

**PORÓWNANIE ENERGETYCZNYCH KRYTERIÓW WYTEŻENIA DLA
SPRZĘŻONYCH I ROZŁĄCZNYCH SPRĘŻYSTYCH STANÓW
WŁASNYCH NA PRZYKŁADZIE WYBRANYCH MATERIAŁÓW
ANIZOTROPOWYCH**

Wykorzystano wyniki badań dostępne w literaturze wraz z własnymi symulacjami numerycznymi procesów deformacji różnych struktur komórkowych do porównania dwóch energetycznych kryteriów wyteżenia. Zastosowano przy tym analityczne wyprowadzenia dla granicznych gęstości energii sprężystej podane w [1]. Pierwsze z kryteriów zaproponowane przez J. Rychlewskiego [2, 3] związane jest ze sprzężonymi sprężystymi stanami własnymi. Drugie natomiast podane w pracy [4] sformułowano dla rozłącznych sprężystych stanów własnych. Przedstawiono graficzne prezentacje powierzchni granicznych, które zostały otrzymane dla różnych struktur komórkowych z zastosowaniem obu kryteriów.

**COMPARISON OF ENERGY-BASED CRITERIA OF MATERIAL EFFORT
FOR COUPLED AND DISJOINT ELASTIC EIGEN STATES ON THE
EXAMPLE OF CERTAIN ANISOTROPIC MATERIALS**

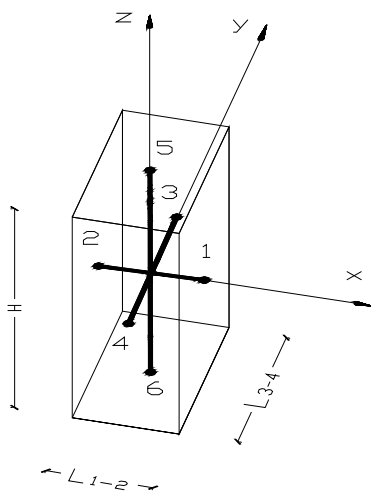
The experimental results available in the literature and own numerical simulations of deformation processes in cellular structures of different symmetry with use of the derivations of the limit energy densities given in [1] are applied to compare two energy-based criteria of material effort. The first one proposed by J. Rychlewski [2, 3] is related with the coupled elastic states. The second one introduced in [4] is formulated for disjoint elastic states. The limit surfaces for different cellular structures with the application of both criteria are presented.

* mgr inż. Piotr Kordzikowski, dr hab. inż. Ryszard B. Pęcherski prof. PK, Katedra Wytrzymałości Materiałów, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

Wstęp

Zaproponowane przez J. Rychlewskiego energetyczne kryterium stanu granicznego dla sprzężonych stanów własnych dało podstawę do stworzenia teorii wyężenia materiałów, które w ogólności wykazują anizotropię własności mechanicznych [2, 3, 5, 6]. Niezależnie sformułowano kryterium dla rozłącznych stanów własnych [4]. W kryteriach energetycznych należy określić graniczne energie dla poszczególnych sprzężystych stanów własnych, których w ogólności może być, co najwyżej sześć. Te graniczne energie można wyznaczyć doświadczalnie lub obliczyć. Propozycję obliczania granicznych energii podano w [7] i dyskutowano dokładniej w [8, 9]. Obliczenie granicznych energii dla modelu efektywnego, przy pomocy, którego można przewidywać sprzężyste zachowanie się materiału na podstawie teoretycznego opisu jego struktury dokładnie przedstawiono w pracach [1, 9-12].

Celem pracy jest porównanie energetycznych kryteriów wyężenia dla sprzężonych i rozłącznych stanów własnych na przykładzie wybranych materiałów anizotropowych z wykorzystaniem wyników badań doświadczalnych i symulacji numerycznej deformacji struktur komórkowych. Wyznaczone zostaną powierzchnie graniczne odpowiadające energetycznemu kryterium J. Rychlewskiego [2, 3] dla sprzężonych stanów własnych, na przykładzie struktur o powtarzającym się elemencie: prostopadłościanu (rys. 1), która w szczególnym wypadku odpowiada elementowi sześciennemu oraz pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego (rys. 2), która w szczególnym wypadku odpowiada pryzmie o podstawie trójkąta równobocznego. Podstawą analizy dla przyjętych struktur komórkowych o powtarzającym się regularnym układzie prętów połączonych w sztywnym węźle jest praca [4] w której wyznaczono powierzchnię graniczną dla sześciu rozłącznych stanów własnych materiału anizotropowego na przykładzie tektury. Nasunęło to możliwość porównania powierzchni granicznych odpowiadających energetycznemu kryterium J. Rychlewskiego [2, 3] dla sprzężonych stanów własnych oraz powierzchni odpowiadających kryterium dla rozłącznych stanów własnych [4], na przykładzie struktur komórkowych o powtarzającym się elemencie: prostopadłościanu i pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego.

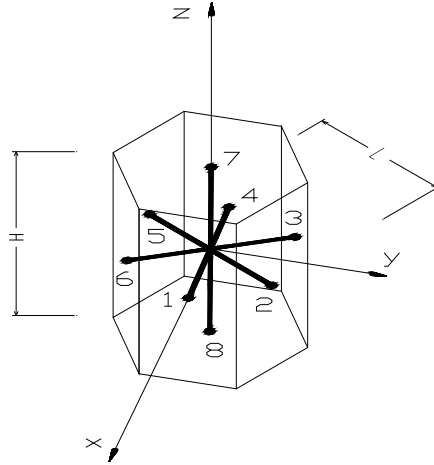


Rys. 1 Komórka prostopadłościenna

L_{1-2} , L_{3-4} , H - wymiary elementów belkowych (szkieletu)

S_{n1-2} , S_{n3-4} , S_{n5-6} - sztywności elementów belkowych na rozciąganie

$S_{\tau1-2}$, $S_{\tau3-4}$, $S_{\tau5-6}$ - sztywności elementów belkowych na zginanie



Rys. 2 Komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego

L, H - wymiary elementów belkowych (szkieletu)

S_{nL}, S_{nH} - sztywności elementów belkowych na rozciąganie

$S_{\tau L}, S_{\tau H}$ - sztywności elementów belkowych na zginanie

Kryteria energetyczne dla struktur komórkowych

J. Rychlewski, wprowadzając koncepcję sprężystych stanów własnych, energetycznie ortogonalnych oraz energetycznego iloczynu skalarnego [2, 3], udowodnił, że dla ciała liniowo-sprężystego o dowolnej anizotropii energię sprężystą można rozłożyć jednoznacznie, na co najwyżej sześć rozłącznych części. Kryterium J. Rychlewskiego będące kryterium dla sprzężonych stanów własnych można zapisać w postaci

$$\frac{\Phi(\sigma_1)}{\Phi_1^{gr}} + \dots + \frac{\Phi(\sigma_p)}{\Phi_p^{gr}} \leq 1, \quad p \leq 6 \quad (1)$$

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_p$ - rozkład tensora naprężenia na p stanów własnych

Φ_p^{gr} - graniczna wartość gęstości energii sprężystej w stanie własnym p

Natomiast sformułowane w pracy [4] kryterium dla rozłącznych stanów własnych przedstawia zależność

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_1) &\leq \Phi_1^{gr} \\ &\vdots \\ \Phi(\sigma_p) &\leq \Phi_p^{gr} \end{aligned} \quad p \leq 6 \quad (2)$$

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_p$ - rozkład tensora naprężenia na p stanów własnych

Φ_p^{gr} - graniczna wartość gęstości energii sprężystej w stanie własnym p

Graniczną wartość gęstości energii sprężystej Φ_p^{gr} należy wyznaczyć eksperymentalnie lub też, jak zaproponowano w [7, 8], obliczyć z teoretycznego modelu uwzględniającego strukturę materiału. Propozycję tę zastosowano w [9] w odniesieniu do pianek metalicznych oraz w pracach [1, 10] w

odniesieniu do materiałów komórkowych. Przez stan graniczny dla materiałów komórkowych, rozumiemy osiągnięcie granicy liniowej sprężystości.

Gęstości energii granicznych w kolejnych stanach własnych

Wartości granicznych energii sprężystych otrzymujemy w wyniku realizacji wspomnianych stanów własnych dla kolejnych struktur komórkowych. Dokładny sposób wyznaczenia tych zależności dla struktur o powtarzającym się elemencie: sześciianu, prostopadłościanu, pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego i sześciokąta foremnego podano w pracach [1, 10]. Poniżej przedstawione zostaną końcowe zależności analityczne wyrażające gęstość energii granicznych dla wybranych elementarnych komórek.

- Komórka prostopadłościenna (rys. 1)

$$\begin{aligned}
 2 \Phi_I^{gr} &= \frac{I}{\lambda_I} \left(\frac{A R_e}{L_{3-4} H} \right)^2 \\
 2 \Phi_{II}^{gr} &= \frac{I}{\lambda_{II}} \left(\frac{A R_e}{L_{1-2} H} \right)^2 \\
 2 \Phi_{III}^{gr} &= \frac{I}{\lambda_{III}} \left(\frac{A R_e}{L_{1-2} L_{3-4}} \right)^2 \\
 2 \Phi_{IV}^{gr} &= \frac{I}{\lambda_{IV}} 8 \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 H^2} \\
 2 \Phi_V^{gr} &= \frac{I}{\lambda_V} 8 \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 H^2} \\
 2 \Phi_{VI}^{gr} &= \frac{I}{\lambda_{VI}} 8 \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 H^2}
 \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie; R_e - granica plastyczności elementu belkowego, L_{i-j} , H - długość elementu belkowego, h - maksymalna odległość włókien górnych lub dolnych elementu belkowego, A - pole przekroju elementu belkowego, I - moment bezwładności elementu belkowego, λ_p - wartość własna tensora sztywności nazywana modułem Kelvina.

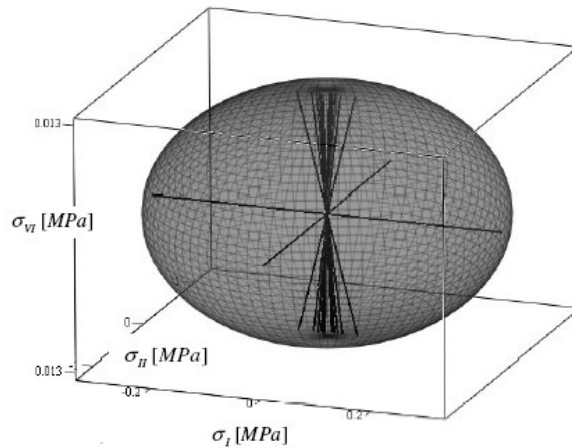
- Komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego (rys. 2)

$$\begin{aligned}
 2 \Phi_I^{gr} &= \frac{I}{\lambda_I} 6 \frac{A^2 R_e^2}{L^2 H^2} \\
 2 \Phi_{II}^{gr} &= \frac{I}{\lambda_{II}} \frac{4 A^2 R_e^2}{3 H^2 L^2} \\
 2 \Phi_{III}^{gr} &= \frac{I}{\lambda_{III}} 30 \frac{(s_{nL} + 2 s_{\tau L})^2 R_e^2 A^2 I^2}{H^2 L^2 (4 s_{nL} I + L s_{\tau L} h A)^2} \\
 2 \Phi_{IV}^{gr} &= \frac{I}{\lambda_{IV}} \frac{16}{3} \frac{I^2 R_e^2}{H^2 L^4 h^2}
 \end{aligned} \tag{4}$$

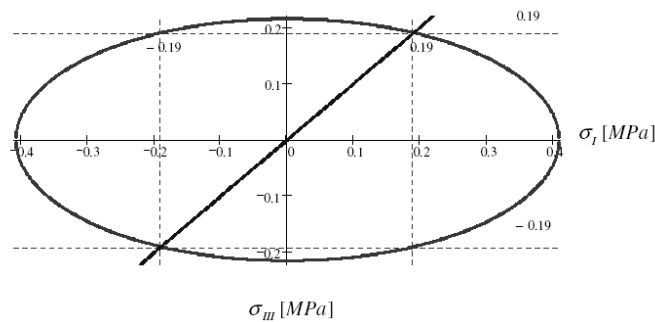
Powierzchnie graniczne dla sprzężonych stanów własnych [1]

Rozkład gęstości energii w poszczególnych stanach własnych przy jednoosiowym rozciąganiu wzdłuż kierunku „n” przedstawiono w przestrzeni stanów własnych dla płaskiego stanu naprężenia. Przyjęto materiał: stop Cu-1%Ni [13], $E_s = 117[GPa]$, $G_s = 45[GPa]$, $R_c = 112[MPa]$. Długość elementów belkowych dla struktury: $L = 10 \cdot srednica (\approx 200)[\mu m]$.

W płaskim stanie naprężenia energia sprężysta kumuluje się w trzech stanach własnych dla ortotropowej symetrii materiału o elementarnej komórce prostopadłościenniej {stan I, II, VI} (rys. 3). W tym przypadku energetyczne kryterium przedstawia elipsoida będąca powierzchnią graniczną, podobnie jest dla materiału o elementarnej komórce sześcienniej. Kierunki prostych zawartych wewnątrz elipsoidy odpowiadają poszczególnym kierunkom zadanego naprężenia. Wartość naprężenia dla danego kierunku utożsamiana jest z długością prostej dla danego kierunku. Dla materiału o elementarnej komórce w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego w płaskim stanie naprężenia energia sprężysta kumuluje się w dwóch stanach własnych {stan I, III} (rys. 4). W tym przypadku energetyczne kryterium przedstawia elipsa będąca krzywą graniczną, podobnie jest dla materiału o elementarnej komórce w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego. Wartość naprężenia dla każdego kierunku w płaszczyźnie podstawy jest tak sama i utożsamiana jest z długością prostej.



Rys. 3 Powierzchnia graniczna dla komórki prostopadłościenniej
($L_{1-2} = 1000 \mu m$, $L_{3-4} = 4000 \mu m$, $H = 1000 \mu m$, $d = 120 \mu m$)



Rys. 4 Powierzchnia graniczna dla komórki w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego
($L = 2000 \mu m$, $H = 2000 \mu m$, $d = 87 \mu m$)

**Powierzchnia graniczna dla sześciu rozłącznych stanów własnych materiału anizotropowego
na przykładzie tektury [4]**

Uwzględniając propozycję podaną w pracy [4]

$$2\lambda_A \Phi_T^{(A)} = (\sigma_T^{(A)})^2, \quad 2\lambda_A \Phi_C^{(A)} = (\sigma_C^{(A)})^2 \quad (5)$$

$$\begin{cases} (\sigma^{(A)} - \sigma_T^{(A)})(\sigma^{(A)} - \sigma_C^{(A)}) = 0 \\ (\sigma^{(P)} - \sigma_T^{(P)})(\sigma^{(P)} - \sigma_C^{(P)}) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

gdzie:

napężenie rozciągające $\sigma_T^{(A)} = \sigma_{\max}^{(A)}$,

napężenie ściskające $\sigma_C^{(A)} = \sigma_{\min}^{(A)}$,

$A = 1, \dots, K$ - kolejny stan własny,

λ_A - wartość własna tensora sztywności,

$\Phi_{T,C}^{(A)}$ - graniczna wartość gęstości energii sprężystej w stanie własnym A ,

napężenie główne rozciągające $\sigma_T^{(P)} = \sigma_{\max}^{(P)}$,

napężenie główne ściskające $\sigma_C^{(P)} = \sigma_{\min}^{(P)}$,

$P = 1, 2, 3$ - napężenia główne, $\sigma^{(I)} = T_1$, $\sigma^{(II)} = T_2$, $\sigma^{(III)} = T_3$

oraz przyjmując dane doświadczalne dla tektury o symetrii tetragonalnej za pracą [4]

$E_1 = 3510 \text{ MPa}$, $E_2 = 3510 \text{ MPa}$, $E_3 = 6930 \text{ MPa}$,

$\nu_{13} = 0.15$, $\nu_{23} = 0.15$, $\nu_{12} = 0.3$,

$G_{23} = 1700 \text{ MPa}$, $G_{13} = 1700 \text{ MPa}$, $G_{12} = 1500 \text{ MPa}$

tensor sztywności przyjmuje postać

$$S = \begin{bmatrix} 4220 & 1520 & 1700 & 0 & 0 & 0 \\ 1520 & 4220 & 1700 & 0 & 0 & 0 \\ 1700 & 1700 & 7940 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1700 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1500 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

dla którego wartości własne są równe

$$\lambda = \begin{bmatrix} 9480 \\ 4200 \\ 2700 \\ 1700 \\ 1700 \\ 1500 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

którym odpowiadają następujące wektory własne

$$N1 = \begin{bmatrix} 0.382 \\ 0.382 \\ 0.841 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N2 = \begin{bmatrix} -0.594 \\ -0.594 \\ 0.54 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N3 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N4, N5, N6 \text{ pominięto.}$$

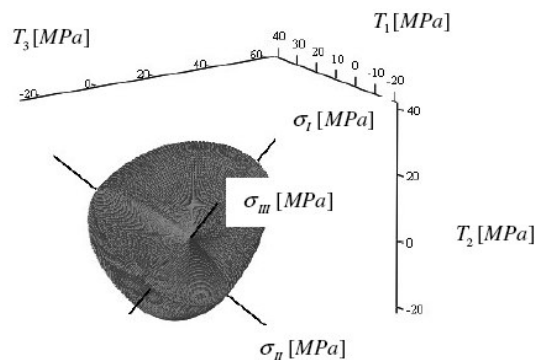
Powierzchnie graniczne dla poszczególnych stanów własnych opisują zależności

$$\begin{aligned}
 (0.382T_1 + 0.382T_2 + 0.841T_3 - 47.1)(0.382T_1 + 0.382T_2 + 0.841T_3 + 16.8) &= 0 \\
 (0.595T_1 + 0.595T_2 - 0.54T_3 - 18.1)(0.595T_1 + 0.595T_2 - 0.54T_3 + 30.3) &= 0 \\
 (0.707T_1 - 0.707T_2 - 21.6)(0.707T_1 - 0.707T_2 + 9.19) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

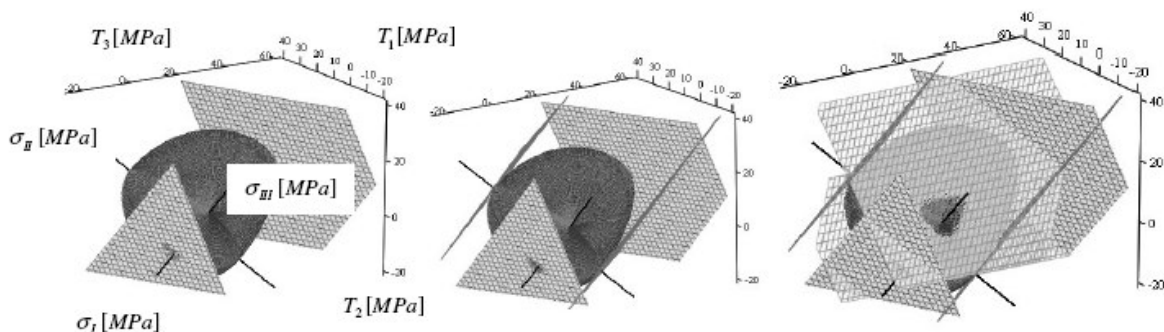
Uwzględniając dane doświadczalne otrzymujemy powierzchnię graniczną (rys. 8), powstałą w wyniku złożenia powierzchni granicznych na podstawie kryteriów:

1. Granicznych energii w sprzężonych stanach własnych (powierzchnia w przestrzeni stanów własnych) (rys. 5). Powierzchnia powstaje w wyniku wyspecyfikowania energetycznego kryterium J. Rychlewskiego dla materiału o różnej wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie
2. Granicznych energii dla poszczególnych stanów własnych (powierzchnia w przestrzeni stanów własnych) (rys. 6)
3. Granicznych naprężeń głównych (powierzchnia w przestrzeni naprężeń głównych) (rys. 7)

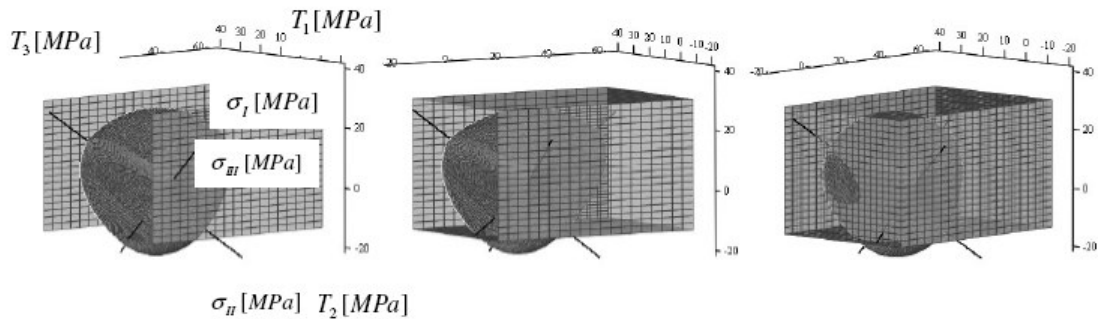
$$T_{1r} = 36 \text{ MPa}, \quad T_{1s} = 18 \text{ MPa}, \quad T_{2r} = 30.5 \text{ MPa}, \quad T_{2s} = 13 \text{ MPa}, \quad T_{3r} = 56 \text{ MPa}, \\
 T_{3s} = 20 \text{ MPa}$$



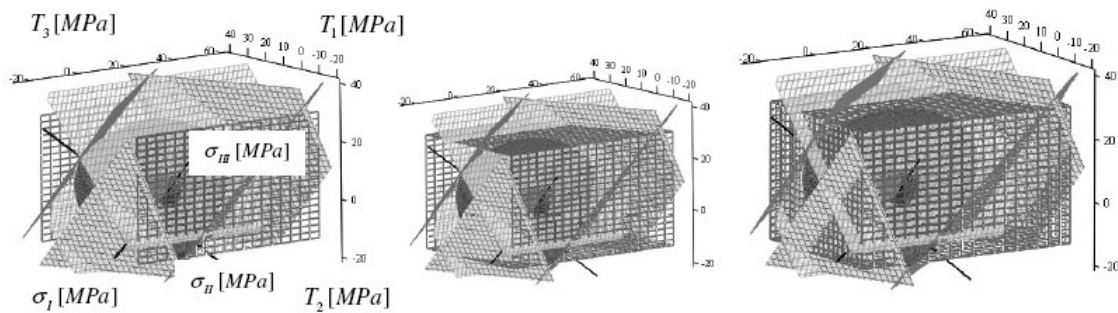
Rys. 5 Powierzchnia graniczna dla sprzężonych stanów własnych



Rys. 6 Powierzchnia graniczna dla poszczególnych stanów własnych



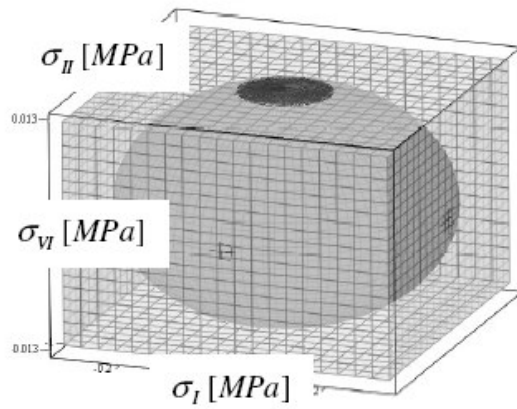
Rys. 7 Powierzchnia graniczna dla naprężeń głównych



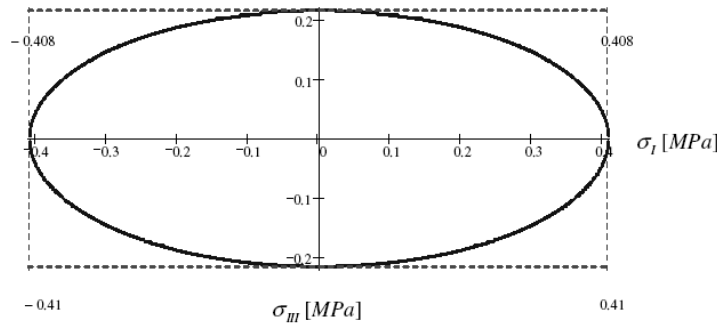
Rys. 8 Powierzchnia graniczna powstała w wyniku złożenia powierzchni pokazanych na rysunkach 5-7

Porównanie powierzchni granicznych

Porównanie powierzchni granicznych dla sprzężonych stanów własnych oraz dla rozłącznych stanów własnych możliwe jest w przestrzeni stanów własnych uwzględniając płaski stan naprężenia. W przestrzeni stanów własnych energetyczne kryterium J. Rychlewskiego można przedstawić w postaci elipsoidy będącej powierzchnią graniczną dla materiału o elementarnej komórce prostopadłościennej oraz sześciiennej. Natomiast energetyczne kryterium dla rozłącznych stanów własnych można przedstawić w postaci powierzchni płaskich odpowiadających kolejnym wartościom energii granicznych (rys. 9). W przypadku materiału o elementarnej komórce w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego oraz trójkąta równobocznego energetyczne kryterium J. Rychlewskiego w płaskim stanie naprężenia można przedstawić w postaci elipsy a energetyczne kryterium dla rozłącznych stanów własnych można przedstawić w postaci prostych odpowiadających kolejnym wartościom energii granicznych (rys. 10).



Rys. 9 Porównanie powierzchni granicznych w przestrzeni stanów własnych dla komórki prostopadłościowej



Rys. 10 Porównanie powierzchni granicznych w przestrzeni stanów własnych dla komórki w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego

Numeryczna analiza deformacji struktur komórkowych

W celu weryfikacji otrzymanych teoretycznych wartości naprężeń granicznych dla omawianych elementarnych komórek została przeprowadzona w programie Robot Millennium v. 17.0 numeryczna analiza deformacji struktur komórkowych. Rozważania zostały przeprowadzone realizując płaski stan naprężenia poprzez rozciąganie osiowe w płaszczyźnie podstawy elementarnej komórki. Ponieważ wzory analityczne naprężeń granicznych są uniwersalne jako materiał rodzimy przyjęto stal.

Dla komórki prostopadłościowej (rys. 1) wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) przedstawia zależność:

$$\begin{aligned} \sigma^{gr} = & \pm [2(4L_{3-4}^2 I^2 - 8L_{3-4}^2 I^2 \sin^2 \alpha + 4L_{3-4}^2 I^2 \sin^4 \alpha + 4\sin^4 \alpha L_{1-2}^2 I^2 + \\ & + \sin^2 \alpha h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2 - \sin^4 \alpha h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2)^{1/2} R_e I \frac{A}{R_e}] / [-4L_{3-4}^2 I^2 + \\ & - 8L_{3-4}^2 I^2 \sin^2 \alpha - 4L_{3-4}^2 I^2 \sin^4 \alpha - 4\sin^4 \alpha L_{1-2}^2 I^2 - \sin^2 \alpha h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2 + \\ & + \sin^4 \alpha h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 A^2] \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie α jest dowolnym kierunkiem obciążenia.

Przyjmując σ^{gr} i $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (rozciągnięcie wzdłuż osi y) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) w żadnym przecię struktury nie jest przekroczona granica plastyczności R_e elementu belkowego, dla stali $E = 205GPa$, $G = 80.8GPa$, $R_e = 215MPa$, $\sigma^{z \text{ programu Robot}} = 210.83MPa$. Błąd rozwiązania jest równy 1.9 %.

Podobną zależność wyrażającą wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) wyprowadzono dla komórki sześcienniej:

$$\sigma^{gr} = \pm \frac{3R_e \frac{IA}{L^2}}{\sqrt{10I^2 + 27I^2 \sin^4 \alpha + 3 \sin^2 \alpha h^2 L^2 A^2 - 3 \sin^4 \alpha h^2 L^2 A^2 - 27I^2 \sin^2 \alpha}} \quad (9)$$

gdzie α jest dowolnym kierunkiem obciążenia.

Przyjmując σ^{gr} i $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (rozciągnięcie wzdłuż osi y) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) w żadnym przecię struktury nie jest przekroczona granica plastyczności R_e elementu belkowego, dla stali $E = 205GPa$, $G = 80.8GPa$, $R_e = 215MPa$, $\sigma^{z \text{ programu Robot}} = 201MPa$. Błąd rozwiązania jest równy 6.9 %.

Dla komórki w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego (rys. 2) wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) przedstawia zależność:

$$\sigma^{gr} = \frac{2\sqrt{(\lambda_{III} \Phi_{III}^{gr} + \lambda_I \Phi_I^{gr}) \lambda_{III} \Phi_{III}^{gr} \lambda_I \Phi_I^{gr}}}{\lambda_{III} \Phi_{III}^{gr} + \lambda_I \Phi_I^{gr}} \quad (10)$$

Przyjmując σ^{gr} (rozciągnięcie wzdłuż osi y) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) naprężenia w prętach struktury są w przybliżeniu równe granicy plastyczności R_e elementu belkowego, dla stali $E = 205GPa$, $G = 80.8GPa$, $R_e = 215MPa$, $\sigma^{z \text{ programu Robot}} = 230.90MPa$. Błąd rozwiązania jest równy 7.3 % na niekorzyść materiału.

Podobnie dla komórki w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego wartość naprężenia granicznego w płaszczyźnie podstawy (x,y) przedstawia zależność:

$$\sigma^{gr} = \pm [2((35067I^2 - 72L^2 h^2 A^2 \sqrt{3} + 981L^2 h^2 A^2 + 576LIhA\sqrt{3} + 7848LIhA)(6457 - 384\sqrt{3}))^{1/2} IA \frac{R_e}{LH}] / [35067I^2 + 72L^2 h^2 A^2 \sqrt{3} + 981L^2 h^2 A^2 + 576LIhA\sqrt{3} + 7848LIhA] \quad (11)$$

Przyjmując σ^{gr} (rozciągnięcie wzdłuż osi x) dla dowolnego materiału (wzór jest uniwersalny) w żadnym przecię struktury nie jest przekroczona granica plastyczności R_e elementu belkowego,

dla stali $E = 205GPa$, $G = 80.8GPa$, $R_e = 215MPa$, $\sigma^{z \text{ programu Robot}} = 191.11MPa$.

Błąd rozwiązania jest równy 2 %.

Podsumowanie

W celu określenia, które z dwóch omawianych energetycznych kryteriów daje poprawne rozwiązanie, przeprowadzono test numeryczny polegający na zadaniu jednoosiowego obciążenia pod kątem od 0^0 do 90^0 w płaszczyźnie podstawy elementarnej komórki.

Analizując powierzchnie graniczne odpowiadające omawianym kryteriom energetycznym widać, że są one zbieżne w kolejnych stanach własnych. Ze wstępnie wykonanych obliczeń dla materiału o elementarnej komórce sześcienniej można zauważyć, że dla zadanego obciążenia pod kątem od 0° do 90° w płaszczyźnie podstawy tej komórki kryteria te dają podobne rozwiązania. Przyjmując we wzorze (9) kąt $\alpha = \frac{\pi}{4}$ oraz stal o parametrach $E = 205GPa$, $G = 80.8GPa$, $R_e = 215MPa$, jako materiał elementu belkowego wartość naprężenia w materiale komórkowym uwzględniając kryterium J. Rychlewskiego jest równa $\sigma^{z \text{ programu Robot}} = 192.05 MPa$, natomiast wartość naprężenia w materiale komórkowym uwzględniając kryterium dla rozłącznych stanów własnych jest równa $\sigma^{z \text{ programu Robot}} = 192.76 MPa$.

Większe różnice wystąpią w złożonych stanach naprężenia, dla których należy wykonać odpowiednie obliczenia numeryczne.

Literatura

1. Kordzikowski P., Janus-Michalska M., Pęcherski R. B.: Specification of energy-based criterion of elastic limit states for cellular materials, Archives of Metallurgy and Materials, praca w druku 3/05.
2. Rychlewski J.: Elastic energy decomposition and limit criteria, Uspekhi Mekh. -Advances in Mech., 1984, t. 7, s. 51÷80 (po rosyjsku).
3. Rychlewski J.: Unconventional approach to linear elasticity, Arch. Mech., 1995, t. 47, s. 149÷171.
4. Arramon Y. A., Mehrabadi M. M., Martin D. W., Cowin S. C.: A multidimensional anisotropic strength criterion based on Kelvin modes, International Journal of Solids and Structures, 2000, t. 37, s. 2915-2935.
5. Kowalczyk K., Ostrowska-Maciejewska J., Pęcherski R.B.: An-energy based yield criterion for solids of cubic elasticity and orthotropic limit state, Arch. Mech., 2003, t. 55, 2003, s. 431÷448.
6. Kowalczyk-Gajewska K, Ostrowska-Maciejewska J.: Energy-based limit criteria for anisotropic elastic materials with constraints, Arch. Mech., 2005, t. 57.
7. Nalepka K., Pęcherski R. B.: Fizyczne podstawy energetycznego kryterium wyężenia monokryształów, s. 311÷316, XXX Szkoła Inżynierii Materiałowej, Kraków-Ustroń-Jaszowiec, 1-4, X 2002, (ed. J. Pacyno), AGH, Kraków, 2002.
8. Nalepka K., Pęcherski R. B.: Energetyczne kryteria wyężenia. Propozycja obliczania granicznych energii z pierwszych zasad, Rudy Metale, 2003, r. 48, 533÷536.
9. Janus-Michalska M., Pęcherski R.B.: Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling, Technische Mechanik, 2003, t. 23, s. 234-244.
10. Kordzikowski P., Janus-Michalska M., Pęcherski R. B.: Analiza wpływu wytrzymałości prętów sześcienniej struktury komórkowej na rozkład granicznych energii, Rudy i Metale Nieżelazne, 2004, R 49, Nr 3, s. 114-120.
11. Janus-Michalska M., Kordzikowski P., Pęcherski R. B.: Energy-based approach to limit state criteria of cellular materials, International Symposium on Developments in Plasticity and Fracture-Centenary of M. T. Huber Criterion, 12-14 August 2004, Kraków – poster prezentowany na wyżej wymienionej konferencji – praca w przygotowaniu do publikacji.
12. Janus-Michalska M.: Effective models describing elastic behaviour of cellular materials, Archives of Metallurgy and Materials, praca w druku 3/05.
13. Wang A. J., McDowell D. L.: Yield surfaces of various periodic metal honeycombs at intermediate relative density, International Journal of Plasticity, 2005, t. 21, s. 285-320.