analizowanych numerycznie
w pracy J. Aboudi, R. Gilat [2005]

PODSTAWY TEORII SPRĘŻYSTYCH STANÓW WŁASNYCH I STANÓW GRANICZNYCH MATERIAŁÓW ANIZOTROPOWYCH

LINIOWA SPRĘŻYSTOŚĆ MATERIAŁÓW ANIZOTROPOWYCH

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad \mathbf{S}, \mathbf{C}$$ - tensory Hooke'a

zagadnienie własne

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_i = \lambda_i \boldsymbol{\omega}_i, \quad \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{\lambda_i} \boldsymbol{\omega}_i$$

rozkład spektralny (J. Rychlewski [1984])

$$\mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_i \otimes \boldsymbol{\omega}_i = \lambda_I \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \ldots + \lambda_{VI} \boldsymbol{\omega}_{VI} \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}$$

Dla dowolnego sprężystego ciała z tensorami Hooke'a $\mathbf{S}$, $\mathbf{C}$ istnieje dokładnie jeden ortogonalny rozkład przestrzeni tensorów symetrycznych drugiego rzędu na podprzestrzenie $\mathcal{P}_k$: $\mathbf{T}_2^S = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_\rho$, $\rho \le 6$ i ciąg modułów Kelvina $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_\rho$ taki, że

$$\mathbf{S} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \ldots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho$$

gdzie tensor $\mathbf{P}_k$ jest projektorem ortogonalnym na podprzestrzeń $\mathcal{P}_k$.

Dla tensora podatności rozkład spektralny ma postać

$$\mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_i \otimes \boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{\lambda_I} \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \ldots + \frac{1}{\lambda_{VI}} \boldsymbol{\omega}_{VI} \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \ldots + \frac{1}{\lambda_\rho} \mathbf{P}_\rho$$

Z rozkładu spektralnego tensorów Hooke'a $\mathbf{S}$, $\mathbf{C}$ wynika wyrażenie na energię sprężystą

$$2\Phi(\sigma_i) = \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = C_{klmn}\, \sigma_{kl}^{(i)}\, \sigma_{mn}^{(i)} = \frac{1}{\lambda^{(i)}} (\sigma^{(i)})^2, \qquad i = 1, \ldots, p \qquad p \leq 6$$

gdzie: $(\sigma^{(i)})^2$ - kwadrat rzutu tensora naprężenia na *i*-ty wektor własny tensora $\mathbf{S}$, $\mathbf{C}$

$\lambda^{(i)}$ - *i*-ta wartość własna tensora $\mathbf{S}$, $\mathbf{C}$

Główny rozkład energii sprężystej odpowiadający rozkładowi przestrzeni $\mathcal{T}_2^S$ na podprzestrzenie własne $\mathcal{P}_k$ dla tensora $\mathbf{C}$ przyjmuje postać (J. Rychlewski [1984])

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \phi(\boldsymbol{\sigma}_1 + \ldots + \boldsymbol{\sigma}_\rho) = \phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \ldots + \phi(\boldsymbol{\sigma}_\rho) = \frac{\overset{2}{\sigma_1}}{2\lambda_1} + \frac{\overset{2}{\sigma_2}}{2\lambda_2} + \ldots + \frac{\overset{2}{\sigma_\rho}}{2\lambda_\rho}$$

Obszar stosowalności prawa Hooke'a określa kwadratowy warunek graniczny typu R. von Mises'a [1928]

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} \leq 1$$

Warunek graniczny typu Mises'a przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{h_1}\phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \frac{1}{h_2}\phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \ldots + \frac{1}{h_\rho}\phi(\boldsymbol{\sigma}_\rho) = \frac{\overset{2}{\sigma_1}}{k_1^2} + \frac{\overset{2}{\sigma_2}}{k_2^2} + \ldots + \frac{\overset{2}{\sigma_\rho}}{k_\rho^2} \leq 1$$

gdzie: $h_\alpha = \dfrac{k_\alpha^2}{2\lambda_\alpha}$ jest graniczną wartością energii sprężystej dla naprężenia $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ - $\dfrac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_\alpha)}{h_\alpha} = \dfrac{1}{h_\alpha}\dfrac{\overset{2}{\sigma_\alpha}}{2\lambda_\alpha} = \dfrac{\sigma_\alpha^{\,2}}{k_\alpha^2}$,

przestrzeń $\mathcal{P}_\alpha$ jest przestrzenią stanów bezpiecznych jeśli $k_\alpha \to \infty$, warunek graniczny wiąże zatem w pewien posób własności sprężyste ciała z jego własnościami w stanie granicznym

KRYTERIA ENERGETYCZNE DLA MATERIAŁÓW KOMÓRKOWYCH

energetyczne kryterium wytężenia sformułowane przez J. Rychlewskiego [1984] (kryterium dla sprzężonych stanów własnych) gdy tensory **C**, **S** i **H** są współosiowe

$$\frac{\Phi\left(\boldsymbol{\sigma}_1\right)}{\Phi_1^{gr}} + \cdots + \frac{\Phi\left(\boldsymbol{\sigma}_p\right)}{\Phi_p^{gr}} \le 1, \qquad p \le 6$$

$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \ldots + \boldsymbol{\sigma}_p$ - rozkład tensora naprężenia na *p* stanów własnych

Φ_p^{gr} - graniczna wartość gęstości energii sprężystej w stanie własnym *p*, którą należy obliczyć

kryterium dla rozłącznych stanów własnych (S. C. Cowin et al.,1995)

$$\begin{aligned} &\Phi\left(\boldsymbol{\sigma}_1\right) \le \Phi_1^{gr} \\ &\qquad\vdots \\ &\Phi\left(\boldsymbol{\sigma}_p\right) \le \Phi_p^{gr} \qquad\qquad p \le 6 \end{aligned}$$

SPRĘŻYSTE STANY WŁASNE I GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH

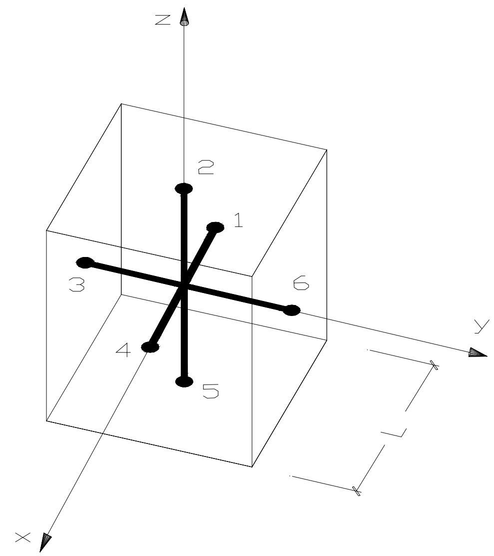
Komórka sześcienna – symetria kubiczna

OZNACZENIA

L - *wymiar elementów belkowych (szkieletu)*

s_n - *sztywność elementów belkowych na rozciąganie*

s_τ **-** *sztywność elementów belkowych na zginanie*



MODUŁY KELVINA MACIERZY **S**

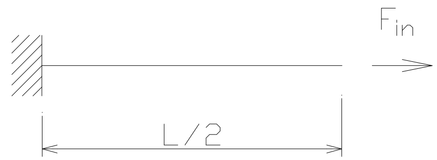
$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{s_n}{2L}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{s_n}{2L}$$

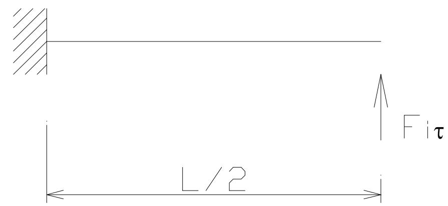
$$\lambda_{III} = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \frac{2s_\tau}{4L}$$

GRANICZNE SIŁY SPRĘŻYSTE DLA ELEMENTÓW BELKOWYCH

ściskanie (rozciąganie): $$F^{gr} = A\,R_e$$



ścinanie (zginanie): $$F^{gr} = \frac{R_e\,I}{L\,h}$$



DEFINICJA NAPRĘŻENIA
dla ekwiwalentnego kontinuum
(S. Nemat-Nasser, M. Hori [1999])

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V}\int_{V^S} \boldsymbol{\sigma}^S\,dV$$

gdzie:

V – objętość reprezentatywnej komórki
V^S – objętość szkieletu

OBLICZONE GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH

$$\boldsymbol{\sigma}_I = \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-A\,R_e}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-A\,R_e}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-A\,R_e}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_I^{gr} = 3\,\frac{1}{\lambda_I}\left(\frac{A\,R_e}{L^2}\right)^2$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{II} = \boldsymbol{\sigma}_{2,3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\frac{A\,R_e}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3}\frac{A\,R_e}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3}\frac{A\,R_e}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{II}^{gr} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\lambda_{II}}\left(\frac{A\,R_e}{L^2}\right)^2$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{III} = \boldsymbol{\sigma}_{4,5,6} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}\,I\,R_e}{h\,L^3} & \frac{\sqrt{2}\,I\,R_e}{h\,L^3} \\ \frac{\sqrt{2}\,I\,R_e}{h\,L^3} & 0 & \frac{\sqrt{2}\,I\,R_e}{h\,L^3} \\ \frac{\sqrt{2}\,I\,R_e}{h\,L^3} & \frac{\sqrt{2}\,I\,R_e}{h\,L^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{III}^{gr} = 6\,\frac{1}{\lambda_{III}}\,\frac{I^2\,R_e^2}{h^2\,L^6}$$

R_e - granica plastyczności, h - maksymalna odległość włókien górnych lub dolnych elementu belkowego, A - pole przekroju elementu belkowego, I - moment bezwładności elementu belkowego

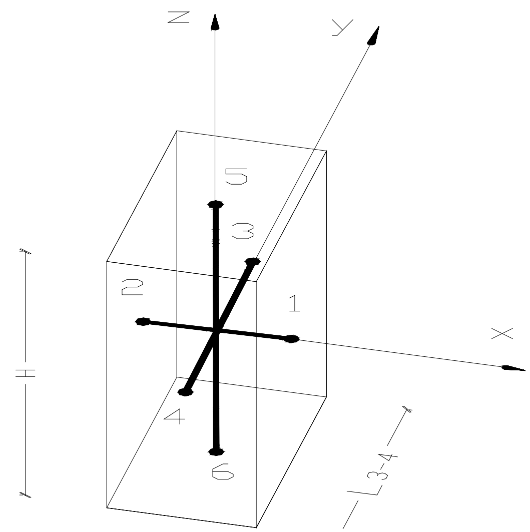
Komórka prostopadłościenna - ortotropia

OZNACZENIA

$L_{1-2}\ ,\ L_{3-4}\ ,\ H$ *- wymiary elementów belkowych (szkieletu)*

$s_{n1-2}\ ,\ s_{n3-4}\ ,\ s_{n5-6}$ *- sztywności elementów belkowych na rozciąganie*

$s_{\tau 1-2}\ ,\ s_{\tau 3-4}\ ,\ s_{\tau 5-6}$ *- sztywności elementów belkowych na zginanie*



MODUŁY KELVINA

$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{L_{1-2}\ s_{n1-2}}{2\ L_{3-4}\ H} \qquad \lambda_{II} = \lambda_2 = \frac{L_{3-4}\ s_{n3-4}}{2\ L_{1-2}\ H} \qquad \lambda_{III} = \lambda_3 = \frac{H\ s_{n5-6}}{2\ L_{1-2}\ L_{3-4}}$$

$$\lambda_{IV} = \lambda_4 = \frac{\dfrac{2\ H^2\ s_{\tau 5-6}}{L_{3-4}{}^2\ s_{\tau 3-4} + H^2\ s_{\tau 5-6}}\ \dfrac{L_{3-4}}{2}\ s_{\tau 3-4}}{L_{1-2}\ H}$$

$$L_{1-2} \le L_{3-4} \le H$$

$$\lambda_V = \lambda_5 = \frac{\dfrac{2\ H^2\ s_{\tau 5-6}}{L_{1-2}{}^2\ s_{\tau 1-2} + H^2\ s_{\tau 5-6}}\ \dfrac{L_{1-2}}{2}\ s_{\tau 1-2}}{L_{3-4}\ H} \qquad \lambda_{VI} = \lambda_6 = \frac{\dfrac{2\ L_{3-4}{}^2\ s_{\tau 3-4}}{L_{3-4}{}^2\ s_{\tau 3-4} + L_{1-2}{}^2\ s_{\tau 1-2}}\ \dfrac{L_{1-2}}{2}\ s_{\tau 1-2}}{L_{3-4}\ H}$$

OBLICZONE GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH

$$\boldsymbol{\sigma}_I = \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{A\,R_e}{L_{3-4}\,H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_I^{gr} = \frac{1}{\lambda_I}\left(\frac{A\,R_e}{L_{3-4}\,H}\right)^2$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{II} = \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{A\,R_e}{L_{1-2}\,H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{II}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{II}}\left(\frac{A\,R_e}{L_{1-2}\,H}\right)^2$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{III} = \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{A\,R_e}{L_{1-2}\,L_{3-4}} \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{III}^{gr} = \frac{1}{\lambda_{III}}\left(\frac{A\,R_e}{L_{1-2}\,L_{3-4}}\right)^2$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{IV} = \boldsymbol{\sigma}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\,\dfrac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{H}}{L_{1-2}\,L_{3-4}} \\ 0 & \sqrt{2}\,\dfrac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{H}}{L_{1-2}\,L_{3-4}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{IV}^{gr} = 8\,\frac{1}{\lambda_{IV}}\,\frac{I^2\,R_e^2}{h^2\,L_{1-2}{}^2\,L_{3-4}{}^2\,H^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{V} = \boldsymbol{\sigma}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}\,\dfrac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{H}}{L_{1-2}\,L_{3-4}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\,\dfrac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{H}}{L_{1-2}\,L_{3-4}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{V}^{gr} = 8\,\frac{1}{\lambda_{V}}\,\frac{I^2\,R_e^2}{h^2\,L_{1-2}{}^2\,L_{3-4}{}^2\,H^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{VI} = \boldsymbol{\sigma}_6 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}\,\dfrac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{L_{3-4}}}{L_{1-2}\, H} & 0 \\ \sqrt{2}\,\dfrac{\frac{I}{2} R_e \frac{2}{L_{3-4}}}{L_{1-2}\, H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{VI}^{gr} = 8\,\frac{1}{\lambda_{VI}}\,\frac{I^2\,R_e^2}{h^2\,{L_{1-2}}^2\,{L_{3-4}}^2\,H^2}$$

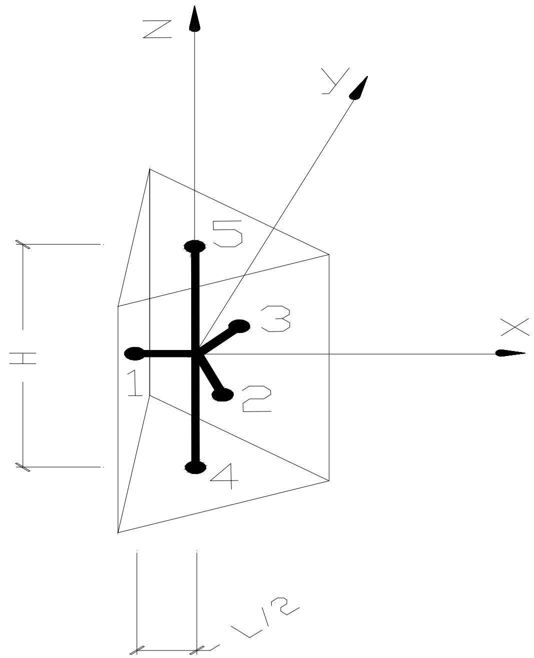
Komórka w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego – symetria transwersalnie izotropowa

OZNACZENIA

L, H - *wymiary elementów belkowych (szkieletu)*

s_{nL}, s_{nH} - *sztywności elementów belkowych na rozciąganie*

$s_{\tau L}, s_{\tau H}$ - *sztywności elementów belkowych na zginanie*



MODUŁY KELVINA

$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}\, s_{nL}}{6\, H}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_3 = \frac{2\sqrt{3}\, H\, s_{nH}}{9\, L^2}$$

$$\lambda_{III} = \lambda_2 = \lambda_6 = \frac{\sqrt{3}\, s_{nL}\, s_{\tau L}}{3\, H\,(s_{nL} + s_{\tau L})}$$

$$\lambda_{IV} = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{4\sqrt{3}\, H\, s_{\tau H}\, s_{\tau L}}{3\,(3\, L^2\, s_{\tau L} + 4\, H^2\, s_{\tau H})}$$

$L \leq H$

OBLICZONE GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH

$$\boldsymbol{\sigma}_I = \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}\,A\,R_e}{3\,L\,H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}\,A\,R_e}{3\,L\,H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_I^{gr} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\lambda_I}\,\frac{A^2\,R_e^2}{L^2\,H^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{II} = \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-4\sqrt{3}\,A\,R_e}{9\,L^2} \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{II}^{gr} = \frac{16}{27}\,\frac{1}{\lambda_{II}}\,\frac{A^2\,R_e^2}{L^4}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{III} = \boldsymbol{\sigma}_{3,4} = \begin{bmatrix} \dfrac{I\,A\,R_e\,(4\sqrt{3}-1)}{L\,H\,(4\,I+L\,h\,A)} & \dfrac{2\sqrt{3}\,I\,A\,R_e}{3\,L\,H\,(4\,I+L\,h\,A)} & 0 \\ \dfrac{2\sqrt{3}\,I\,A\,R_e}{3\,L\,H\,(4\,I+L\,h\,A)} & -\dfrac{I\,A\,R_e\,(4\sqrt{3}-1)}{L\,H\,(4\,I+L\,h\,A)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{III}^{gr} = \frac{2}{9}\,\frac{1}{\lambda_{III}}\,\frac{I^2\,A^2\,R_e^{\,2}\,(61-8\sqrt{3})}{H^2\,L^2\,(4\,I+L\,h\,A)^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{IV} = \boldsymbol{\sigma}_{5,6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{4\sqrt{3}\,I\,R_e}{9\,L^2\,h\,H} \\ 0 & 0 & \dfrac{4\sqrt{3}\,I\,R_e}{9\,L^2\,h\,H} \\ \dfrac{4\sqrt{3}\,I\,R_e}{9\,L^2\,h\,H} & \dfrac{4\sqrt{3}\,I\,R_e}{9\,L^2\,h\,H} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{IV}^{gr} = \frac{64}{27}\,\frac{1}{\lambda_{IV}}\,\frac{I^2\,R_e^2}{H^2\,L^4\,h^2}$$

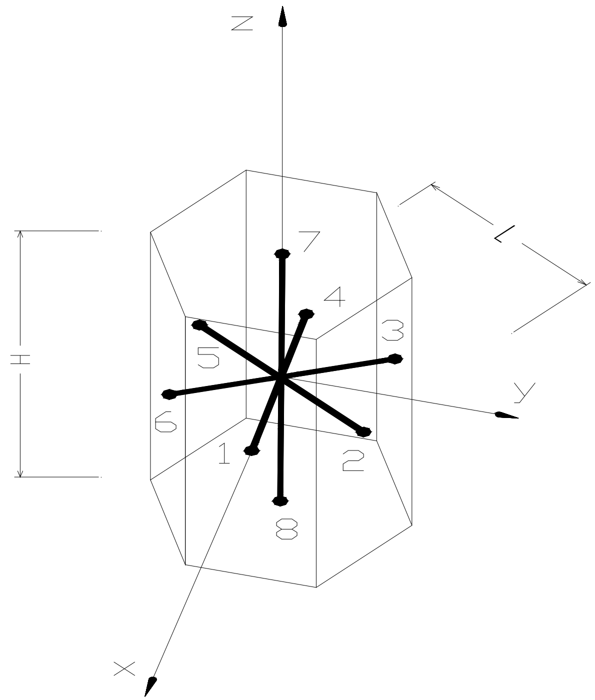
Komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego – symetria transwersalnie izotropowa

OZNACZENIA

L, H - *wymiary elementów belkowych (szkieletu)*

s_{nL}, s_{nH} - *sztywności elementów belkowych na rozciąganie*

$s_{\tau L}, s_{\tau H}$ - *sztywności elementów belkowych na zginanie*



MODUŁY KELVINA

$$\lambda_I = \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}\, s_{nL}}{2\,H}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_3 = \frac{\sqrt{3}\, H\, s_{nH}}{3\,L^2}$$

$$\lambda_{III} = \lambda_2 = \lambda_6 = \frac{\sqrt{3}\,(s_{nL} + 2\,s_{\tau L})}{4\,H}$$

$$\lambda_{IV} = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{2\sqrt{3}\, H\, s_{\tau H}\, s_{\tau L}}{3\,L^2\, s_{\tau L} + 2\,H^2\, s_{\tau H}}$$

OBLICZONE GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH

$$\boldsymbol{\sigma}_I = \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}\,A\,R_e}{L\,H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}\,A\,R_e}{L\,H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_I^{gr} = 6\,\frac{1}{\lambda_I}\,\frac{A^2\,R_e^2}{L^2\,H^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{II} = \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2\sqrt{3}\,A\,R_e}{3\,L\,H} \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{II}^{gr} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\lambda_{II}}\,\frac{A^2\,R_e^2}{H^2\,L^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{III} = \boldsymbol{\sigma}_{3,4} = \begin{bmatrix} \dfrac{2\,I\,A\,R_e\sqrt{3}\,(s_{nL}+2\,s_{\tau L})}{L\,H\,(4\,I\,s_{nL}+L\,s_{\tau L}\,h\,A)} & \dfrac{I\,A\,R_e\sqrt{3}\,(s_{nL}+2\,s_{\tau L})}{L\,H\,(4\,I\,s_{nL}+L\,s_{\tau L}\,h\,A)} & 0 \\ \dfrac{I\,A\,R_e\sqrt{3}\,(s_{nL}+2\,s_{\tau L})}{L\,H\,(4\,I\,s_{nL}+L\,s_{\tau L}\,h\,A)} & -\dfrac{2\,I\,A\,R_e\sqrt{3}\,(s_{nL}+2\,s_{\tau L})}{L\,H\,(4\,I\,s_{nL}+L\,s_{\tau L}\,h\,A)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{III}^{gr} = 30\,\frac{1}{\lambda_{III}}\,\frac{(s_{nL}+2\,s_{\tau L})^2\,R_e^2\,A^2\,I^2}{H^2\,L^2\,(4\,s_{nL}\,I+L\,s_{\tau L}\,h\,A)^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{IV} = \boldsymbol{\sigma}_{5,6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{2\sqrt{3}\,I\,R_e}{3\,L^2\,h\,H} \\ 0 & 0 & \dfrac{2\sqrt{3}\,I\,R_e}{3\,L^2\,h\,H} \\ \dfrac{2\sqrt{3}\,I\,R_e}{3\,L^2\,h\,H} & \dfrac{2\sqrt{3}\,I\,R_e}{3\,L^2\,h\,H} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\,\Phi_{IV}^{gr} = \frac{16}{3}\,\frac{1}{\lambda_{IV}}\,\frac{I^2\,R_e^2}{H^2\,L^4\,h^2}$$

wg hipotezy wytężenia W. Burzyńskiego

$$\sigma_{red} = \frac{\kappa+1}{2\kappa}\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-\sigma_x\sigma_y-\sigma_x\sigma_z-\sigma_y\sigma_z+3(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)}+$$

$$+\frac{\kappa-1}{2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

R_e^c -wytrzymałość na ściskanie, R_e^r -wytrzymałość na rozciąganie

$\kappa = \frac{R_e^c}{R_e^r} = 1$ - otrzymujemy wzór wynikły z hipotezy energii odkształcenia postaciowego

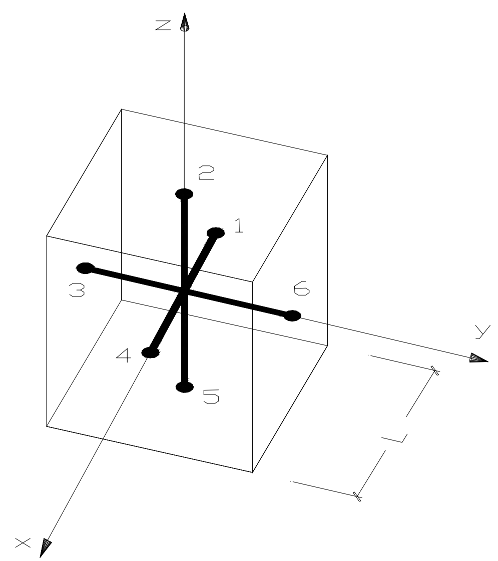
Komórka sześcienna – symetria kubiczna

OZNACZENIA

L - *wymiar elementów belkowych (szkieletu)*

s_n - *sztywność elementów belkowych na rozciąganie*

s_τ - *sztywność elementów belkowych na zginanie*



OBLICZONE GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA STANÓW WŁASNYCH

$$\boldsymbol{\sigma}_I = \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2A\kappa R^r_e}{(1+\kappa^2)L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2A\kappa R^r_e}{(1+\kappa^2)L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2A\kappa R^r_e}{(1+\kappa^2)L^2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_I^{gr} = \frac{6}{\lambda_I}(R^r_e)^2 \frac{\kappa^2}{(1+\kappa^2)^2}\frac{A^2}{L^4}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{II} = \boldsymbol{\sigma}_{2,3} = \begin{bmatrix} \frac{4A\kappa R^r_e}{3(1+\kappa^2)L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2A\kappa R^r_e}{3(1+\kappa^2)L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2A\kappa R^r_e}{3(1+\kappa^2)L^2} \end{bmatrix}$$

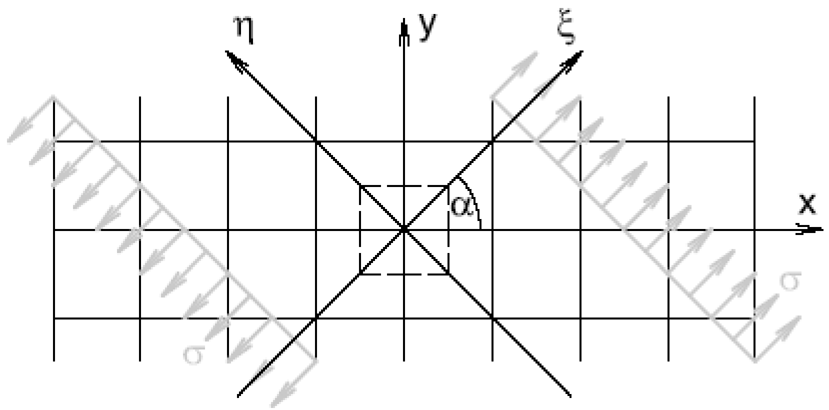
$$\Phi_{II}^{gr} = \frac{4}{3\lambda_{II}}(R^r_e)^2 \frac{\kappa^2}{(1+\kappa^2)^2}\frac{A^2}{L^4}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{III} = \boldsymbol{\sigma}_{4,5,6} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2I\kappa R^r_e}{(1+\kappa^2)hL^3} & \frac{2I\kappa R^r_e}{(1+\kappa^2)hL^3} \\ \frac{2I\kappa R^r_e}{(1+\kappa^2)hL^3} & 0 & \frac{2I\kappa R^r_e}{(1+\kappa^2)hL^3} \\ \frac{2I\kappa R^r_e}{(1+\kappa^2)hL^3} & \frac{2I\kappa R^r_e}{(1+\kappa^2)hL^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{III}^{gr} = \frac{12}{\lambda_{III}}(R^r_e)^2 \frac{\kappa^2}{(1+\kappa^2)^2}\frac{I^2}{L^6 h^2}$$

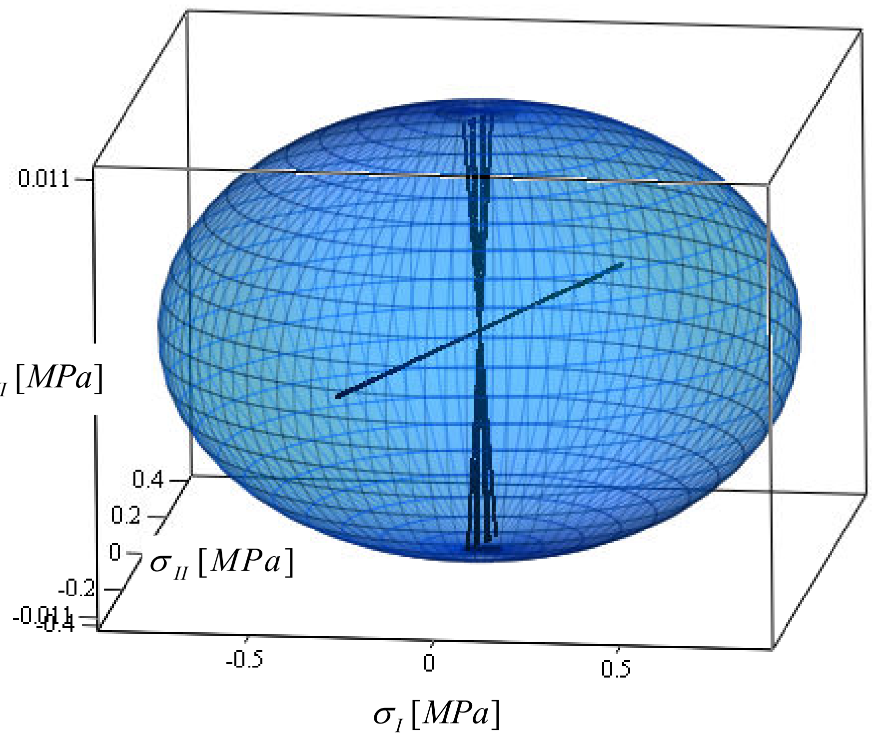
$$R^r_e \le R^c_e$$

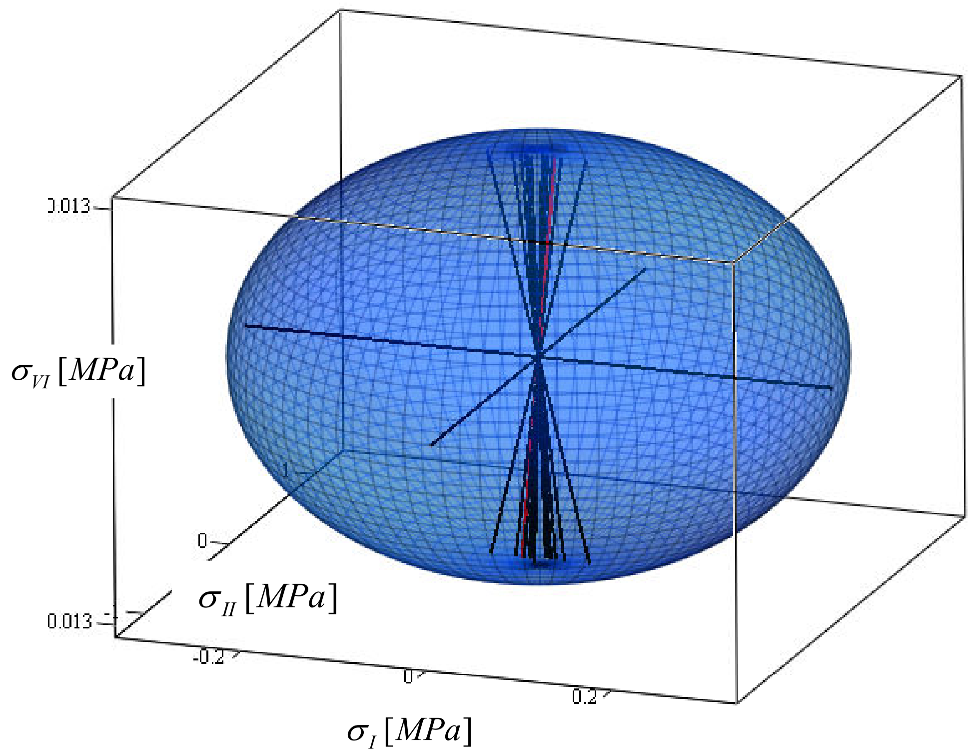
PRZEDSTAWIENIE ENERGETYCZNEGO KRYTERIUM J. RYCHLEWSKIEGO DLA SPRĘŻYSTYCH STANÓW WŁASNYCH PRZY JEDNOOSIOWYM ROZCIĄGANIU WZDŁUŻ KIERUNKU „n”



$$\boldsymbol{\sigma}(\xi,\eta)=\begin{bmatrix}\sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow \boldsymbol{\sigma}(x,y)=\sigma\begin{bmatrix}\cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha)\end{bmatrix}$$

stop Cu-1%Ni, $E_s = 117\,GPa$, $G_s = 45\,GPa$, $R_e = 112\,MPa$ (D. L. McDowell et al., [2005])





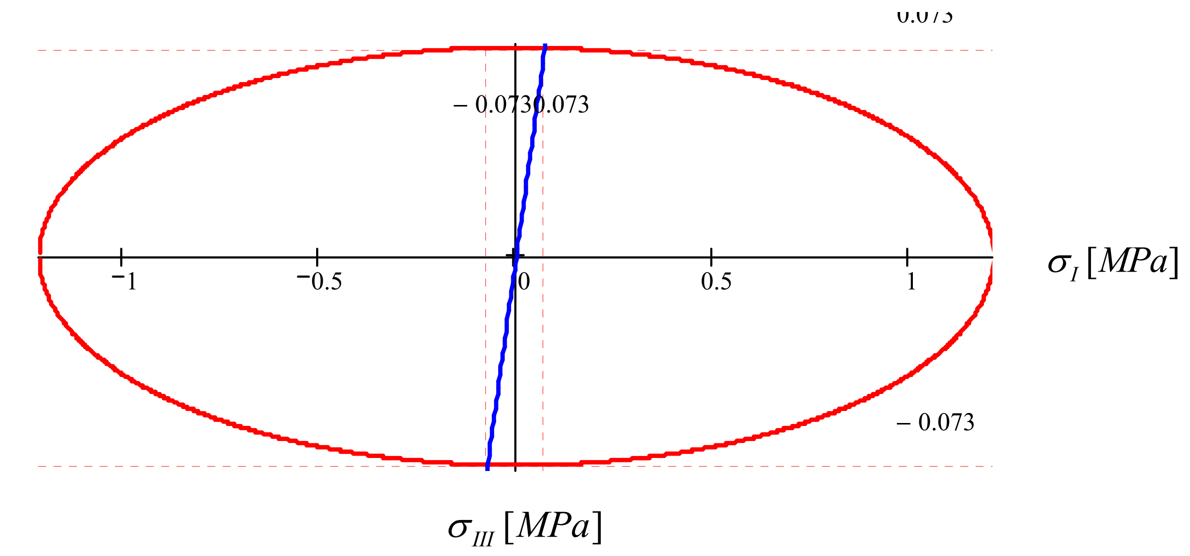
Komórka sześcienna

$L = 2000\,\mu m$, $d = 150\,\mu m$

Komórka prostopadłościenna

$L_{1-2} = 1000\,\mu m$, $L_{3-4} = 4000\,\mu m$, $H = 1000\,\mu m$,

$d = 120\,\mu m$

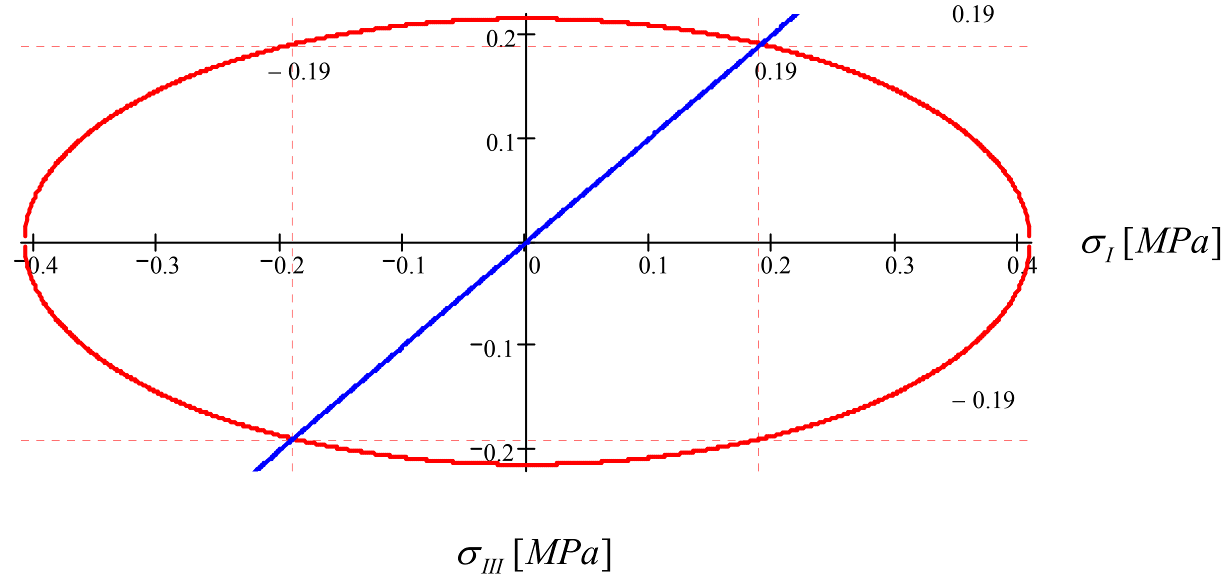


Komórka w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego

$L = 2000\ \mu m$

$H = 2000\ \mu m$

$d = 260\,\mu m$



Komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego

$L = 2000\ \mu m$

$H = 2000\ \mu m$

$d = 87\,\mu m$

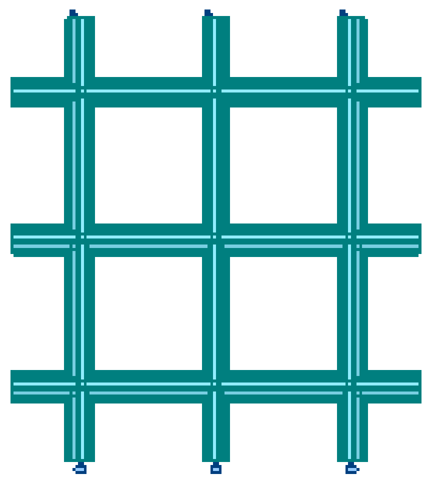
Komórka sześcienna

Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x, y) przedstawia zależność:

$$\sigma^{gr} = \pm \frac{3\,R_e \dfrac{I\,A}{L^2}}{\sqrt{10\,I^2 + 27\,I^2 \sin^4\alpha + 3\sin^2\alpha\; h^2 L^2 A^2 - 3\sin^4\alpha\; h^2 L^2 A^2 - 27\,I^2 \sin^2\alpha}}$$

gdzie α jest dowolnym kierunkiem obciążenia.

Przyjmując σ^{gr} i $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (rozciągnięcie wzdłuż osi y) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) w żadnym pręcie struktury nie jest przekroczona granica plastyczności R_e elementu belkowego, dla stali $E = 205GPa,\ G = 80.8GPa,$



$R_e = 215MPa, \quad \sigma^{z\ programu\ Robot} = 201\,MPa$

błąd oceny naprężenia granicznego otrzymanego z energetycznego kryterium J. Rychlewskiego jest równy:

$$\frac{R_e - \sigma^{z\ programu\ Robot}}{R_e} 100\% = 6.5\%$$

Komórka prostopadłościenna

Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x, y) przedstawia zależność:

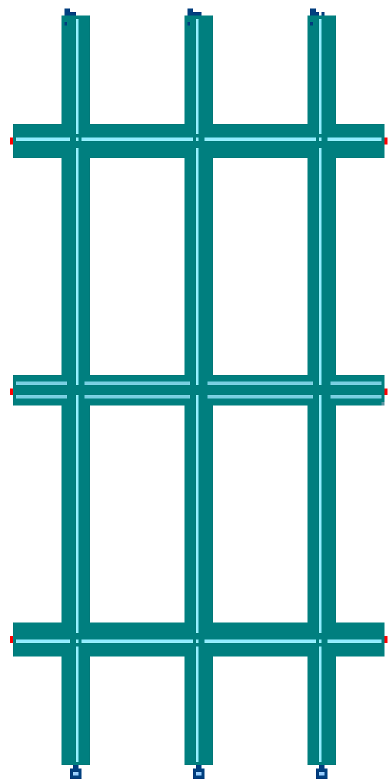
$$\sigma^{gr} = \pm[2(4L_{3-4}^2 I^2 - 8L_{3-4}^2 I^2 \sin^2\alpha + 4L_{3-4}^2 I^2 \sin^4\alpha + 4\sin^4\alpha\, L_{1-2}^2 I^2 +$$

$$+\sin^2\alpha\; h^2\; L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2 - \sin^4\alpha\; h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2)^{1/2} R_e I \frac{A}{R_e}]/[-4L_{3-4}^2 I^2 +$$

$$-8L_{3-4}^2 I^2 \sin^2\alpha - 4L_{3-4}^2 I^2 \sin^4\alpha - 4\sin^4\alpha\, L_{1-2}^2 I^2 - \sin^2\alpha\; h^2\; L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2 +$$

$$+\sin^4\alpha\; h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2]$$

gdzie α jest dowolnym kierunkiem obciążenia.



Przyjmując σ^{gr} i $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (rozciągnięcie wzdłuż osi y) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) w żadnym pręcie struktury nie jest przekroczona granica plastyczności R_e elementu belkowego,

dla stali $E = 205GPa,\ G = 80.8GPa,$

$$R_e = 215MPa, \qquad \sigma^{z\ programu\ Robot} = 210.83\,MPa$$

błąd oceny naprężenia granicznego otrzymanego z energetycznego kryterium J. Rychlewskiego jest równy:

$$\frac{R_e - \sigma^{z\ programu\ Robot}}{R_e} 100\% = 1.9\%$$

Komórka w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego

Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x, y) przedstawia zależność:

$$\sigma^{gr} = \pm[2((35067\,I^2 - 72\,L^2\,h^2\,A^2\sqrt{3} + 981\,L^2\,h^2\,A^2 + 576\,L\,I\,h\,A\sqrt{3} +$$

$$7848\,L\,I\,h\,A)(6457 - 384\sqrt{3}))^{1/2}\,I\,A\frac{R_e}{L\,H}]/[35067\,I^2 + 72\,L^2\,h^2\,A^2\sqrt{3} +$$

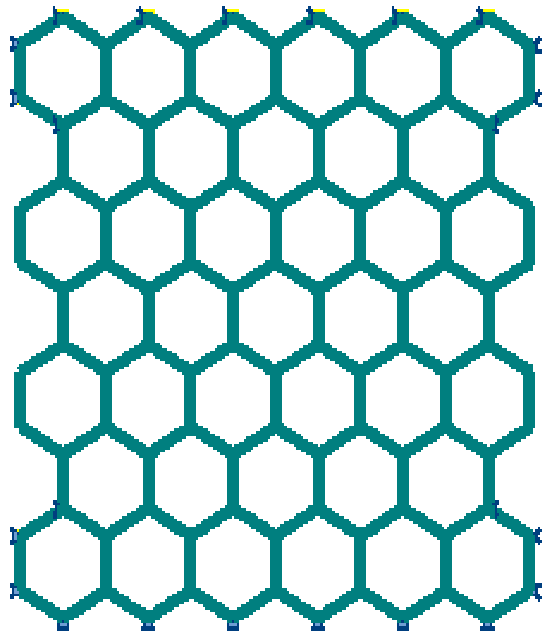
$$+981\,L^2\,h^2\,A^2 + 576\,L\,I\,h\,A\sqrt{3} + 7848\,L\,I\,h\,A]$$

Przyjmując σ^{gr} (rozciągnięcie wzdłuż osi x) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) w żadnym pręcie struktury nie jest przekroczona granica plastyczności R_e elementu belkowego,

dla stali $E = 205GPa,\ G = 80.8GPa,$

$$R_e = 215MPa, \quad \sigma^{z\ programu\ Robot} = 191.11\,MPa$$

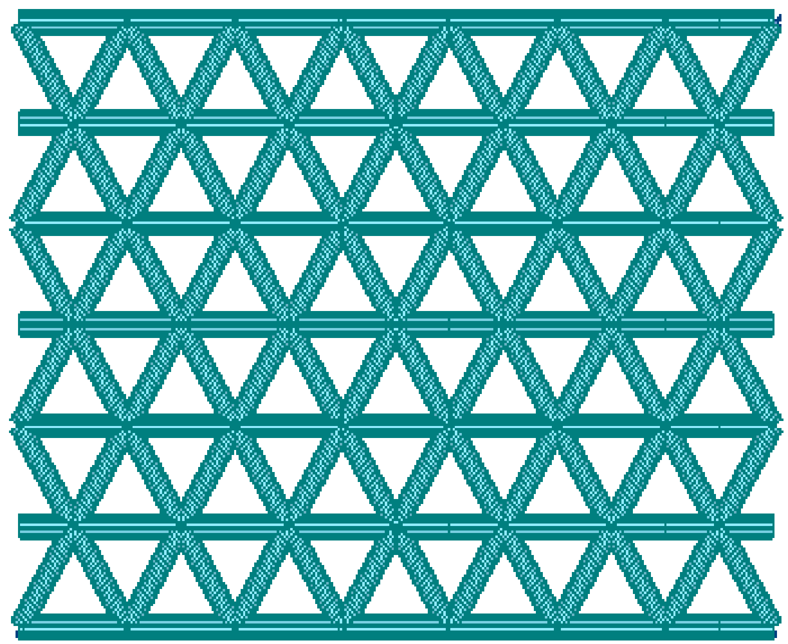
błąd oceny naprężenia granicznego otrzymanego z energetycznego kryterium J. Rychlewskiego jest równy: $\frac{R_e - \sigma^{z\ programu\ Robot}}{R_e}100\% = 11.1\%$



Komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego

Wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x, y) przedstawia zależność:

$$\sigma^{gr} = \frac{2\sqrt{(\lambda_{III}\,\Phi_{III}^{gr} + \lambda_I\,\Phi_I^{gr})\,\lambda_{III}\,\Phi_{III}^{gr}\,\lambda_I\,\Phi_I^{gr}}}{\lambda_{III}\,\Phi_{III}^{gr} + \lambda_I\,\Phi_I^{gr}}$$



Przyjmując σ^{gr} (rozciągnięcie wzdłuż osi y) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) naprężenia w prętach struktury są w przybliżeniu równe granicy plastyczności R_e elementu belkowego, dla stali $E = 205GPa,\ G = 80.8GPa,$

$$R_e = 215MPa,\ \sigma^{z\ programu\ Robot} = 230.90\,MPa$$

błąd oceny naprężenia granicznego otrzymanego z energetycznego kryterium J. Rychlewskiego jest równy:

$$\frac{R_e - \sigma^{z\ programu\ Robot}}{R_e}100\% = -7.4\%$$

Minus oznacza, że kryterium J. Rychlewskiego w tym przypadku zawyża wartość naprężenia granicznego

POWIERZCHNIA GRANICZNA DLA SZEŚCIU ROZŁĄCZNYCH STANÓW WŁASNYCH MATERIAŁU ANIZOTROPOWEGO NA PRZYKŁADZIE TEKTURY

Wykorzystanie obliczonych gęstości granicznych energii sprężystych do energetycznego kryterium dla rozłącznych stanów własnych.
Omówienie realizacji na przykładzie : Y. A. Arramon et al., [2000]

gęstości granicznych energii
$$2\lambda_A \Phi_T^{(A)} = (\sigma_T^{(A)})^2$$
$$2\lambda_A \Phi_C^{(A)} = (\sigma_C^{(A)})^2$$

postulowane kryterium:

- w przestrzeni stanów własnych $(\sigma^{(A)} - \sigma_T^{(A)})(\sigma^{(A)} - \sigma_C^{(A)}) = 0$

  gdzie:
  $$\sigma_T^{(A)} = \sigma_{\max}^{(A)}, \quad \sigma_C^{(A)} = \sigma_{\min}^{(A)},$$
  $A = 1,\ldots K$ kolejny stan własny

- w przestrzeni naprężeń głównych $(\sigma^{(P)} - \sigma_T^{(P)})(\sigma^{(P)} - \sigma_C^{(P)}) = 0$

  gdzie:
  $$\sigma_T^{(P)} = \sigma_{\max}^{(P)}, \quad \sigma_C^{(P)} = \sigma_{\min}^{(P)},$$
  $$\sigma^{(I)} = \sigma_1, \quad \sigma^{(II)} = \sigma_2, \quad \sigma^{(III)} = \sigma_3$$

Wykorzystując dane doświadczalne dla materiału anizotropowego

$E_1 = 3510\,MPa,\quad E_2 = 3510\,MPa,\quad E_3 = 6930\,MPa,\quad \nu_{13} = 0.15,$

$\nu_{23} = 0.15,\quad \nu_{12} = 0.3,\quad G_{23} = 1700\,MPa,\quad G_{13} = 1700\,MPa\quad G_{12} = 1500\,MPa$

Tensor sztywności

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 4220 & 1520 & 1700 & 0 & 0 & 0 \\ 1520 & 4220 & 1700 & 0 & 0 & 0 \\ 1700 & 1700 & 7940 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1700 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1500 \end{bmatrix} MPa$$

Wartości własne

$$\lambda = \begin{bmatrix} 9480 \\ 4200 \\ 2700 \\ 1700 \\ 1700 \\ 1500 \end{bmatrix} MPa$$

Wektory własne

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0.382 \\ 0.382 \\ 0.841 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} -0.594 \\ -0.594 \\ 0.54 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\omega}_4,\ \boldsymbol{\omega}_5,\ \boldsymbol{\omega}_6 \text{ pominięto}$$

Powierzchnie graniczne dla rozłącznych stanów własnych opisują zależności;

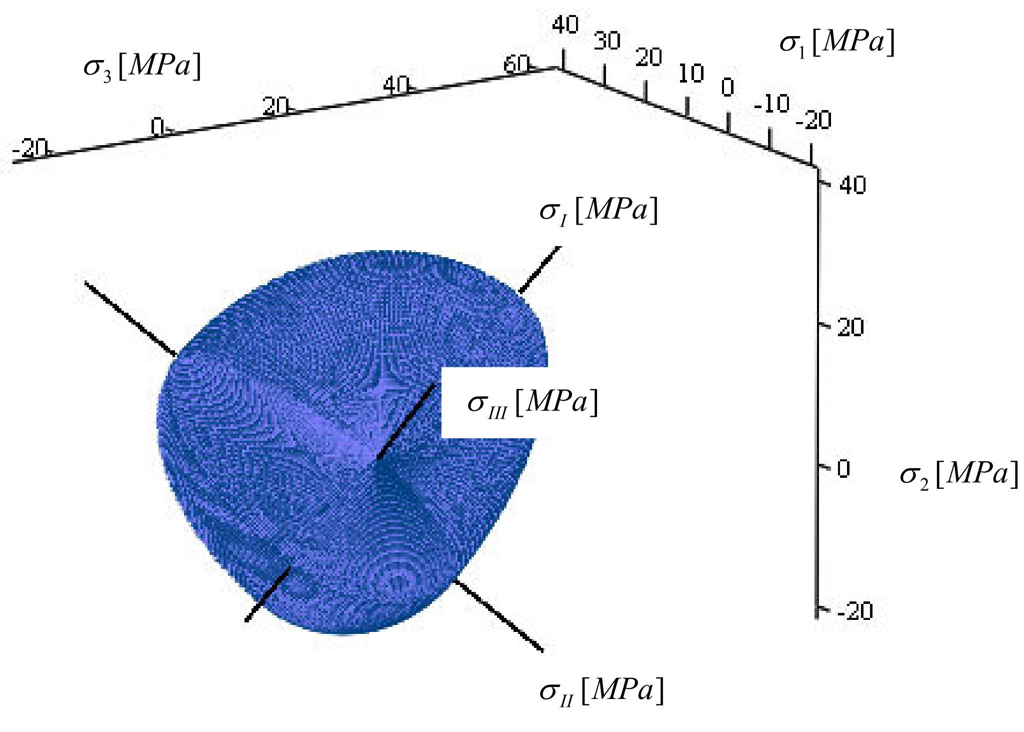
$$(0.382\sigma_1 + 0.382\sigma_2 + 0.841\sigma_3 - 47.1)(0.382\sigma_1 + 0.382\sigma_2 + 0.841\sigma_3 + 16.8) = 0$$

$$(0.595\sigma_1 + 0.595\sigma_2 - 0.54\sigma_3 - 18.1)(0.595\sigma_1 + 0.595\sigma_2 - 0.54\sigma_3 + 30.3) = 0$$

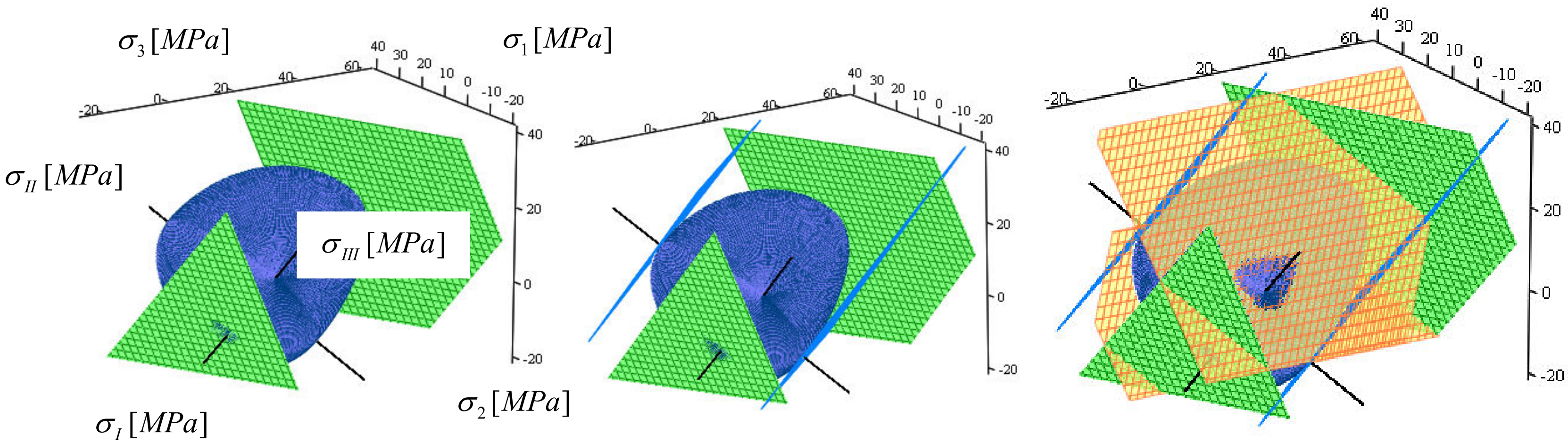
$$(0.707\sigma_1 - 0.707\sigma_2 - 21.6)(0.707\sigma_1 - 0.707\sigma_2 + 9.19) = 0$$

Powierzchnie graniczne na podstawie kryteriów:

- Granicznych energii dla sprzężonych stanów własnych

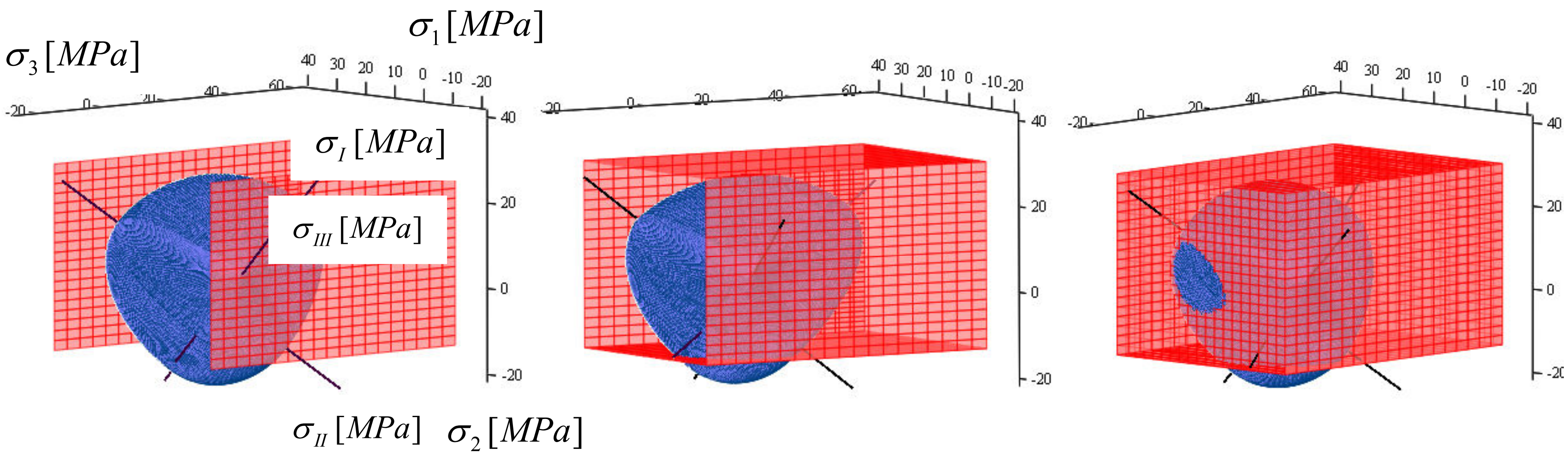


- Granicznych energii dla rozłącznych stanów własnych

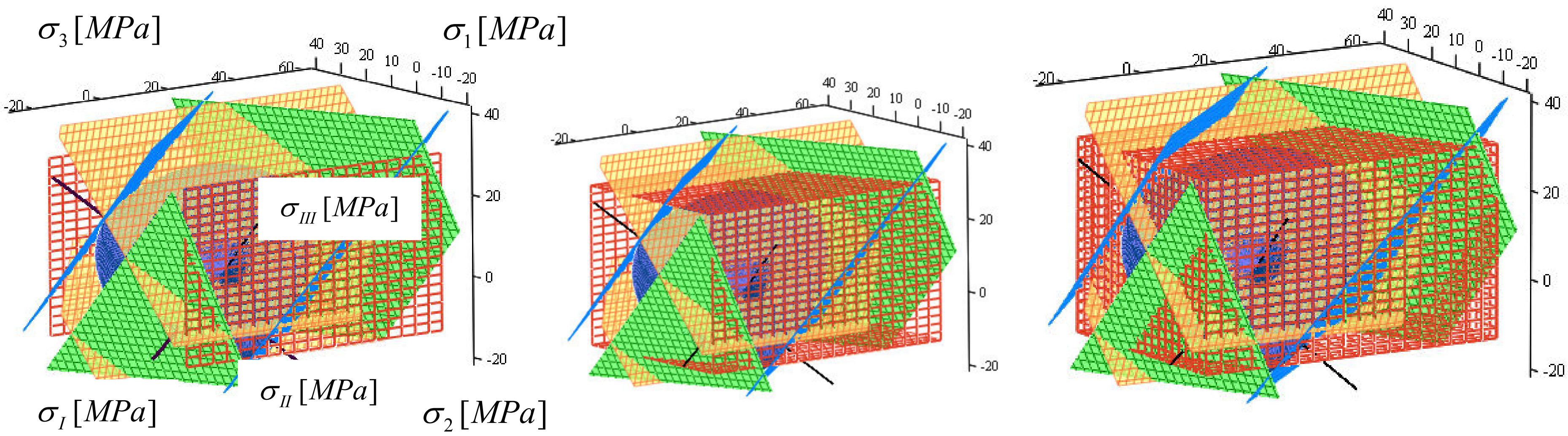


- Granicznych naprężeń głównych

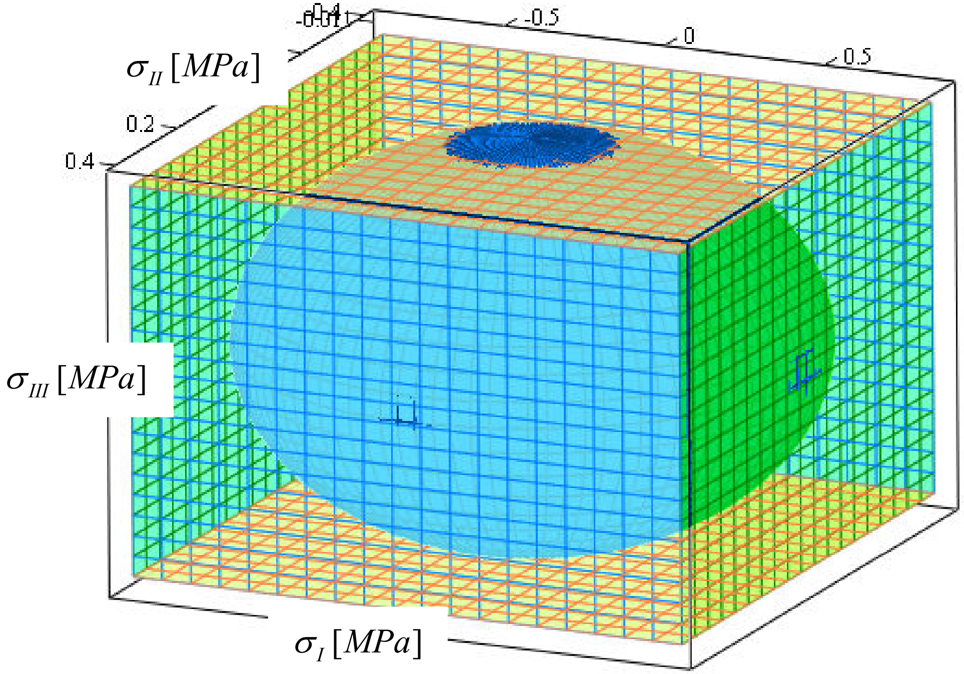
$$\sigma_{1r} = 36\,MPa,\ \sigma_{1s} = 18\,MPa,\ \sigma_{2r} = 30.5\,MPa,\ \sigma_{2s} = 13\,MPa,\ \sigma_{3r} = 56\,MPa,\ \sigma_{3s} = 20\,MPa$$

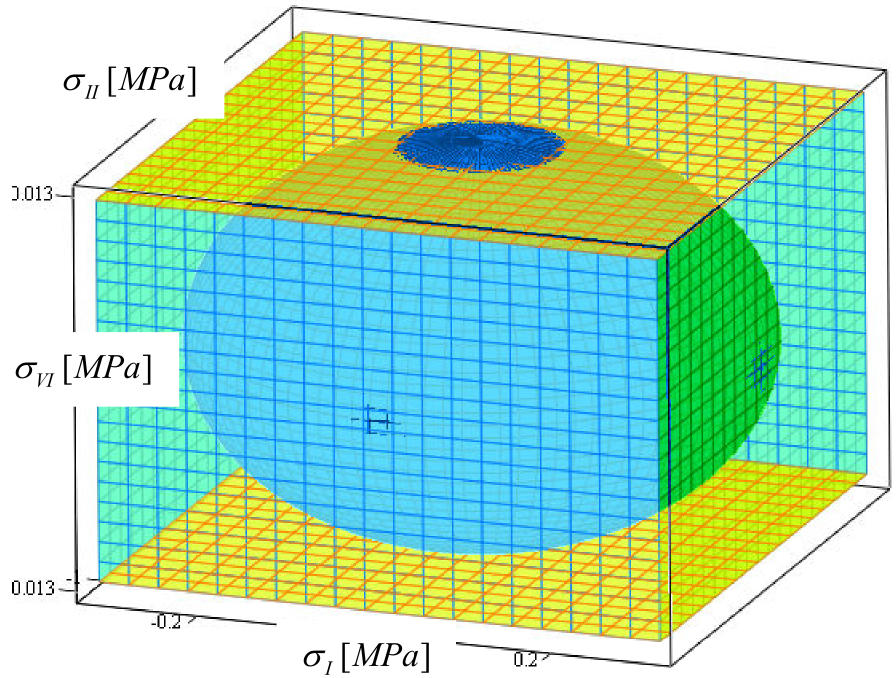


- Powierzchnia graniczna powstała w wyniku złożenia ww. kryteriów



PORÓWNANIE POWIERZCHNI GRANICZNYCH W PRZESTRZENI STANÓW WŁASNYCH





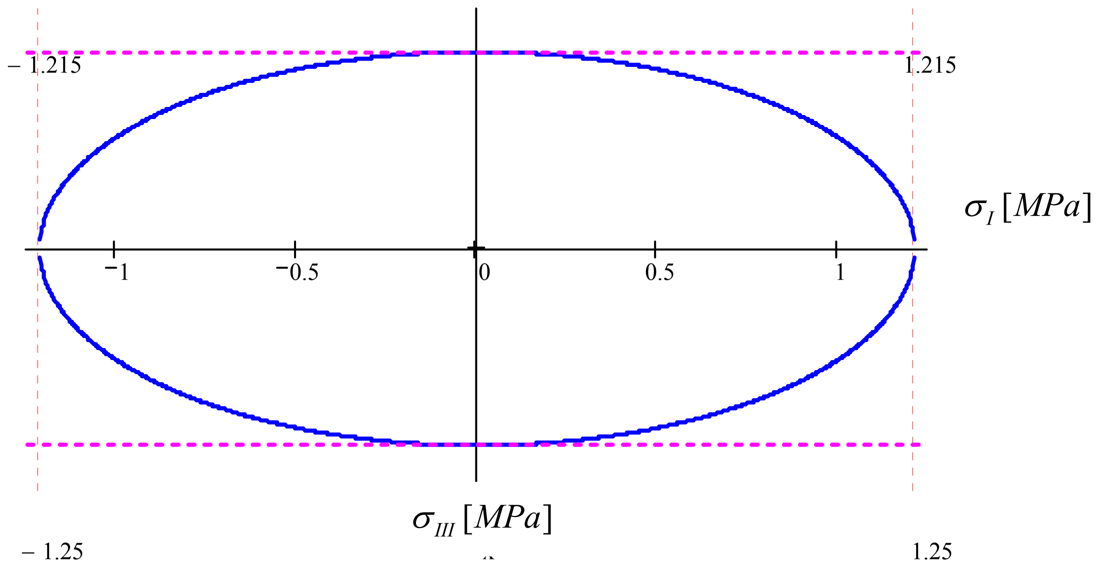
Komórka sześcienna

$L = 2000\,\mu m$, $d = 150\mu m$

Komórka prostopadłościenna

$L_{1-2} = 1000\,\mu m$, $L_{3-4} = 4000\,\mu m$, $H = 1000\,\mu m$,

$d = 120\mu m$

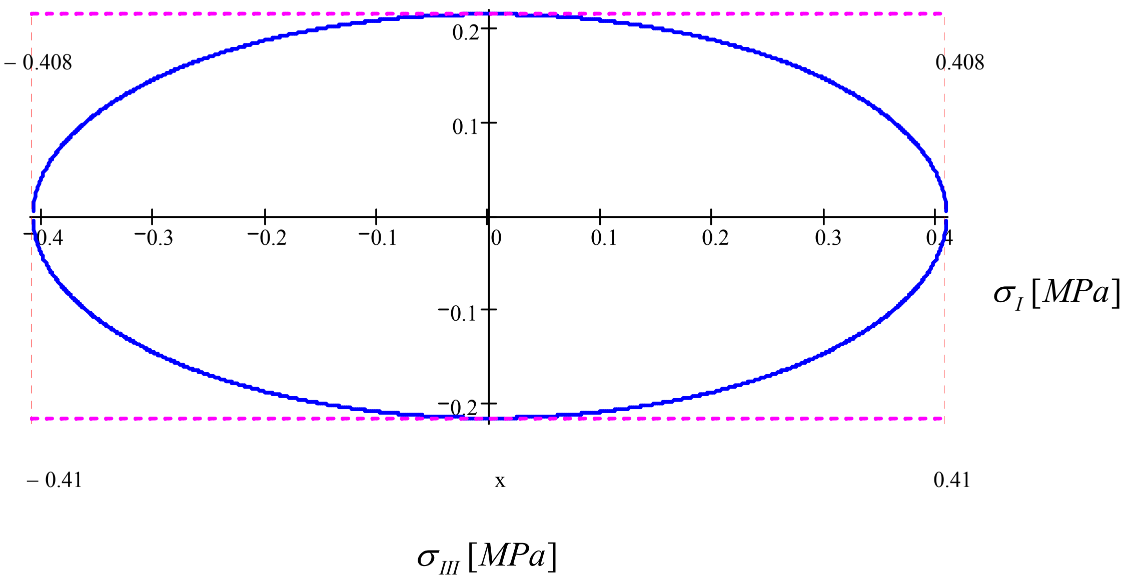


Komórka w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego

$L = 2000\ \mu m$

$H = 2000\ \mu m$

$d = 260\,\mu m$



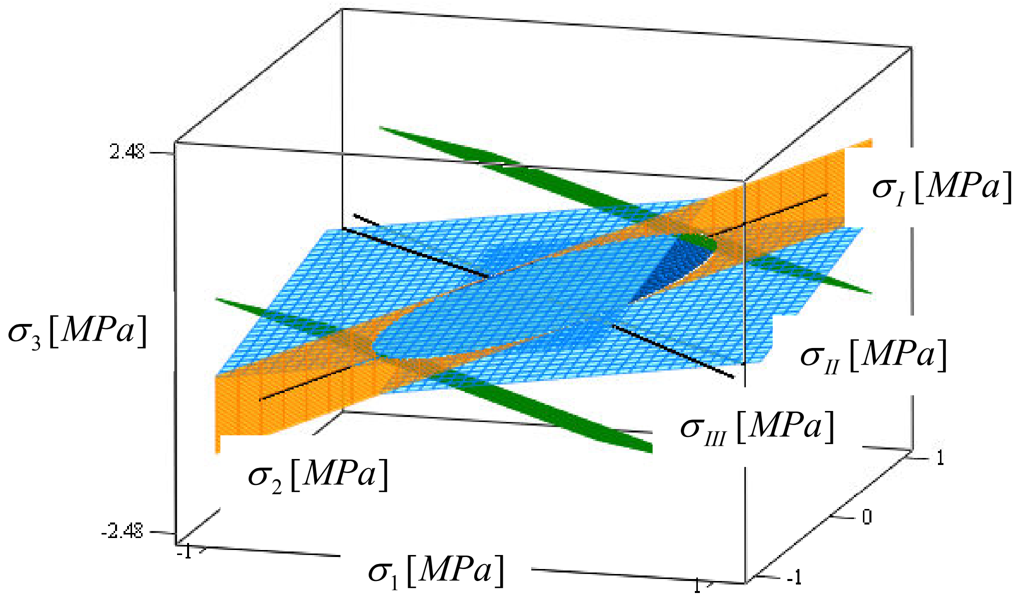
Komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego

$L = 2000\ \mu m$

$H = 2000\ \mu m$

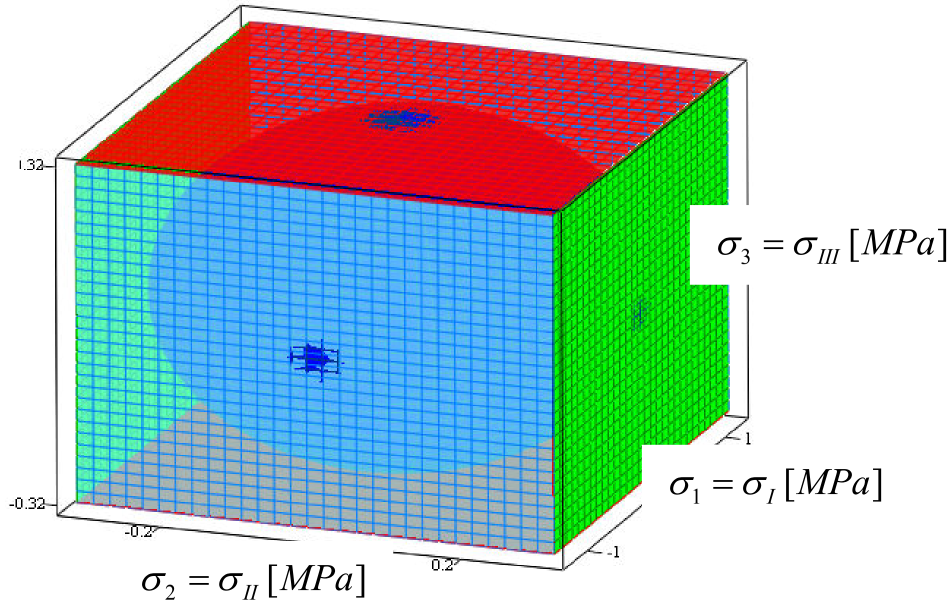
$d = 87\,\mu m$

PORÓWNANIE POWIERZCHNI GRANICZNYCH W PRZESTRZENI NAPRĘŻEŃ GŁÓWNYCH



Komórka sześcienna

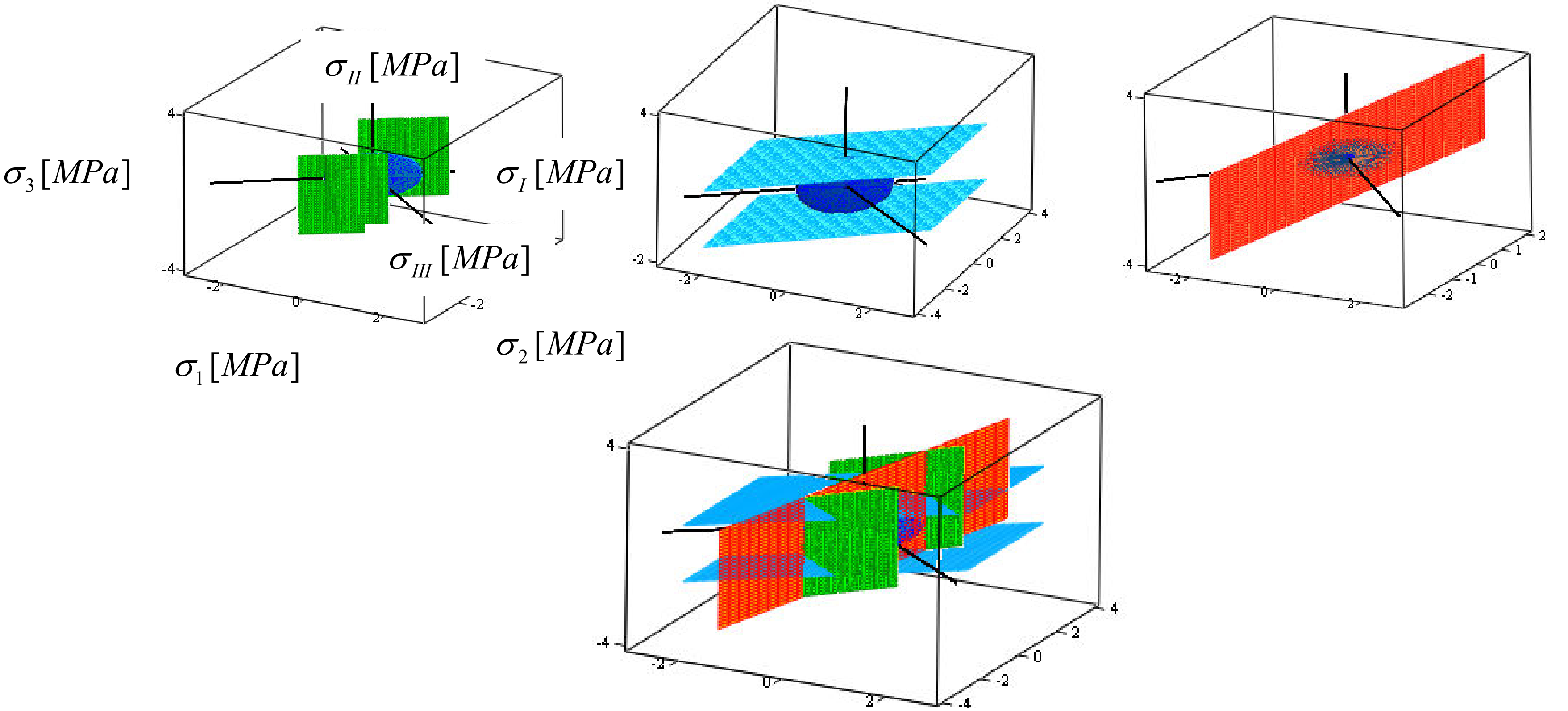
$L = 2000\,\mu m\,,\;\; d = 150\,\mu m$



Komórka prostopadłościenna

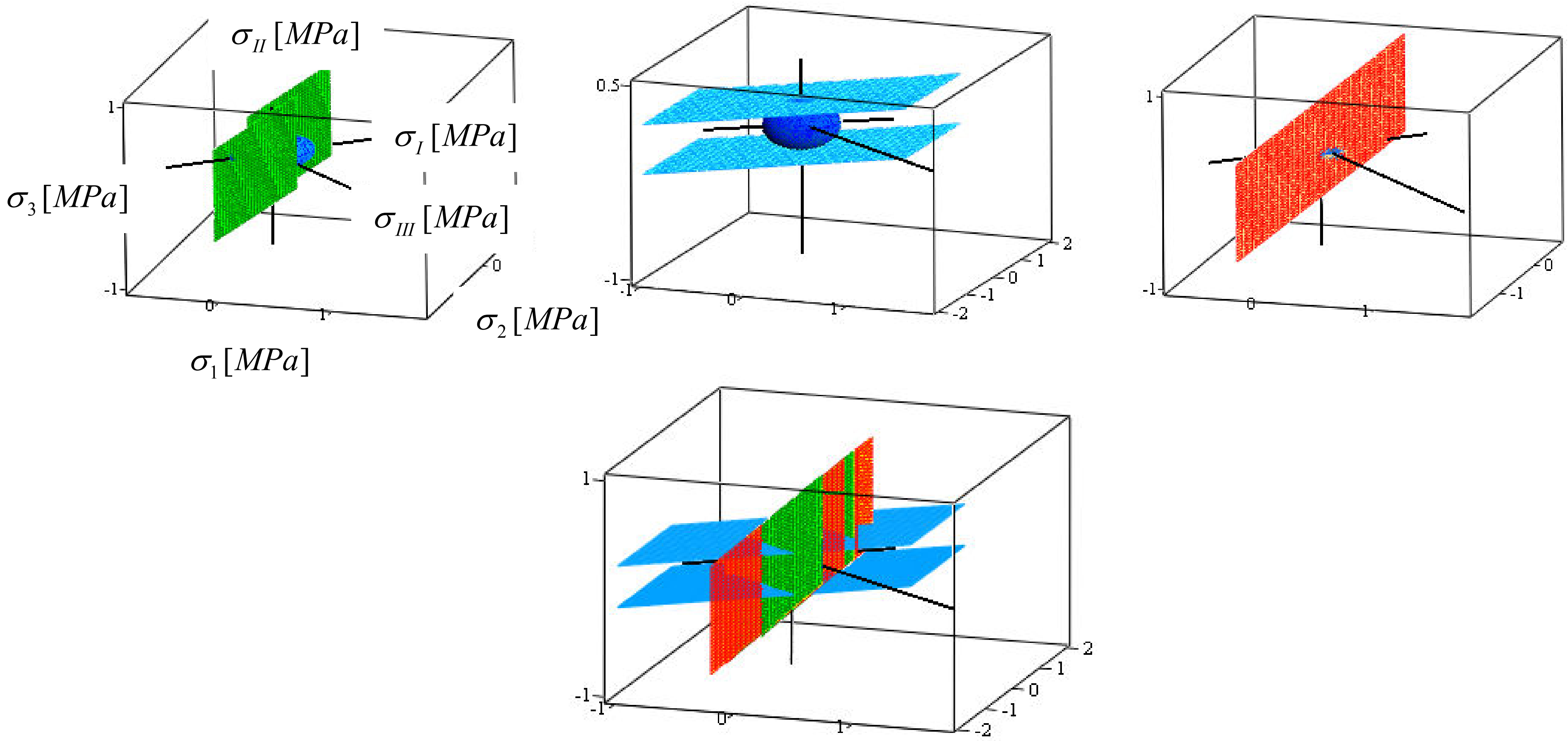
$L_{1-2} = 1000\,\mu m,\;\; L_{3-4} = 4000\,\mu m,\;\; H = 1000\,\mu m\,,$

$d = 120\,\mu m$



Komórka w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego

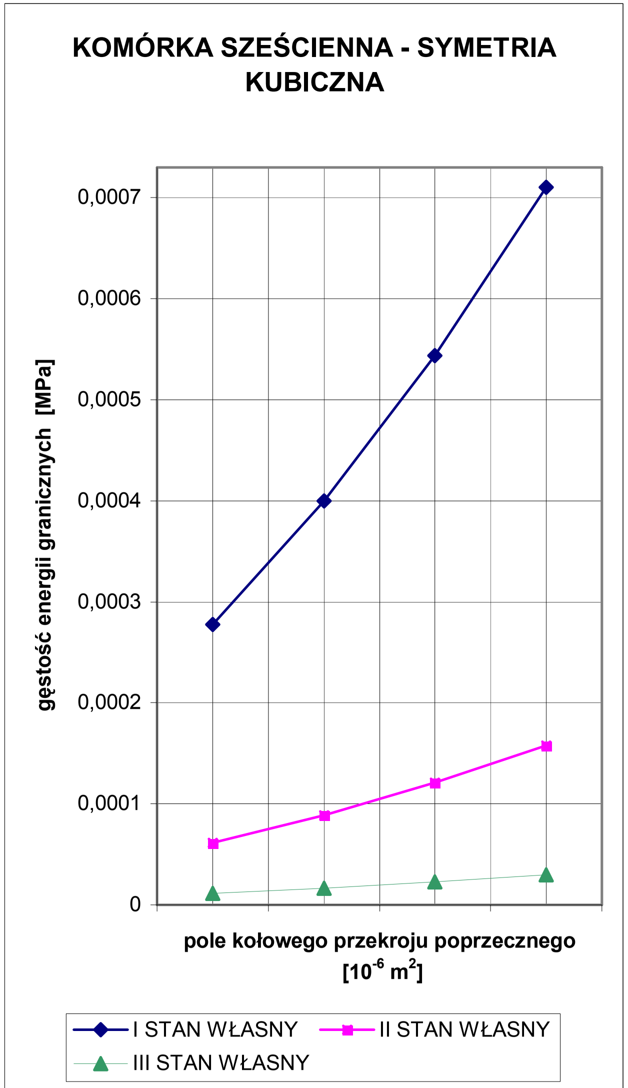
$L = 2000\,\mu m, \quad H = 2000\,\mu m, \quad d = 260\,\mu m$

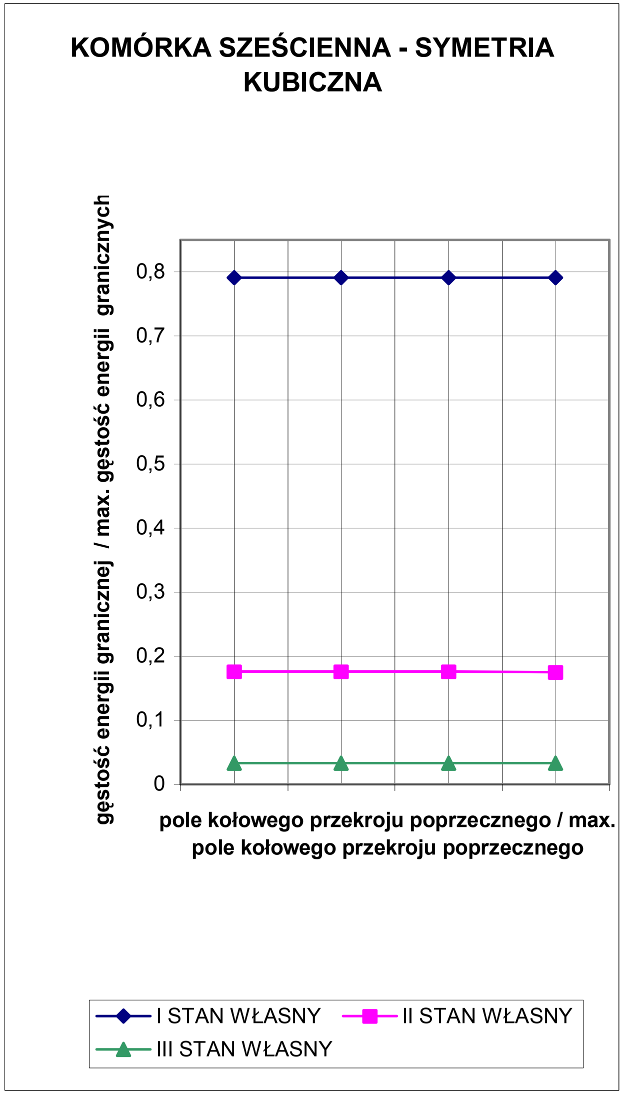


Komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego

$L = 2000\,\mu m,\quad H = 2000\,\mu m,\quad d = 87\,\mu m$

ANALIZA ROZKŁADU GĘSTOŚCI ENERGII GRANICZNYCH DLA SPRĘŻYSTYCH STANÓW WŁASNYCH Z PUNKTU WIDZENIA ZMIANY SZTYWNŚCI STRUKTURY KOMÓRKOWEJ





stop Cu-1%Ni,

$E_s = 117\,GPa, \quad G_s = 45\,GPa$,

$R_e = 112\,MPa$, $L = 2000\,\mu m$

$d_1 = 93.76\,\mu m, \quad d_2 = 112.5\,\mu m,$

$d_3 = 131.3\,\mu m, \quad d_4 = 150\,\mu m,$

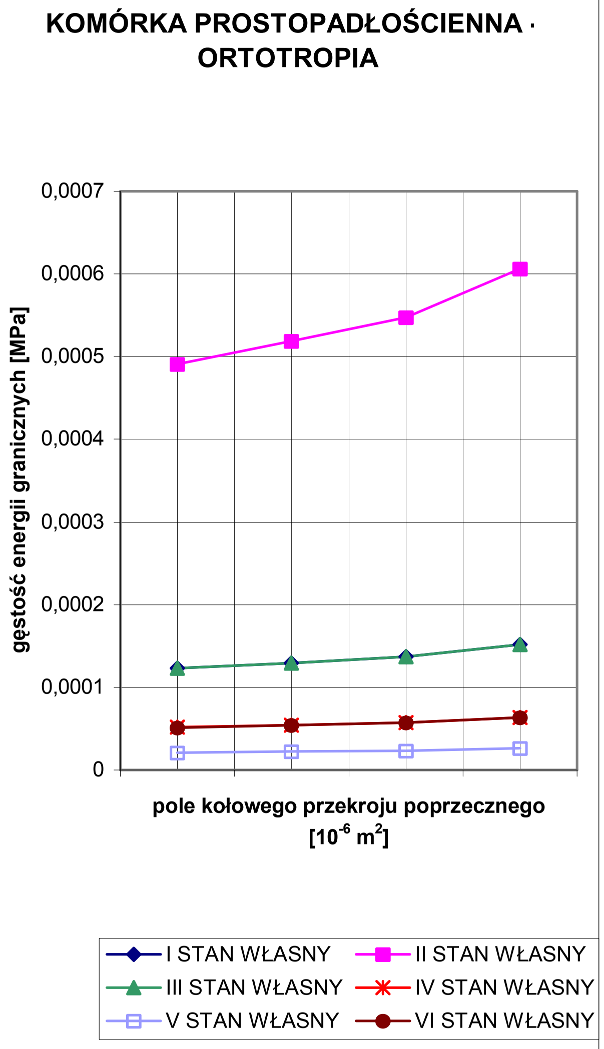
$$\frac{\Phi_I^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr}} = \frac{1800}{2275 + 6k^2 + 6k^2\nu}$$

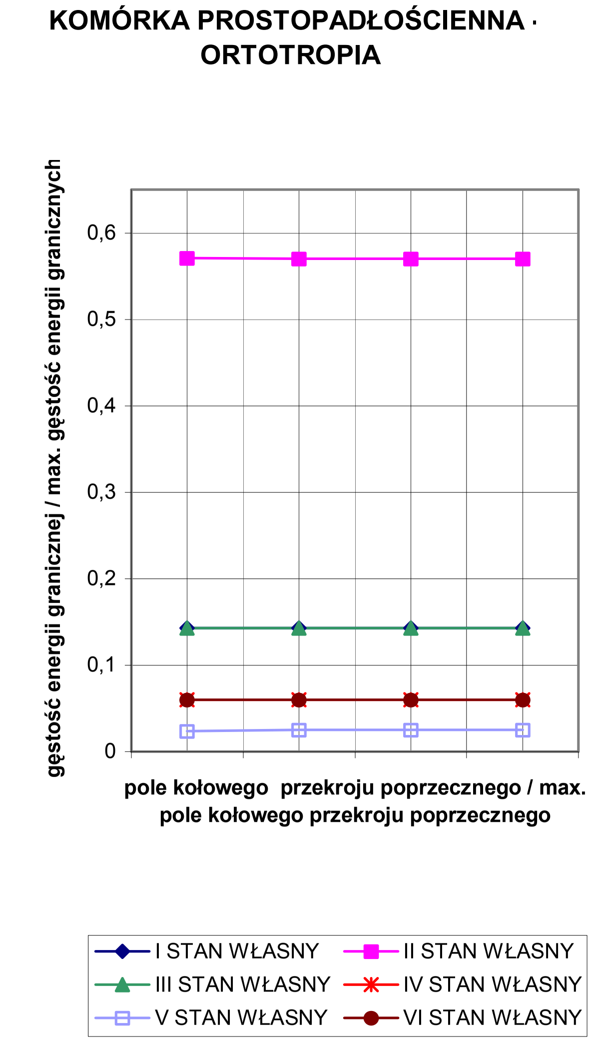
$$\frac{\Phi_{II}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr}} = \frac{400}{2275 + 12k^2 + 12k^2\nu}$$

$$\frac{\Phi_{III}^{gr}}{\Phi_I^{gr} + \Phi_{II}^{gr} + \Phi_{III}^{gr}} = \frac{3\left(25 + 4k^2 + 4k^2\nu\right)}{2275 + 12k^2 + 12k^2\nu}$$

$$k = \frac{d}{d_{\max}} = 0.625;1$$

ν - współczynnik Poissona dla elementu belkowego





$$\Phi_I^{gr} = \Phi_{III}^{gr},\ \Phi_{IV}^{gr} \approx \Phi_{VI}^{gr}$$

stop Cu-1%Ni,

$E_s = 117\,GPa$, $G_s = 45\,GPa$,

$R_e = 112\,MPa$,

$L_{1-2} = 1000\,\mu m$, $L_{3-4} = 4000\,\mu m$,

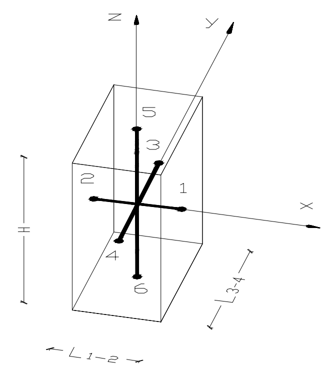
$H = 1000\,\mu m$

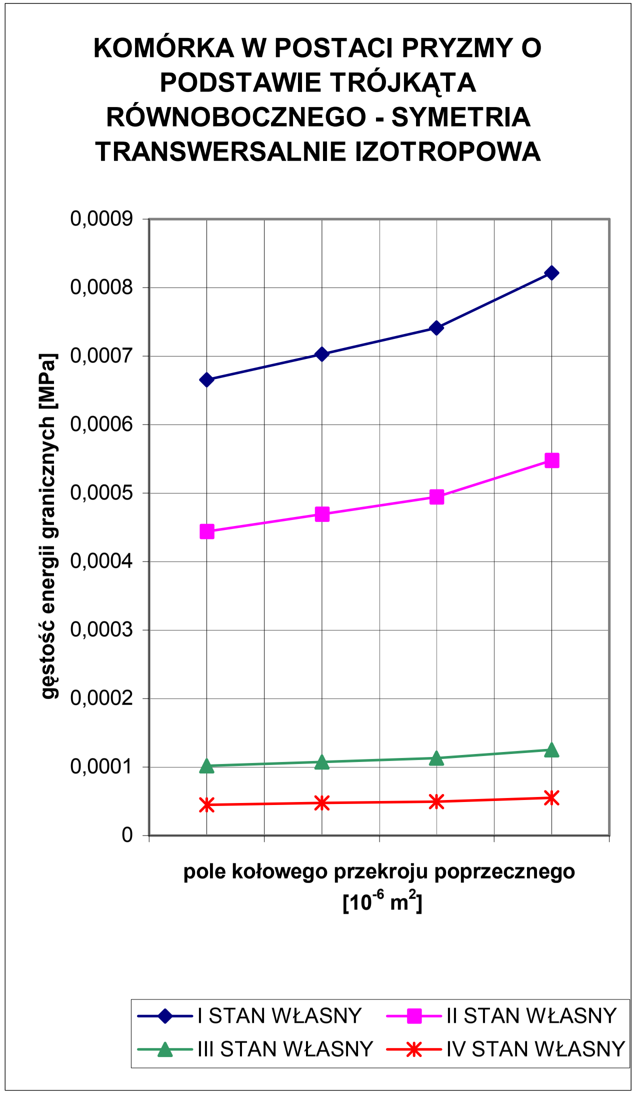
$d_1 = 108\,\mu m$,

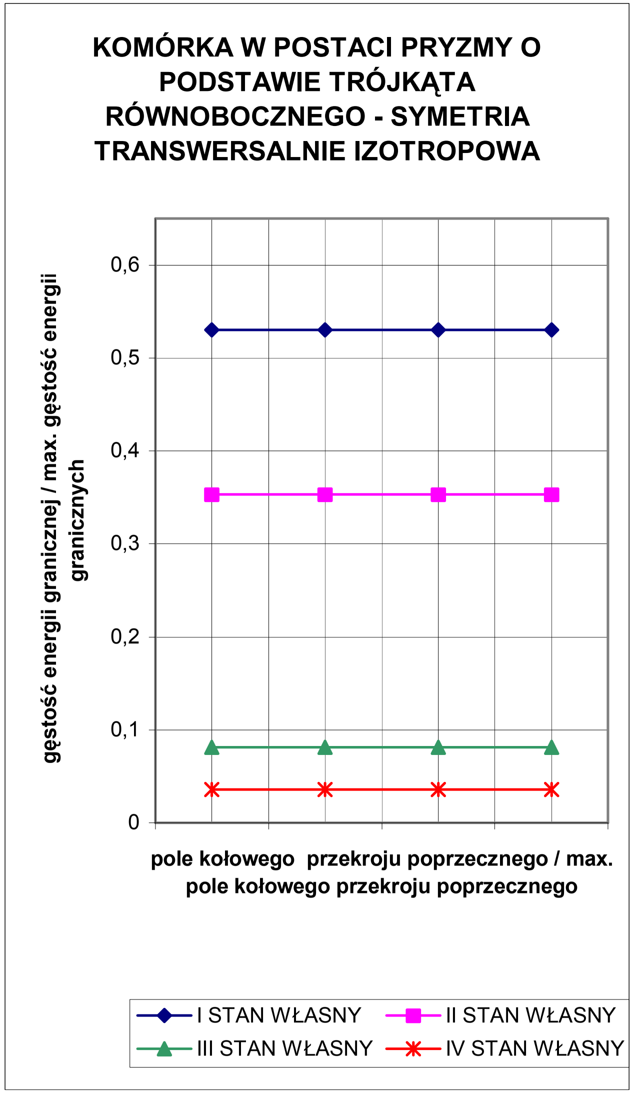
$d_2 = 111\,\mu m$,

$d_3 = 114\,\mu m$,

$d_4 = 120\,\mu m$







stop Cu-1%Ni,

$E_s = 117\,GPa, \quad G_s = 45\,GPa$,

$R_e = 112\,MPa$,

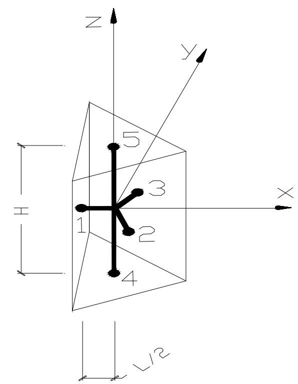
$L = 2000\,\mu m, \quad H = 2000\,\mu m$

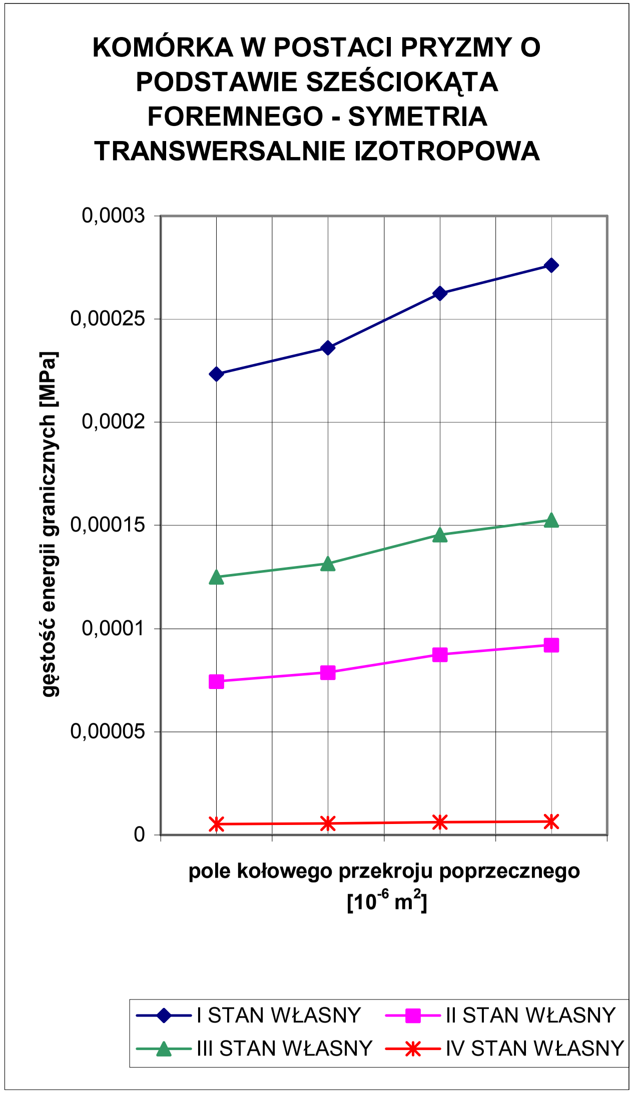
$d_1 = 234\,\mu m,$

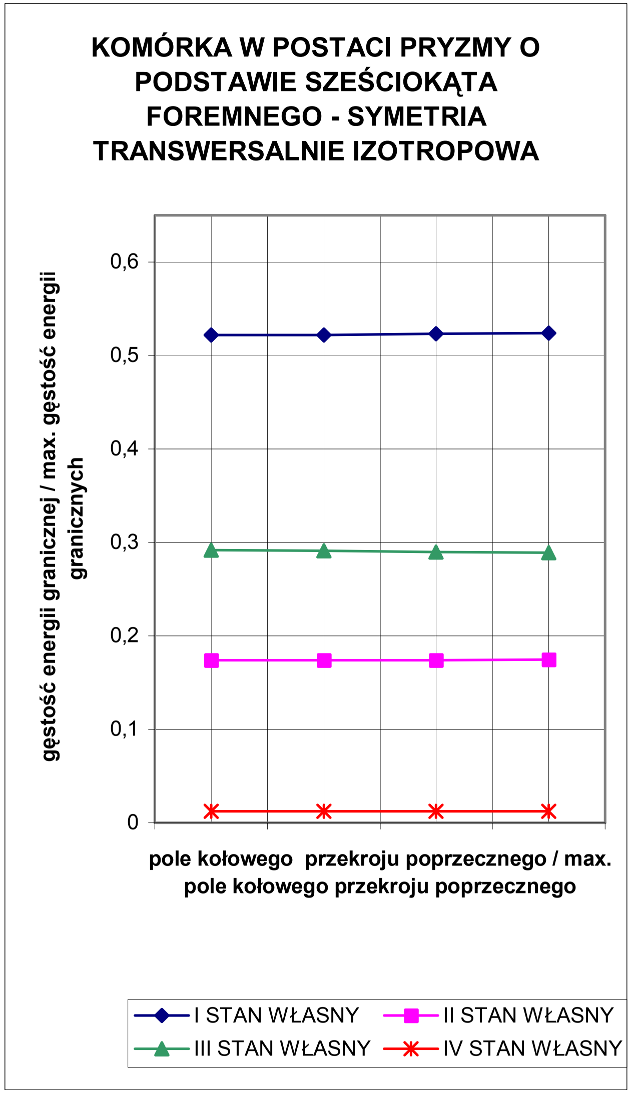
$d_2 = 240.5\,\mu m,$

$d_3 = 247\,\mu m,$

$d_4 = 260\,\mu m$







stop Cu-1%Ni,

$E_s = 117\,GPa, \quad G_s = 45\,GPa$,

$R_e = 112\,MPa$,

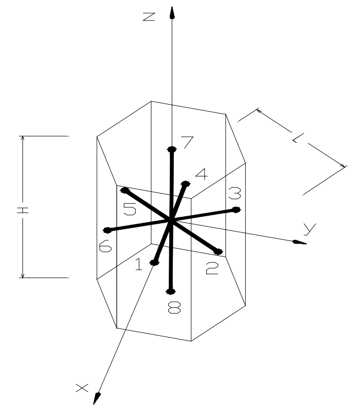
$L = 2000\,\mu m, \quad H = 2000\,\mu m$

$d_1 = 78.3\,\mu m,$

$d_2 = 80.47\,\mu m,$

$d_3 = 84.82\,\mu m,$

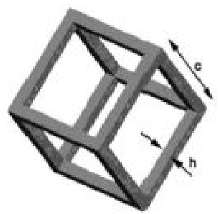
$d_4 = 87\,\mu m$

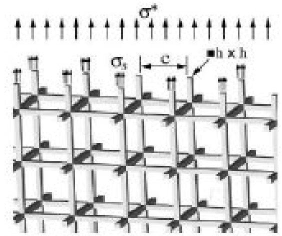


PORÓWNANIE OTRZYMANYCH REZULTATÓW Z DANYMI PREZENTOWANYMI W LITERATURZE

PORÓWNANIE NA POZIOMIE MODELU BELKOWEGO

Pianka węglowa





$c = L = 1.8\ 10^{-3}\ m$

$h = 0.4096\ 10^{-3}\ m$

$E_s = 2.6\ GPa$

$G_s = 1.04\ GPa$

$\nu_s = 0.17$

$\sigma_s = R_e = 69.5\ MPa$

Rozwiązanie analityczne wg S. Choi i B. V. Sankar [2005]:

$E^* = 134.632\ GPa$, $G^* = 3.486\ GPa$, $\sigma^* = \sigma^{gr} = 3.599\ MPa$

Wyniki doświadczalne wg S. Choi i B. V. Sankar [2005]:

$E^* = 124\ GPa$, $\sigma^* = \sigma^{gr} = 3.5805\ MPa$

Rozwiązania analityczne wg obliczeń własnych:

$E^* = 134.632\ GPa$, $G^* = 2.919\ GPa$, $\sigma^* = \sigma^{gr} = 3.414\ MPa$

Błąd oceny naprężenia granicznego otrzymanego z energetycznego kryterium J. Rychlewskiego porównując z wynikami doświadczalnymi jest równy: $\frac{3.5805 - 3.414}{3.5805} 100\% = 4.6\%$. Błąd oceny naprężenia granicznego otrzymanego z rozwiązania podanego w pracy S. Choi i B. V. Sankar [2005] porównując z wynikami doświadczalnymi jest równy: $\frac{3.5805 - 3.599}{3.5805} 100\% = -0.5\%$.

Pianka aluminiowa

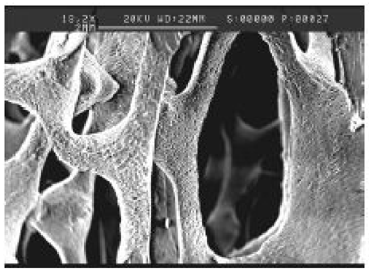
Wymiary i charakterystyki materiałowe elementów reprezentatywnej komórki
(Y. W. Kwon, R. E. Cooke, C. Park [2003]):

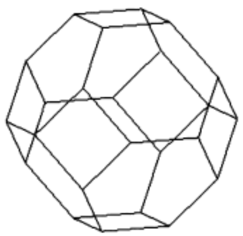
$$E_s = 70\ GPa\,,\ \sigma_s = R_e = 240\ MPa\,,$$

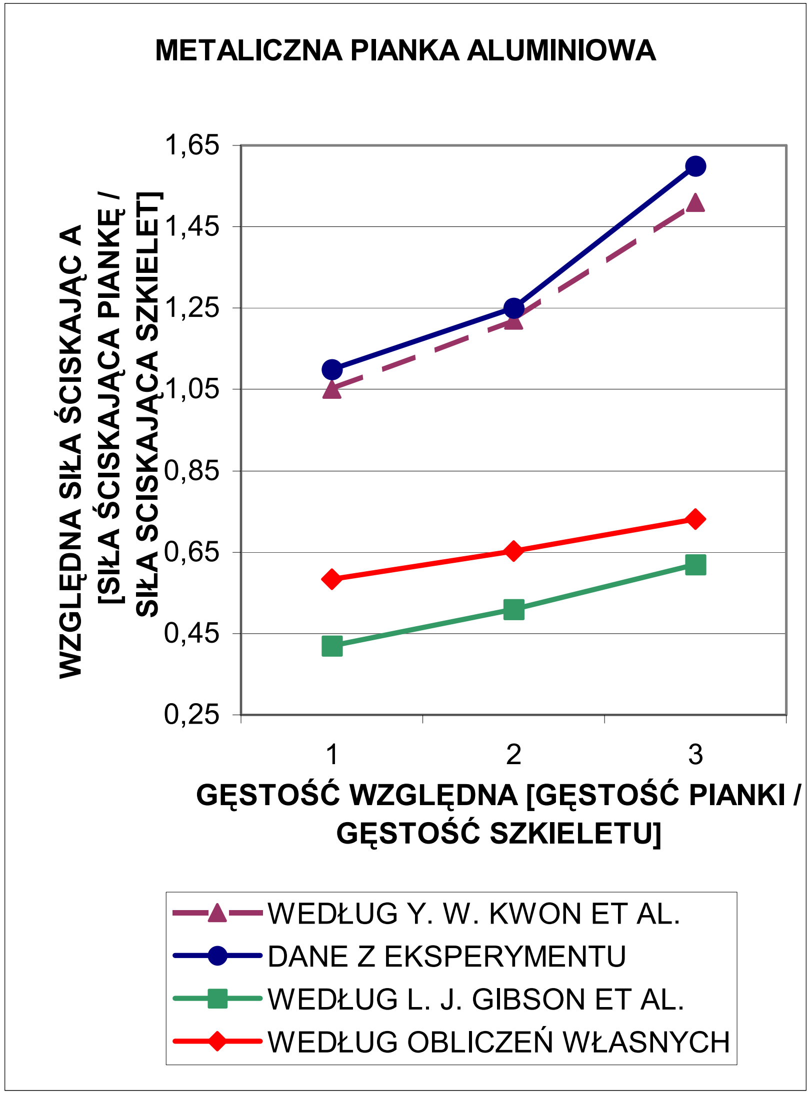
$$\nu_s = 0.3\,,\ \rho_s = 2.70\ g\ \ cc^{-1}\,.$$

Porównano pianki aluminiowe o trzech gęstościach względnych:

$$\frac{\rho^*}{\rho_s} = 0.061\,,\ \frac{\rho^*}{\rho_s} = 0.068\,,\ \frac{\rho^*}{\rho_s} = 0.077\,.$$



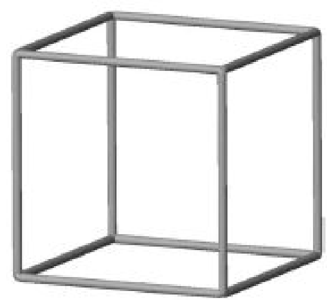




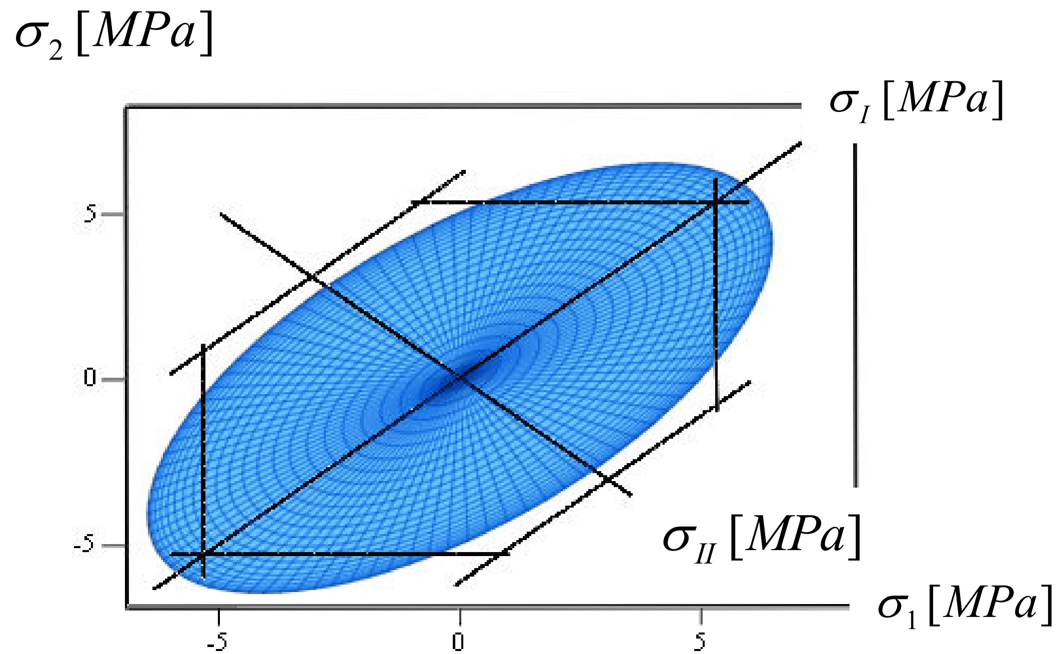
PORÓWNANIE MODELU BELKOWEGO Z INNYMI MODELAMI

Porównano rozwiązania otrzymane dla reprezentatywnej komórki sześciennej w płaskim stanie naprężenia dla następujących danych dotyczących materiału szkieletu:

aluminium, $E_s = 55\ GPa$, $\nu_s = 0.3$, objętość względna $V_f = 0.16$, $G_s = \dfrac{E_s}{2(1+\nu_s)}$.

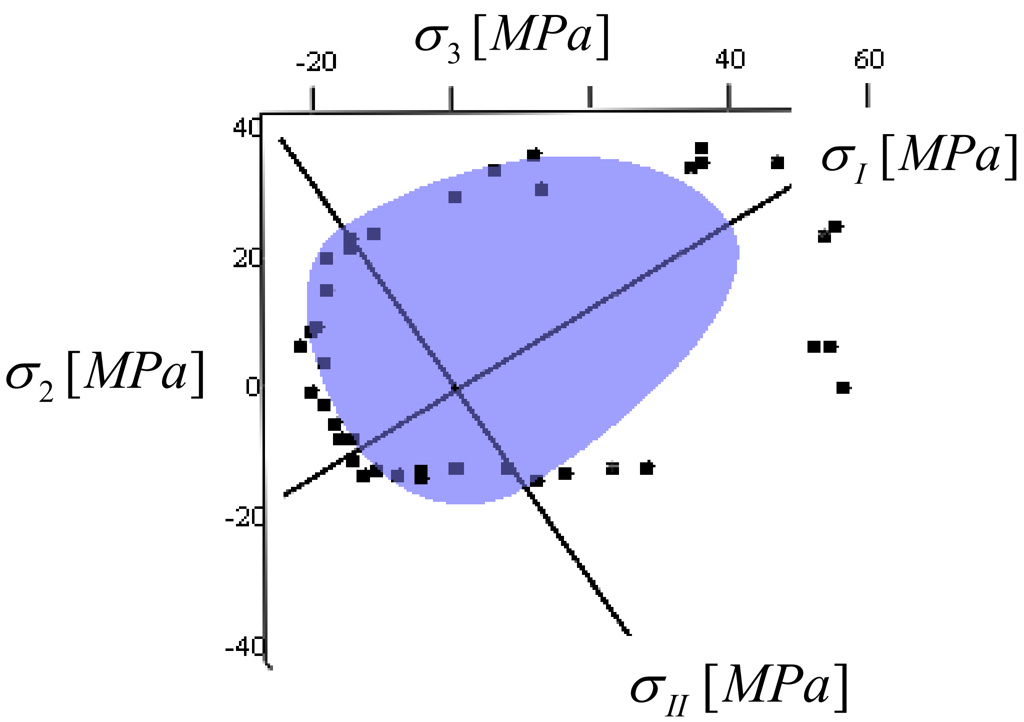


Model sześciennej struktury komórkowej wg pracy J. Aboudi, R. Gilat [2005]

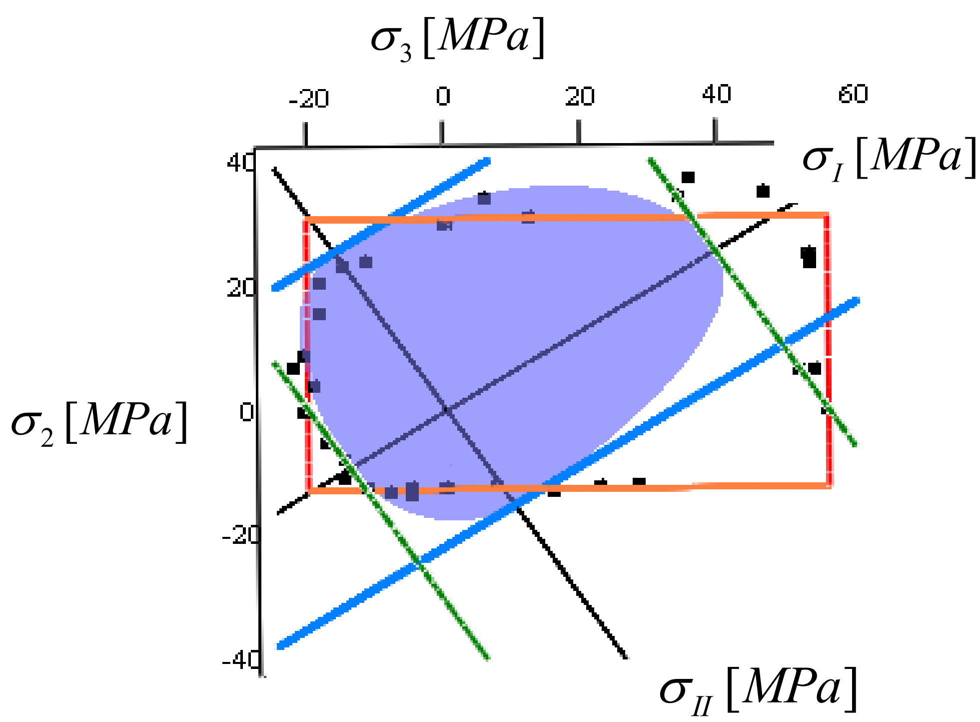


Porównanie powierzchni granicznych wg obliczeń własnych z wartościami prezentowanymi w pracy J. Aboudi, R. Gilat [2005].

PORÓWNANIE OBLICZEŃ ANALITYCZNYCH Z DOŚWIADCZENIEM



Porównanie obliczeń analitycznych z danymi z eksperymentu na przykładzie tektury J. C. Suhling et al. [1985] i M. W. Biegler et al. [1995]

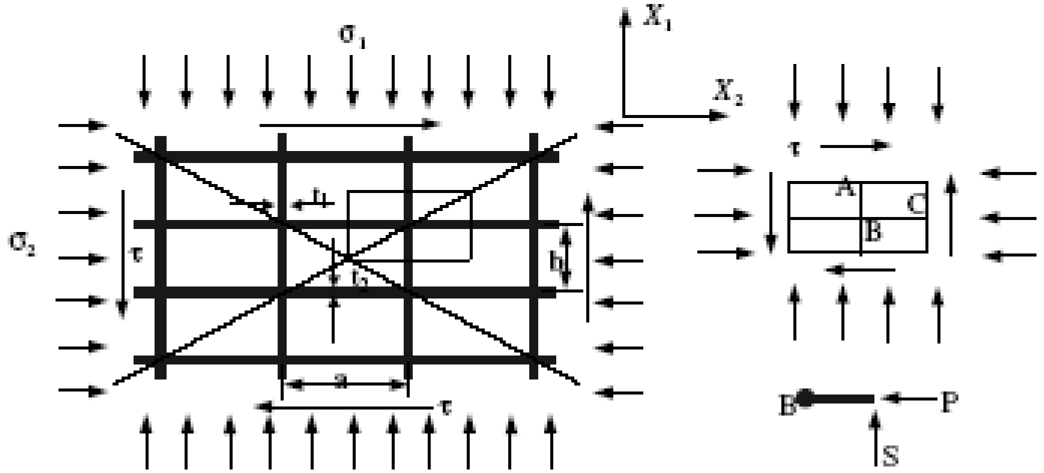


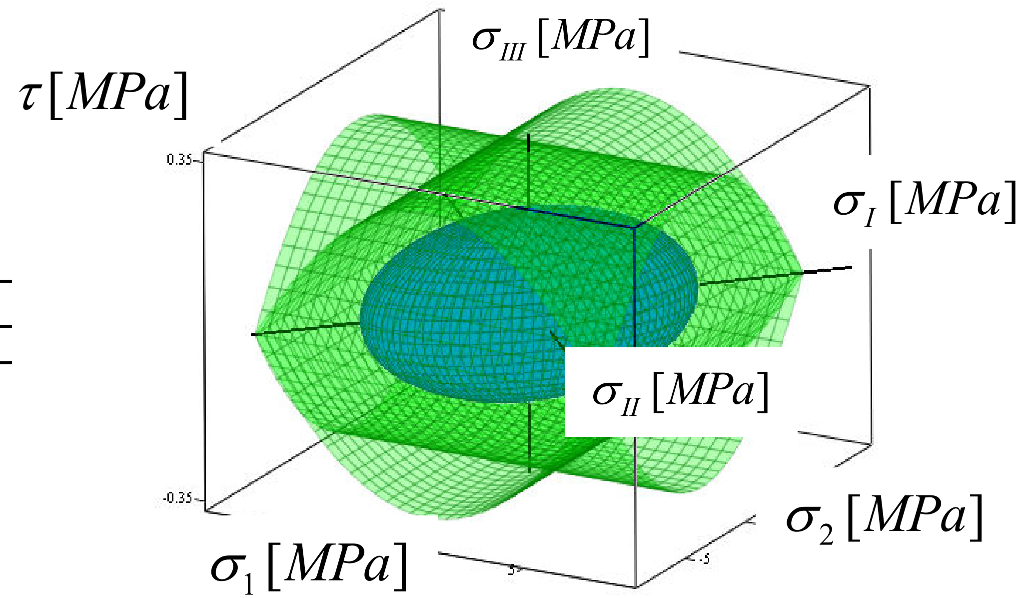
Porównanie obliczeń analitycznych z danymi z eksperymentu na przykładzie tektury

ZASTOSOWANIE MODELU BELKOWEGO DLA MATERIAŁÓW O STRUKTURZE PLASTRA MIODU

Model wg pracy A. J. Wang, D. L. McDowell [2004]
dla plastra miodu o podstawie prostokąta

(dla kwadratu $a=b=l$, $t_1=t_2=t$):





Równanie powierzchni granicznej
wg A. J. Wang, D. L. McDowell [2004]:

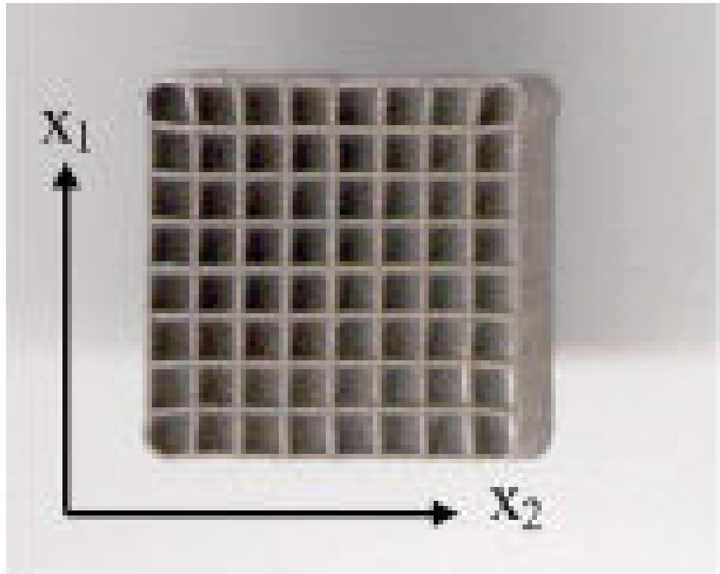
$$\max\left\{\left[\frac{b}{a}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{ys}}\right)^2+2\frac{|\tau|}{\sigma_{ys}}-\frac{(t_2)^2}{a\,b}\right],\left[\frac{a}{b}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}}\right)^2+2\frac{|\tau|}{\sigma_{ys}}-\frac{(t_1)^2}{a\,b}\right]\right\}=0$$

Powierzchnie graniczne dla stopu Cu–1%Ni $E_s=117\,GPa$, $G_s=45\,GPa$, $R_e=112\,MPa$, $L=2000\,\mu m$, $d=150\,\mu m$, pasmo o szerokości $H=2000\,\mu m$.

Porównując wartość naprężenia granicznego otrzymanego z eksperymentu (A. M. Hayes et al. [2004]) dla stopu 18Ni(350) otrzymujemy:

Rozwiązanie analityczne
wg A. J. Wang, D. L. McDowell [2005]:

$$\sigma^* = \sigma^{gr} = 200\ MPa$$



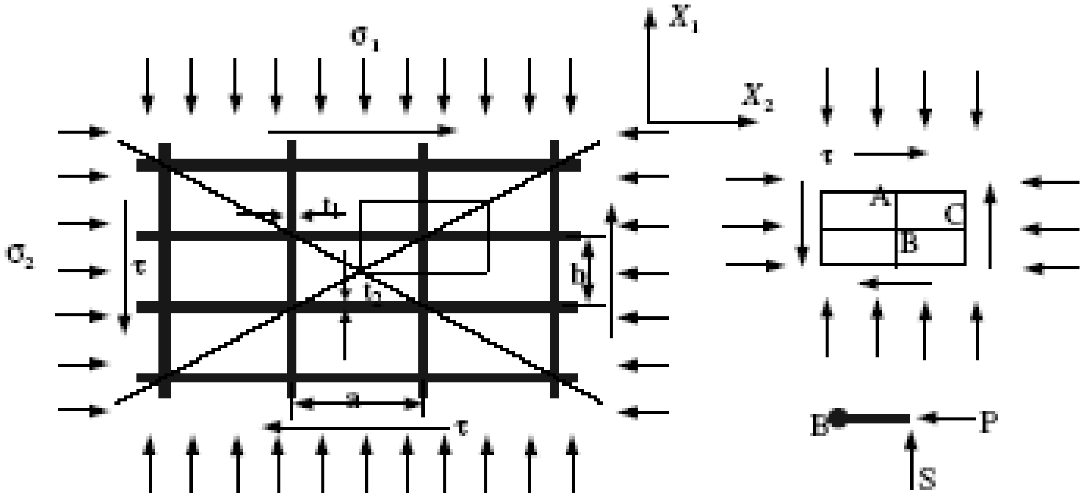
Wyniki doświadczalne wg A. M. Hayes et al. [2004]:

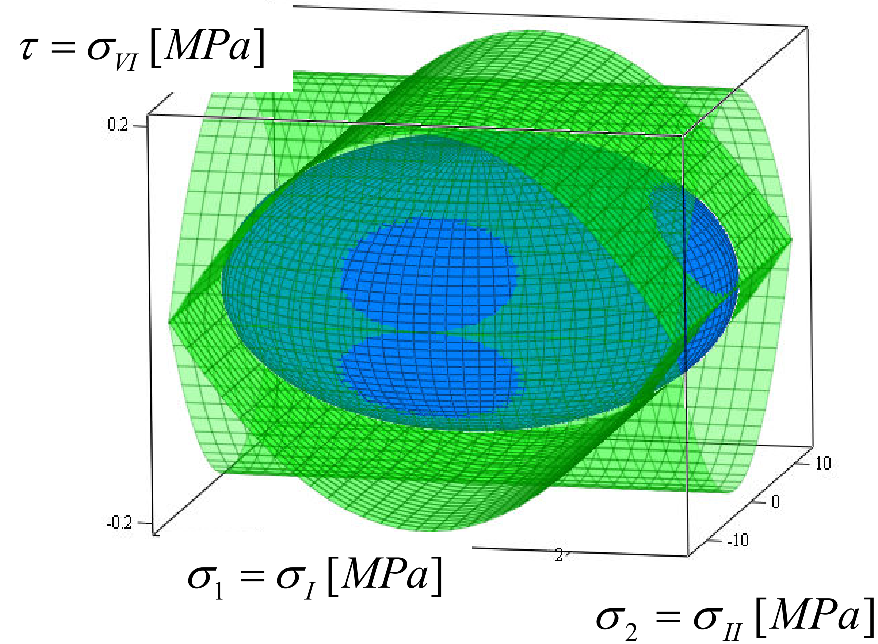
$$\sigma^* = \sigma^{gr} = 68\ MPa$$

Rozwiązania analityczne wg obliczeń własnych:

$$\sigma^* = \sigma^{gr} = 67.251\ MPa$$

Model wg A. J. Wang, D. L. McDowell [2004]
dla plastra miodu o podstawie prostokąta:



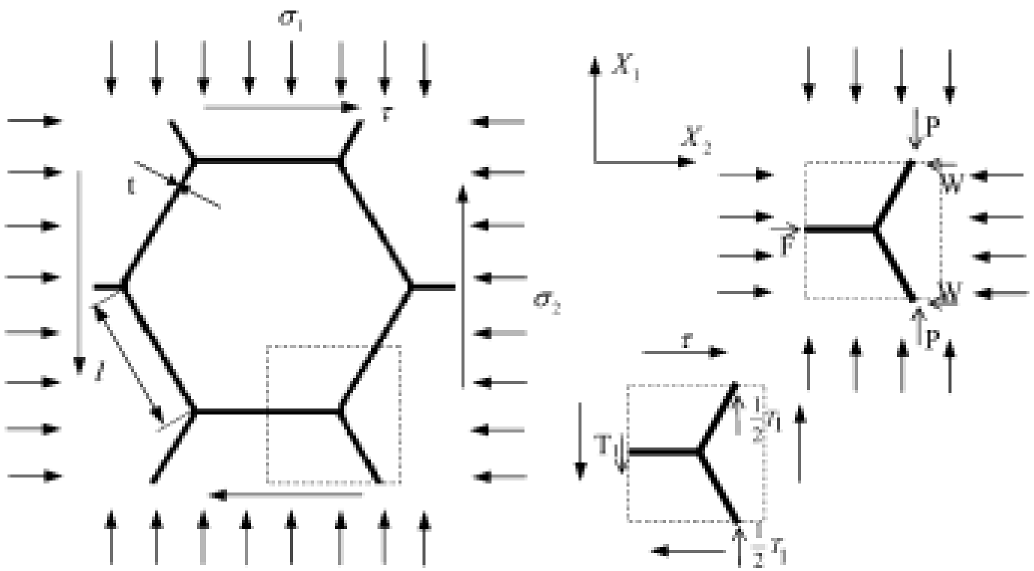


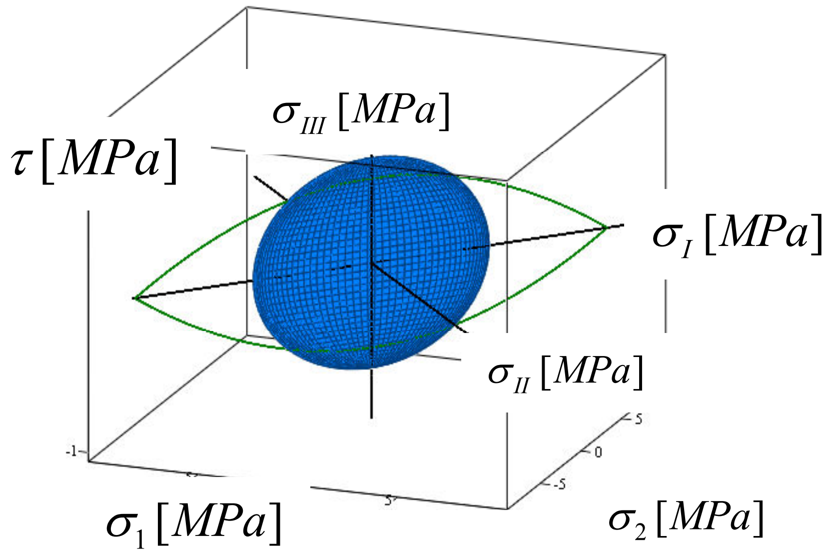
Równanie powierzchni granicznej
wg A. J. Wang, D. L. McDowell [2004]:

$$\max\left\{\left[\frac{b}{a}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{ys}}\right)^2 + 2\frac{|\tau|}{\sigma_{ys}} - \frac{(t_2)^2}{a\,b}\right],\left[\frac{a}{b}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}}\right)^2 + 2\frac{|\tau|}{\sigma_{ys}} - \frac{(t_1)^2}{a\,b}\right]\right\} = 0$$

Powierzchnie graniczne dla stopu Cu–1% $E_s = 117\,GPa$, $G_s = 45\,GPa$, $R_e = 112\,MPa$, $L_{1-2} = 1000\,\mu m$, $L_{3-4} = 4000\,\mu m$, $d = 120\,\mu m$, pasmo o szerokości $H = 1000\,\mu m$.

Model wg A. J. Wang, D. L. McDowell [2004]
dla plastra miodu o podstawie sześciokąta foremnego:



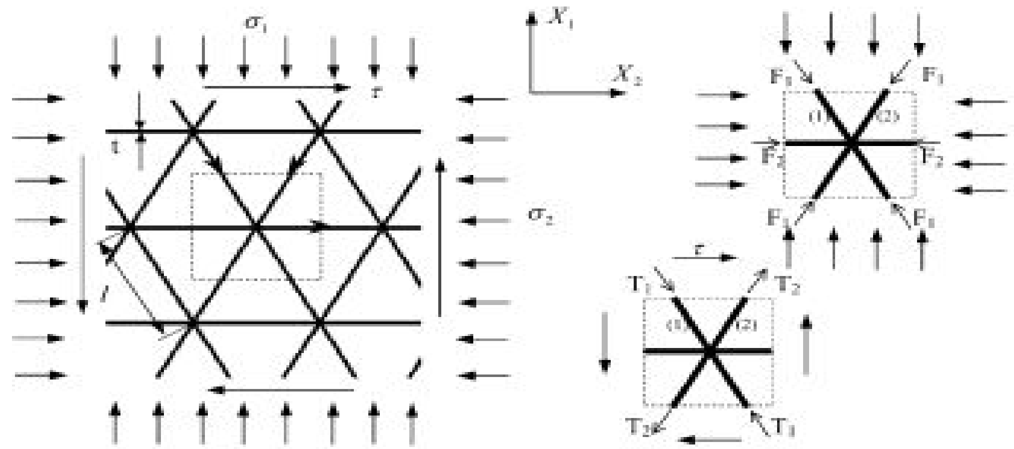


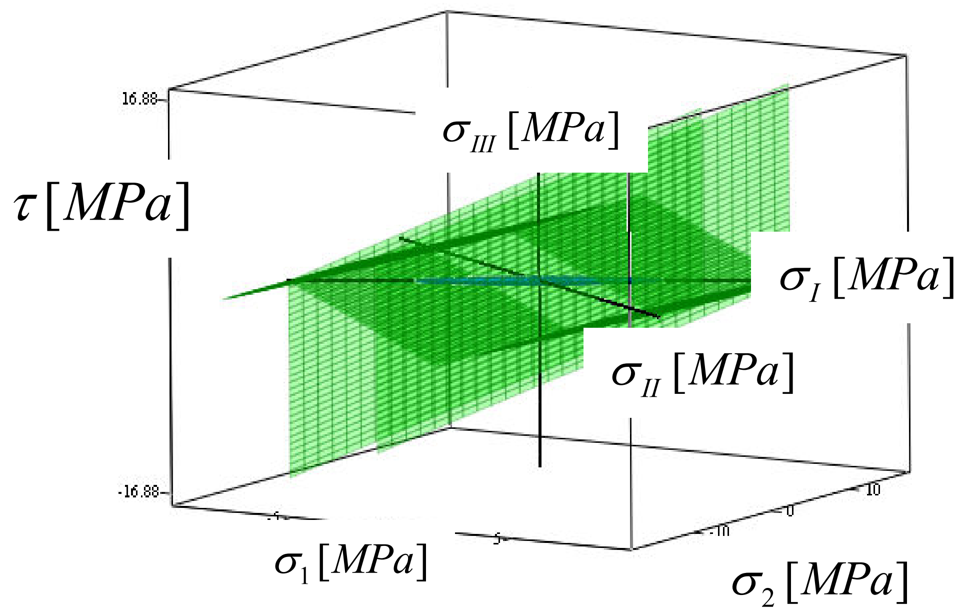
Równanie powierzchni granicznej
wg A. J. Wang, D. L. McDowell [2004]:

$$\max\left\{[\frac{3(3(\sigma_1+\tau)+\sigma_2)^2}{16(\sigma_{ys})^2}+\frac{3\left|\sigma_2-(\sigma_1+\tau)\right|}{2\sigma_{ys}}-\frac{t^2}{l^2}],[3\frac{(\sigma_1)^2}{(\sigma_{ys})^2}+2\sqrt{3}\frac{|\tau|}{\sigma_{ys}}-\frac{t^2}{l^2}]\right\}=0$$

Powierzchnie graniczne dla stopu Cu–1% $E_s=117\,GPa$, $G_s=45\,GPa$, $R_e=112\,MPa$, $L=2000\,\mu m$, $d=260\,\mu m$, pasmo o szerokości $H=2000\,\mu m$.

Model wg A. J. Wang, D. L. McDowell [2004]
dla plastra miodu o podstawie trójkąta równobocznego:





Równanie powierzchni granicznej
A. J. Wang, D. L. McDowell [2004]:

$$\max\left\{\left[\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}}-\frac{\tau}{\sigma_{ys}}\right|-\frac{t}{l}\right],\left[\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}}+\frac{\tau}{\sigma_{ys}}\right|-\frac{t}{l}\right],\left[\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sigma_2}{\sigma_{ys}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}}\right|-\frac{t}{l}\right]\right\}=0$$

Do narysowania powierzchni granicznych wykorzystano charakterystyki materiałowe stopu Cu–1%Ni $E_s = 117\,GPa$, $G_s = 45\,GPa$, $R_e = 112\,MPa$, $L = 2000\,\mu m$, $d = 87\,\mu m$, pasmo o szerokości $H = 2000\,\mu m$.

Literatura

[1] J. Aboudi, R. Gilat: Micromechanical analysis of lattice blocks, International Journal of Solids and Structures 42, 2005, 4372-4392

[2] Y. A. Arramon, M. M. Mehrabadi, D. W. Martin, S. C. Cowin: A multidimensional anisotropic strength criterion based on Kelvin modes, Interational Journal of Solids and Struktures, 37, 2000, 2915-2935

[3] M. W. Biegler, M. M. Mehrabadi: An energy-based constitutive model for anisotropic solids subject to damage, Mechanics of Materials, 19, 1995, 151-164

[4] L. J. Gibson, M. F. Ashby: Celluar solids: Structure and properties, Cambrige University Press 1997

[5] A. M. Hayes, A. Wang, B. M. Dempsey, D. L. McDowell: Mechanics of linear cellular alloys, Mechanics of Materials 36, 2004, 691-713

[6] M. Janus-Michalska, R. B. Pęcherski: Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling, Technische Mechanik, 2003, 23, 234-244

[7] M. M. Mehrabadi, S. C. Cowin: Eigentensors of linear anisotropic elastic materials, Mech. appl. Math. 1990 Vol 43, 15-41

[8] K. T Nalepka, R. B. Pęcherski: Energetyczne kryteria wytężenia. Propozycja obliczania granicznych energii z pierwszych zasad, Rudy Metale, 2003, r. 48, 533÷536

[9] S. Nemat-Nasser, M. Hori: Micromechanics; overall properties of heterogeneous materials, Second Revised Edition, N H, 1999

[10] J. Ostrowska-Maciejewska, K. Kowalczyk-Gajewska: Matematyczne podstawy anizotropii sprężystej z przykładami, Wykłady w Katedrze Wytrzymałości Materiałów, IMB PK, 22 03 2004

[11] J. Rychlewski: CEIIINOSSSTTUV, Математическая структура упругих тел, Препринт N 217, Москва 1983

[12]J. Rychlewski: О законе Гука, ПММ, 48, 3, 420-432, 1984(a)

[13] J. Rychlewski: Разложения упругой энегии и критерии предельности, Успехи Механики–Advances in Mechanics, 1984(b), t.7, s. 51-80

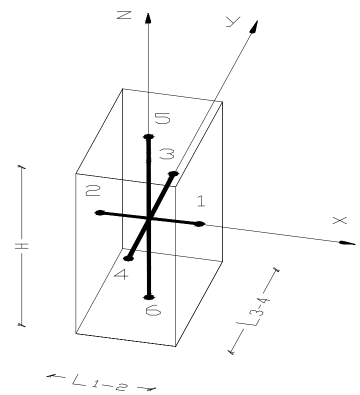
[14] J. Rychlewski: Unconventional approach to linear elasticity,Arch. Mech., 47, 149 – 171, 1995

[15] A. J. Wang, D. L. McDowell: In-Plane Stiffness end Yield Strength of Periodic Metal Honeycombs, Journal of Engineering Materials and Technology, 2004

[16] A. J. Wang, D. L. McDowell: Yield surfaces of various periodic metal honeycombs at intermediate relative density, International af of Plasticity, 2005

BEZWYMIAROWE ZALEŻNOŚCI OKREŚLAJĄCE ROZKŁAD GĘSTOŚCI ENERGII STANÓW GRANICZNYCH

$$\frac{\Phi_I^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}+\Phi_V^{gr}+\Phi_{VI}^{gr}}=\frac{1.225\cdot 10^{21}}{6.434\cdot 10^{21}+3.503\cdot 10^{19}k^2+3.503\cdot 10^{19}k^2\nu}$$



$$\frac{\Phi_{II}^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}+\Phi_V^{gr}+\Phi_{VI}^{gr}}=\frac{2.083\cdot 10^{21}}{6.434\cdot 10^{21}+3.503\cdot 10^{19}k^2+3.503\cdot 10^{19}k^2\nu}$$

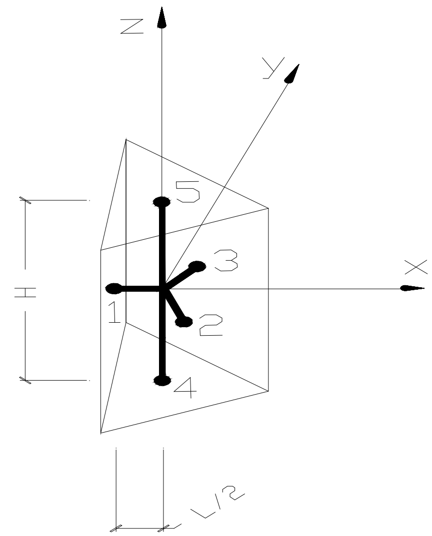
$$\frac{\Phi_{III}^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}+\Phi_V^{gr}+\Phi_{VI}^{gr}}=\frac{2.206\cdot 10^{21}}{6.434\cdot 10^{21}+3.503\cdot 10^{19}k^2+3.503\cdot 10^{19}k^2\nu}$$

$$\frac{\Phi_{IV}^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}+\Phi_V^{gr}+\Phi_{VI}^{gr}}=\frac{0.4166\,(8.580\cdot 10^{20}+2.243\cdot 10^{19}k^2+2.243\cdot 10^{19}k^2\nu)}{6.434\cdot 10^{21}+3.503\cdot 10^{19}k^2+3.503\cdot 10^{19}k^2\nu}$$

$$\frac{\Phi_V^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}+\Phi_V^{gr}+\Phi_{VI}^{gr}}=\frac{0.2007\,(1.425\cdot 10^{21}+6.333\cdot 10^{19}k^2+6.333\cdot 10^{19}k^2\nu)}{6.434\cdot 10^{21}+3.503\cdot 10^{19}k^2+3.503\cdot 10^{19}k^2\nu}$$

$$\frac{\Phi_{VI}^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}+\Phi_V^{gr}+\Phi_{VI}^{gr}}=\frac{4.499\,(6.128\cdot 10^{19}+2.884\cdot 10^{18}k^2+2.884\cdot 10^{18}k^2\nu)}{6.434\cdot 10^{21}+3.503\cdot 10^{19}k^2+3.503\cdot 10^{19}k^2\nu}$$

$$\frac{\Phi_I^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}} = (444.4\,(k+10)^2\,(2.500\cdot10^{20}+3.700\cdot10^{19}k^2+3.700\cdot10^{19}k^2\nu))/$$
$$(6.312\cdot10^{23}k^3+3.846\cdot10^{24}k^2+4.183\cdot10^{24}k+4.121\cdot10^{22}k^4\nu^2+2.239\cdot10^{25}+$$
$$+3.592\cdot10^{24}k^2\nu+1.205\cdot10^{23}k^4\nu+6.312\cdot10^{23}k^3\nu+7.932\cdot10^{22}k^4+3.564\cdot10^{21}k^5\nu+$$
$$+8.910\cdot10^{19}k^6\nu^2+1.782\cdot10^{21}k^5\nu^2+1.782\cdot10^{20}k^6\nu+9.910\cdot10^{19}k^6+1.782\cdot10^{21}k^5)$$

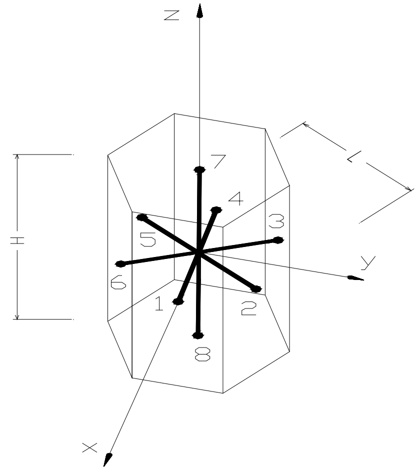


$$\frac{\Phi_{II}^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}} = (360.4\,(k+10)^2\,(2.500\cdot10^{20}+3.700\cdot10^{19}k^2+3.700\cdot10^{19}k^2\nu))/$$
$$(6.312\cdot10^{23}k^3+3.846\cdot10^{24}k^2+4.183\cdot10^{24}k+4.121\cdot10^{22}k^4\nu^2+2.239\cdot10^{25}+$$
$$+3.592\cdot10^{24}k^2\nu+1.205\cdot10^{23}k^4\nu+6.312\cdot10^{23}k^3\nu+7.932\cdot10^{22}k^4+3.564\cdot10^{21}k^5\nu+$$
$$+8.910\cdot10^{19}k^6\nu^2+1.782\cdot10^{21}k^5\nu^2+1.782\cdot10^{20}k^6\nu+8.910\cdot10^{19}k^6+1.782\cdot10^{21}k^5)$$

$$\frac{\Phi_{III}^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}} = ((7857+1163k^2+1163k^2\nu)$$
$$(1.877\cdot10^{20}+3.341\cdot10^{19}k^2+2.778\cdot10^{19}k^2\nu))/$$
$$(6.312\cdot10^{23}k^3+3.846\cdot10^{24}k^2+4.183\cdot10^{24}k+4.121\cdot10^{22}k^4\nu^2+2.239\cdot10^{25}+$$
$$+3.592\cdot10^{24}k^2\nu+1.205\cdot10^{23}k^4\nu+6.312\cdot10^{23}k^3\nu+7.932\cdot10^{22}k^4+3.564\cdot10^{21}k^5\nu+$$
$$+8.910\cdot10^{19}k^6\nu^2+1.782\cdot10^{21}k^5\nu^2+1.782\cdot10^{20}k^6\nu+8.910\cdot10^{19}k^6+1.782\cdot10^{21}k^5)$$

$$\frac{\Phi_{IV}^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}} = (1.287\cdot10^{-18}\,(k+10)^2\,(2.500\cdot10^{20}+3.700\cdot10^{19}k^2+3.700\cdot10^{19}k^2\nu)$$
$$(2.476\cdot10^{19}+1.8711\cdot10^{18}k^2+1.871\cdot10^{18}k^2\nu))/$$
$$(3.846\cdot10^{24}k^2+6.312\cdot10^{23}k^3+6.312\cdot10^{23}k^3\nu+1.205\cdot10^{23}k^4\nu^2+4.121\cdot10^{22}k^4\nu^2+$$
$$+7.932\cdot10^{22}k^4+1.782\cdot10^{21}k^5\nu^2+8.910\cdot10^{19}k^6\nu^2+3.564\cdot10^{21}k^5\nu+1.782\cdot10^{20}k^6\nu+$$
$$+4.183\cdot10^{24}k+2.239\cdot10^{25}+3.592\cdot10^{24}k^2\nu+1.782\cdot10^{21}k^5+8.910\cdot10^{19}k^6)$$

$$\frac{\Phi_I^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}} = (2.162\cdot 10^{-17}\ (1.667\cdot 10^{20}+2.467\cdot 10^{19}k^2+2.467\cdot 10^{19}k^2\nu+5.000\cdot 10^{19}k)^2)\,/$$



$$(4.379\cdot 10^{23}k+2.4566\cdot 10^{22}k^4\nu^2+6.552\cdot 10^{22}k^3+4.165\cdot 10^{23}k^2+5.256\cdot 10^{22}k^4\nu+$$
$$+6.552\cdot 10^{22}k^3\nu+2.800\cdot 10^{22}k^4+1.051\cdot 10^{20}k^5+2.593\cdot 10^{19}k^6+1.105\cdot 10^{24}+$$
$$+3.283\cdot 10^{23}k^2\nu+1.051\cdot 10^{20}k^5\nu^2+2.593\cdot 10^{19}k^6\nu^3+2.102\cdot 10^{20}k^5\nu+7.779\cdot 10^{19}k^6\nu^2+7.779\cdot 10^{19}k^6\nu)$$

$$\frac{\Phi_{II}^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}} = (3.896\cdot 10^{-18}\ (1.667\cdot 10^{20}+2.467\cdot 10^{19}k^2+2.467\cdot 10^{19}k^2\nu+$$
$$+5.000\cdot 10^{19}k)^2)\,/$$
$$(4.379\cdot 10^{23}k+2.4566\cdot 10^{22}k^4\nu^2+6.552\cdot 10^{22}k^3+4.165\cdot 10^{23}k^2+5.256\cdot 10^{22}k^4\nu+$$
$$+6.552\cdot 10^{22}k^3\nu+2.800\cdot 10^{22}k^4+1.051\cdot 10^{20}k^5+2.593\cdot 10^{19}k^6+1.105\cdot 10^{24}+$$
$$+3.283\cdot 10^{23}k^2\nu+1.051\cdot 10^{20}k^5\nu^2+2.593\cdot 10^{19}k^6\nu^3+2.102\cdot 10^{20}k^5\nu+$$
$$+7.779\cdot 10^{19}k^6\nu^2+7.779\cdot 10^{19}k^6\nu)$$

$$\frac{\Phi_{III}^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}} = ((2252+333.3k^2+333.3k^2\nu)$$
$$(1.667\cdot 10^{20}+3.467\cdot 10^{19}k^2+2.467\cdot 10^{19}k^2\nu))\,/$$
$$(4.379\cdot 10^{23}k+2.4566\cdot 10^{22}k^4\nu^2+6.552\cdot 10^{22}k^3+4.165\cdot 10^{23}k^2+5.256\cdot 10^{22}k^4\nu+$$
$$+6.552\cdot 10^{22}k^3\nu+2.800\cdot 10^{22}k^4+1.051\cdot 10^{20}k^5+2.593\cdot 10^{19}k^6+1.105\cdot 10^{24}+$$
$$+3.283\cdot 10^{23}k^2\nu+1.051\cdot 10^{20}k^5\nu^2+2.593\cdot 10^{19}k^6\nu^3+2.102\cdot 10^{20}k^5\nu+7.779\cdot 10^{19}k^6\nu^2+7.779\cdot 10^{19}k^6\nu)$$

$$\frac{\Phi_{IV}^{gr}}{\Phi_I^{gr}+\Phi_{II}^{gr}+\Phi_{III}^{gr}+\Phi_{IV}^{gr}} = ((7.559\cdot 10^{-19}+4.261\cdot 10^{-20}k^2+4.261\cdot 10^{-20}k^2\nu)$$
$$(1.667\cdot 10^{20}+2.467\cdot 10^{19}k^2+2.467\cdot 10^{19}k^2\nu+5.000\cdot 10^{19}k)^2)\,/$$
$$(4.379\cdot 10^{23}k+2.4566\cdot 10^{22}k^4\nu^2+6.552\cdot 10^{22}k^3+4.165\cdot 10^{23}k^2+5.256\cdot 10^{22}k^4\nu+$$
$$+6.552\cdot 10^{22}k^3\nu+2.800\cdot 10^{22}k^4+1.051\cdot 10^{20}k^5+2.593\cdot 10^{19}k^6+1.105\cdot 10^{24}+$$
$$+3.283\cdot 10^{23}k^2\nu+1.051\cdot 10^{20}k^5\nu^2+2.593\cdot 10^{19}k^6\nu^3+2.102\cdot 10^{20}k^5\nu+7.779\cdot 10^{19}k^6\nu^2+7.779\cdot 10^{19}k^6\nu)$$

TENSORY $\mathbf{S}$, $\mathbf{C}$ I $\mathbf{H}$ NIE SĄ WSPÓŁOSIOWE

Twierdzenie dotyczące energetycznej interpretacji warunku granicznego jest sformułowane dla dowolnych tensorów $\mathbf{S}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{H}$ daje to możliwość rozpatrywania różnych typów symetrii materiału w stanie sprężystym i w stanie granicznym.

1. K. Kowalczyk, J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski;
„An energy-based yield criterion for solids of cubic elasticity and orthotropic limit state”,
Arch. Mech., 2003, t. 55, s. 431÷448

2. J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski,:
„Anizotropia sprężysta i wytężenie cienkich warstw i powłok”,
IMiIM PAN – IPPT PAN, Kraków 2006

Ad 1

Warunek graniczny typu Mises'a przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{h_1}\phi(\boldsymbol{\sigma}_1)+\frac{1}{h_2}\phi(\boldsymbol{\sigma}_2)+\ldots+\frac{1}{h_\rho}\phi(\boldsymbol{\sigma}_\rho)=\frac{\overset{2}{\sigma_1}}{k_1^2}+\frac{\overset{2}{\sigma_2}}{k_2^2}+\ldots+\frac{\overset{2}{\sigma_\rho}}{k_\rho^2}\le 1$$

gdzie:

$h_\alpha=\dfrac{k_\alpha^2}{2\lambda_\alpha}$ jest graniczną wartością energii sprężystej dla naprężenia $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ - $\dfrac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_\alpha)}{h_\alpha}=\dfrac{1}{h_\alpha}\dfrac{\overset{2}{\sigma_\alpha}}{2\lambda_\alpha}=\dfrac{\sigma_\alpha^{\;2}}{k_\alpha^2}$,

przestrzeń $\mathcal{P}_\alpha$ jest przestrzenią stanów bezpiecznych jeśli $k_\alpha\to\infty$.

Dla tensora podatności rozkład spektralny ma postać

$$\mathbf{C}=\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{P}_1+\ldots+\frac{1}{\lambda_\rho}\mathbf{P}_\rho$$

gdzie tensor $\mathbf{P}_k$ jest projektorem ortogonalnym dla tensora $\mathbf{C}$,
w stanie sprężystym materiał posiada symetrię kubiczną: *k*=I, II, III

$$\lambda_I = \lambda_1 = S_{1111} + 2S_{1122} \qquad \mathbf{P}_I = \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = S_{1111} - S_{1122} \qquad \mathbf{P}_{II} = (\mathbf{K} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})$$

$$\lambda_{III} = \lambda_5 = \lambda_6 = 2S_{2323} \qquad \mathbf{P}_{III} = (\mathbf{I}_S - \mathbf{K})$$

gdzie:

$$\mathbf{C}\circ\mathbf{S} = \mathbf{S}\circ\mathbf{C} = \mathbf{I}_S,$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{m}_1\otimes\mathbf{m}_1\otimes\mathbf{m}_1\otimes\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2\otimes\mathbf{m}_2\otimes\mathbf{m}_2\otimes\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3\otimes\mathbf{m}_3\otimes\mathbf{m}_3\otimes\mathbf{m}_3$$

$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\ \mathbf{m}_3$ - kierunki elementrnego sześcianu

Graniczną wartością energii sprężystej ma postać

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \Phi^{I}(\boldsymbol{\sigma}) + \Phi^{II}(\boldsymbol{\sigma}) + \Phi^{II}(\boldsymbol{\sigma}) =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{1}{\lambda_I}(tr\boldsymbol{\sigma})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_{II}}[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(tr\boldsymbol{\sigma})^2] + \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_{III}}[tr\boldsymbol{\sigma}^2 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\sigma}]$$

Dla tensora granicznego rozkład spektralny ma postać

$$\mathbf{H} = \frac{1}{K_1}\boldsymbol{\Gamma}_1 + \ldots + \frac{1}{K_6}\boldsymbol{\Gamma}_6$$

gdzie tensor $\boldsymbol{\Gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\Gamma}_6$ jest projektorem ortogonalnym dla tensora $\mathbf{H}$,
w stanie granicznym materiał wykazuję ortotropię

$$\boldsymbol{\Gamma}_1 = \boldsymbol{\chi}_1 \otimes \boldsymbol{\chi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Gamma}_6 = \boldsymbol{\chi}_6 \otimes \boldsymbol{\chi}_6$$

$$\boldsymbol{\chi}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{I},\ \boldsymbol{\chi}_2 = \cos\varphi\,\mathbf{a}_{II} + \sin\varphi\,\mathbf{a}_{III},\ \boldsymbol{\chi}_3 = -\sin\varphi\,\mathbf{a}_{II} + \cos\varphi\,\mathbf{a}_{III}$$

$$\boldsymbol{\chi}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{m}_2 \otimes \boldsymbol{\chi}_3 + \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_2),\ \boldsymbol{\chi}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{m}_1 \otimes \boldsymbol{\chi}_3 + \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_1)$$

$$\boldsymbol{\chi}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{m}_1 \otimes \boldsymbol{\chi}_2 + \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_1)$$

gdzie: $\mathbf{a}_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)$, $\mathbf{a}_{III} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2 - 2\mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3)$

$\varphi -$ kąt obrotu tensorów $\mathbf{S}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{H}$

Uwzględniając

$$\boldsymbol{\Gamma}_1 = \mathbf{P}_I, \quad \boldsymbol{\Gamma}_2 + \boldsymbol{\Gamma}_3 = \mathbf{P}_{II}, \qquad \boldsymbol{\Gamma}_4 + \boldsymbol{\Gamma}_5 + \boldsymbol{\Gamma}_6 = \mathbf{P}_{III}$$

Rozkład spektralny tensora podatności ma postać

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\lambda_I}\boldsymbol{\Gamma}_1 + \frac{1}{\lambda_{II}}(\boldsymbol{\Gamma}_2 + \boldsymbol{\Gamma}_3) + \frac{1}{\lambda_{III}}(\boldsymbol{\Gamma}_4 + \boldsymbol{\Gamma}_5 + \boldsymbol{\Gamma}_6)$$

Wartość h wyznaczamy z zależności $\det(\mathbf{H} - \frac{1}{2h}\mathbf{C}) = 0$:

$$h_1 = \frac{K_1}{2\lambda_I} \to \infty, \qquad h_2 = \frac{K_2}{2\lambda_{II}}, \qquad h_3 = \frac{K_3}{2\lambda_{II}}$$

$$h_4 = \frac{K_4}{2\lambda_{III}}, \qquad h_5 = \frac{K_5}{2\lambda_{III}}, \qquad h_6 = \frac{K_6}{2\lambda_{III}}$$

Warunek graniczny ma postać

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{2\lambda_{II}}{K_2}\phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \frac{2\lambda_{II}}{K_3}\phi(\boldsymbol{\sigma}_3) + \frac{2\lambda_{III}}{K_4}\phi(\boldsymbol{\sigma}_4) + \frac{2\lambda_{III}}{K_5}\phi(\boldsymbol{\sigma}_5) + \frac{2\lambda_{III}}{K_6}\phi(\boldsymbol{\sigma}_6) \le 1$$

$$\phi^{II} = \phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \phi(\boldsymbol{\sigma}_3), \quad \phi^{III} = \phi(\boldsymbol{\sigma}_4) + \phi(\boldsymbol{\sigma}_5) + \phi(\boldsymbol{\sigma}_5)$$

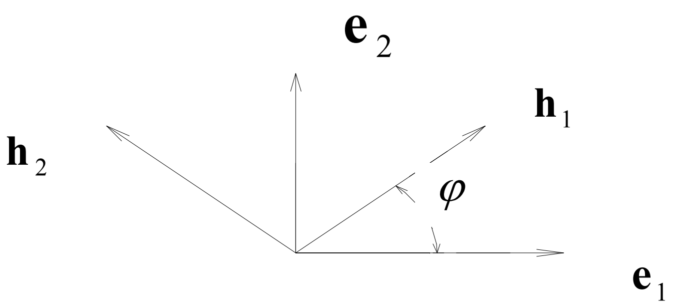
Ad 2

Aby podać warunek graniczny dla płaskich stanów, który ma charakter energetyczny wykorzystane jest twierdzenie dotyczące energetycznej interpretacji warunku granicznego.

Rozpatrywany materiał jest symetryczny zarówno w stanie sprężystym jak również w stanie granicznym. Dla stanów płaskich materiał posiada wówczas co najmniej symetrię prostokąta – jest materiałem ortotropowym.

Założono, że materiał jest ortotropowy w stanie sprężystym i granicznym o różnych osiach symetrii i różnych dystrybutorach.

W stanie sprężystym osiami symetrii są kierunki $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ na płaszczyźnie fizycznej. W stanie granicznym osiami symetrii są kierunki $\mathbf{h}_1$ i $\mathbf{h}_2$ obrócone względem $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ o kąt φ



$$\mathbf{h}_1 = \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{h}_2 = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2$$

W przestrzeni trójwymiarowej $\mathcal{S}$ rozpatrywane są cztery ortonormalne bazy

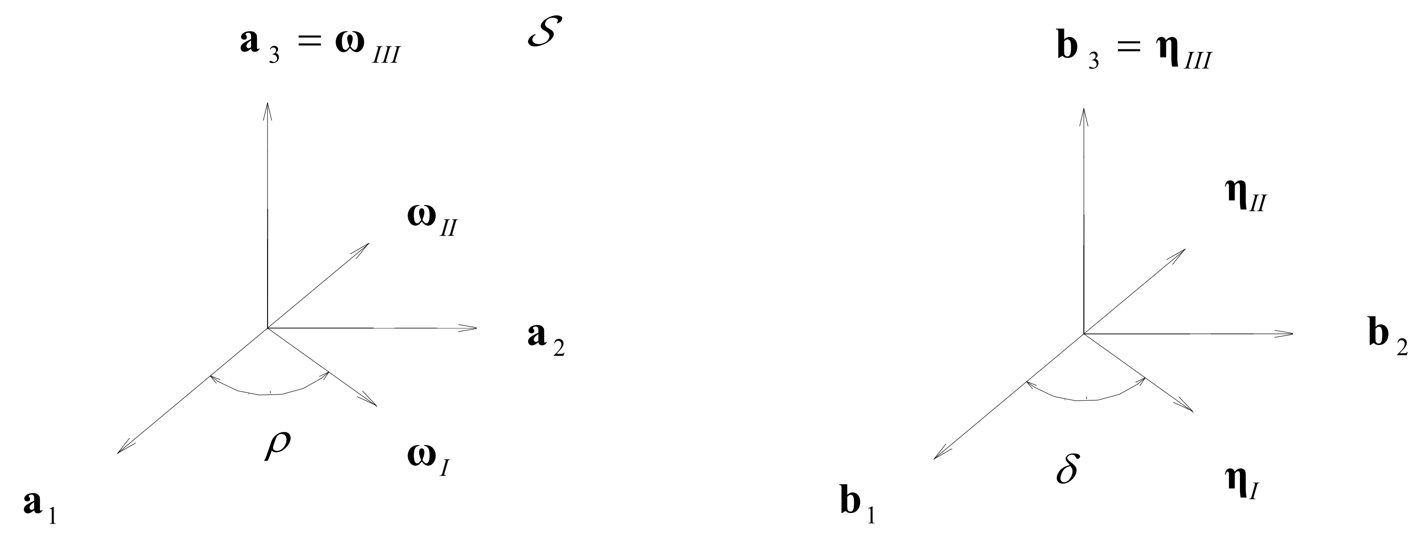
$$\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3, \rightarrow \boldsymbol{\omega}_I,\ \boldsymbol{\omega}_{II},\ \boldsymbol{\omega}_{III}, \qquad \mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3, \rightarrow \boldsymbol{\eta}_I,\ \boldsymbol{\eta}_{II},\ \boldsymbol{\eta}_{III},$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}_K$ i $\boldsymbol{\eta}_L$ są stanami własnymi tensorów $\mathbf{C}^p$ i $\mathbf{H}^p$.
Ich rozkłady spektralne mają postać:

$$\mathbf{C}^p = \frac{1}{\lambda_1}\boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \frac{1}{\lambda_2}\boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_{II} + \frac{1}{\lambda_3}\boldsymbol{\omega}_{III} \otimes \boldsymbol{\omega}_{III},$$

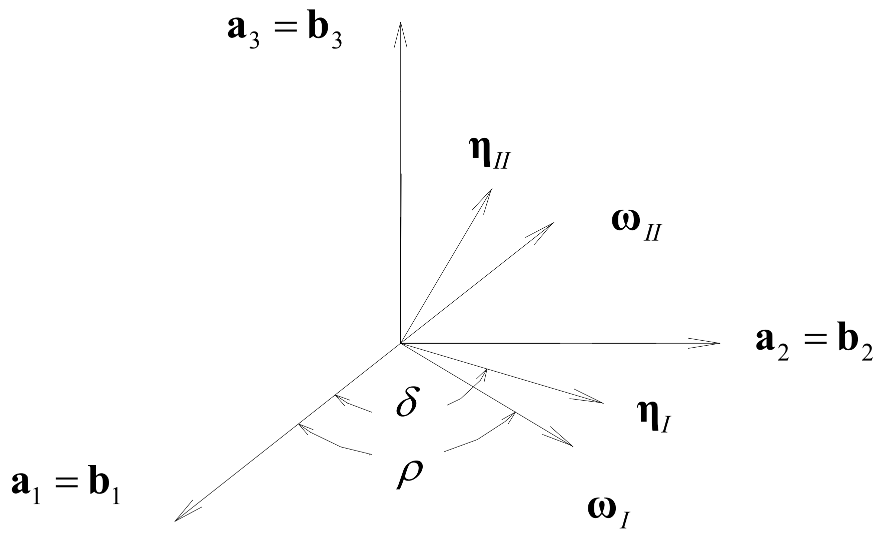
$$\mathbf{H}^p = \frac{1}{\chi_1^2}\boldsymbol{\eta}_I \otimes \boldsymbol{\eta}_I + \frac{1}{\chi_2^2}\boldsymbol{\eta}_{II} \otimes \boldsymbol{\eta}_{II} + \frac{1}{\chi_3^2}\boldsymbol{\eta}_{III} \otimes \boldsymbol{\eta}_{III}.$$

Stany własne $\mathbf{H}^p - \boldsymbol{\eta}_K$ rozłożono w bazie stanów własnych $\mathbf{C}^p - \boldsymbol{\omega}_K$



W pracy dyskutowane jest kryterium J. Rychlewskiego dla różnych symetrii

1). $\varphi = 0$ - przypadek, gdy osie symetrii w stanie sprężystym i granicznym pokrywają się ($\mathbf{e}_i = \mathbf{h}_i$)



2). $\rho = \dfrac{\pi}{4} \quad \varphi \neq 0$

3). $\delta = \dfrac{\pi}{4} \quad \varphi \neq 0$

4). $\rho = \delta \quad \varphi \neq 0$