

<http://www.prz.edu.pl/pl/wbmiil/files/konferencje/omis2007/index.html>

SPECYFIKACJA ENERGETYCZNEGO WARUNKU RYCHLEWSKIEGO DLA ANIZOTROPOWYCH CIENKICH WARSTW

Piotr Kordzikowski

Politechnika Krakowska
Wydział Inżynierii Lądowej
Instytut Mechaniki Budowli
KATEDRA WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Kraków – 2007

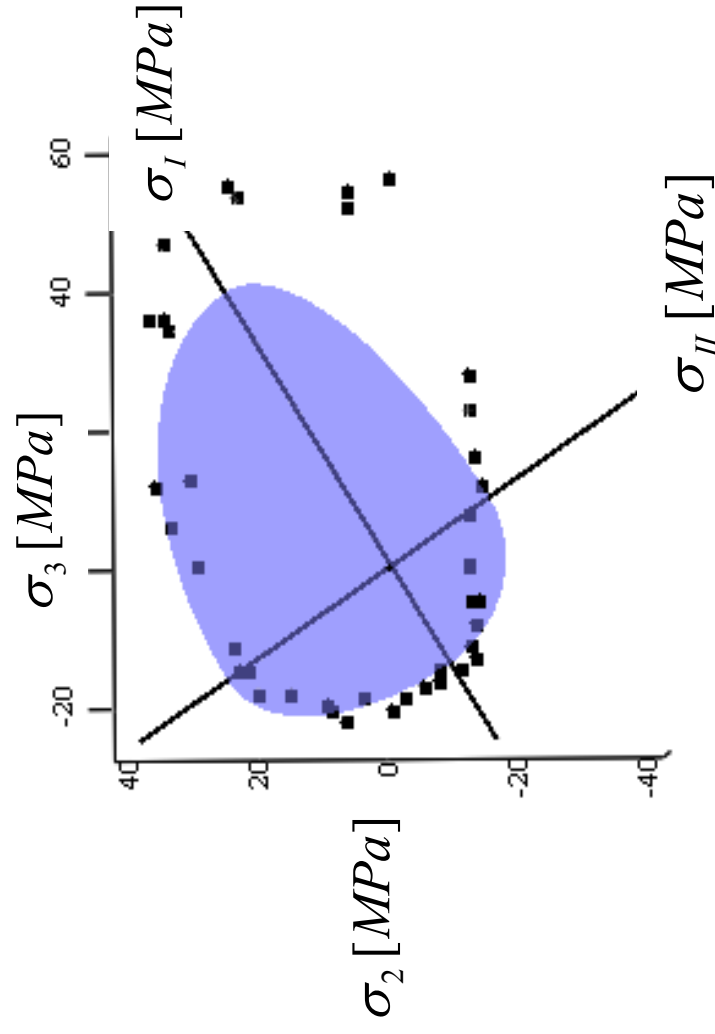
prof. zw. dr hab., czł. koresp. PAN Jan Rychlewski

„Dodatek do recenzji pracy doktorskiej dla wiadomości i dalszych rozmyślań autora”

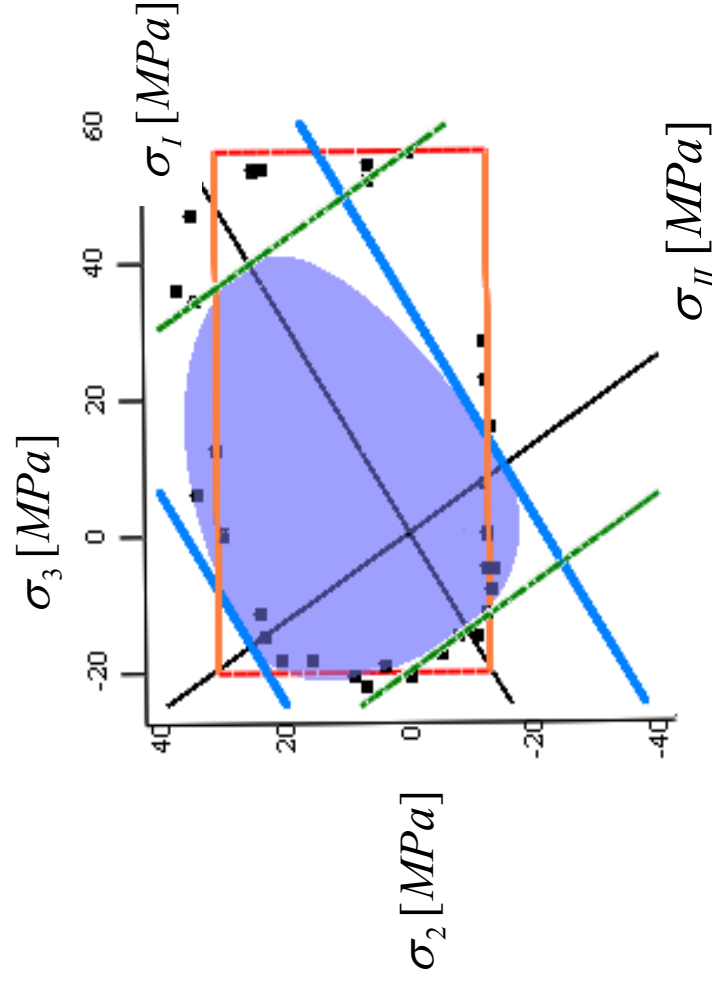
...w ogólności w moich rozmyślaniach występowały dwa tensory, teoretycznie całkowicie od siebie niezależne: **H** opisujący geometryczny rozkład i wielkości graniczne wyteżenia ciała i tensor podatności **C** opisujący całość gromadzonej w nim energii sprężystej...

...w przyrodzie...mogą istnieć...materiały...dalekie w budowie od budowy materiałów komórkowych, w których tensor graniczny **H** nie jest dyktowany...przez rozkład podatności **C**...

...czy nie budzi to całkiem nowych myśli w materiałach, w których podatność sprężysta oraz rozkład i wielkości graniczne gromadzonej pod obciążeniem energii sprężystej mogą okazać się mocno rozprężone?...



Porównanie obliczeń analitycznych z danymi z eksperymentu na przykładzie tektury J. C. Suhling et al. [1985] i M. W. Biegler et al. [1995]



Porównanie obliczeń analitycznych z danymi z eksperymentu na przykładzie tektury

ZASTOSOWANIE ENERGETYCZNEGO KRYTERIUM RYCHLEWSKIEGO DO OCENY WYTYŻENIA ANIZOTROPOWYCH CIENKICH WARSTW WYKAZUJĄCYCH EFEKT RÓŻNICY WYTRZYMAŁOŚCI

CEL PRACY

Celem pracy jest zastosowanie energetycznego kryterium J. Rychlewskiego [1984, 1985], służącego do określenia sprężystych stanów granicznych, do oceny wytyżenia w anizotropowych cienkich warstwach (na przykładzie metali amorficznych oraz kartonu).

Wspólną cechą wymienionych materiałów są różne własności wytrzymałościowe, tzw. efekt różnicy wytrzymałości, a w konsekwencji asymetria zakresu sprężystego, w zależności od sposobu obciążenia wywołującego dany stan naprężenia w ciele.

**) w procesie zastygania – zwłaszcza, gdy ten przebiega gwałtownie lub zachodzi w odpowiednio dobranych stopach – atomy nie zdążą utworzyć sieci krystalicznych, atomowy chaos zostaje utrwalony*

ANALIZA WARUNKÓW WYTEŻENIA DLA CIENKICH WARSTW*

Ogólne twierdzenie Rychlewskiego

Dla materiału deformującego się w zakresie sprężystym J. Rychlewski [1984], sformułował i udowodnił twierdzenie, nazywane ogólnym twierdzeniem Rychlewskiego:

$$\sigma \cdot \mathbf{H} \cdot \sigma = \frac{1}{h_1} \phi(\sigma_1) + \dots + \frac{1}{h_k} \phi(\sigma_k) \leq 1$$

gdzie:

$$\phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2) + \dots + \phi(\sigma_k) = \phi(\sigma)$$

$$\phi(\sigma_k) = \frac{1}{2} \sigma_k \cdot \mathbf{C} \cdot \sigma_k = \frac{1}{2} \sigma_k \cdot \sigma_k, \quad (\text{bez sumowania})$$

h_k - wagi energii sprężystej nazywane modułami Rychlewskiego

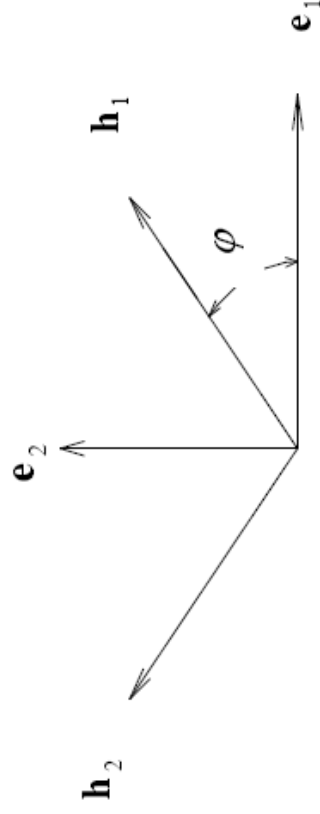
K. Kowalczyk, J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski [2003].

*¹) zakładamy, że grubość warstwy w porównaniu z dwoma pozostałymi wymiarami jest na tyle mała, aby można było rozważać płaskie stany naprężenia

Energetyczne kryterium Rychlewskiego dla płaskich stanów

Twierdzenie dotyczące energetycznej interpretacji warunku granicznego jest sformułowane dla dowolnych tensorów \mathbf{S} , \mathbf{C} i \mathbf{H} . Daje to możliwość rozpatrywania różnych typów symetrii materiału w stanie sprężystym i w stanie granicznym.

W stanie sprężystym osiami symetrii są kierunki \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 na płaszczyźnie fizycznej, zaś w stanie granicznym osiami symetrii są kierunki \mathbf{h}_1 i \mathbf{h}_2 obrócone względem \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 o kąt φ : $\mathbf{h}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$, $\mathbf{h}_2 = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2$.



Rozkłady spektralne tensorów \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p mają postać:

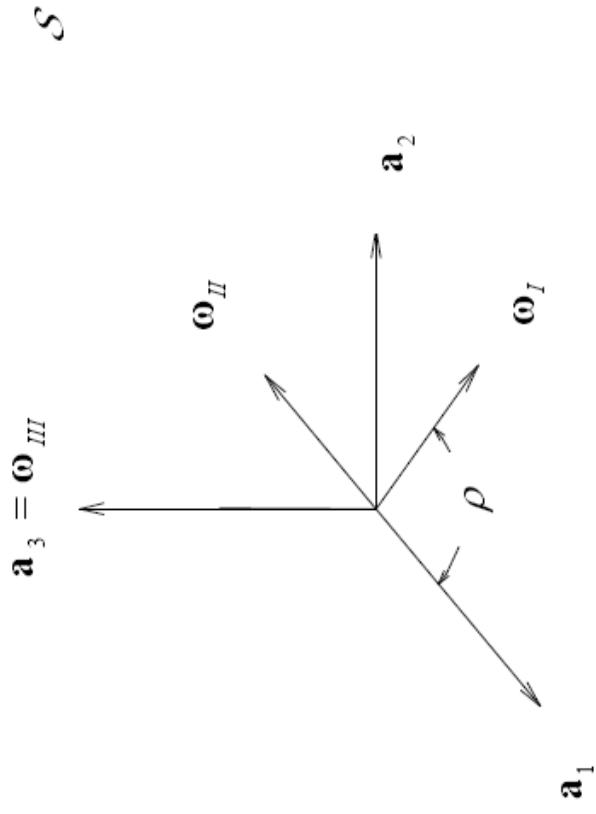
$$\mathbf{C}^p = \frac{1}{\lambda_1} \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \frac{1}{\lambda_2} \boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_{II} + \frac{1}{\lambda_3} \boldsymbol{\omega}_{III} \otimes \boldsymbol{\omega}_{III},$$

$$\mathbf{H}^p = \frac{1}{\chi_1^2} \boldsymbol{\eta}_I \otimes \boldsymbol{\eta}_I + \frac{1}{\chi_2^2} \boldsymbol{\eta}_{II} \otimes \boldsymbol{\eta}_{II} + \frac{1}{\chi_3^2} \boldsymbol{\eta}_{III} \otimes \boldsymbol{\eta}_{III},$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}_K$ i $\boldsymbol{\eta}_L$ są stanami własnymi tensorów \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p .

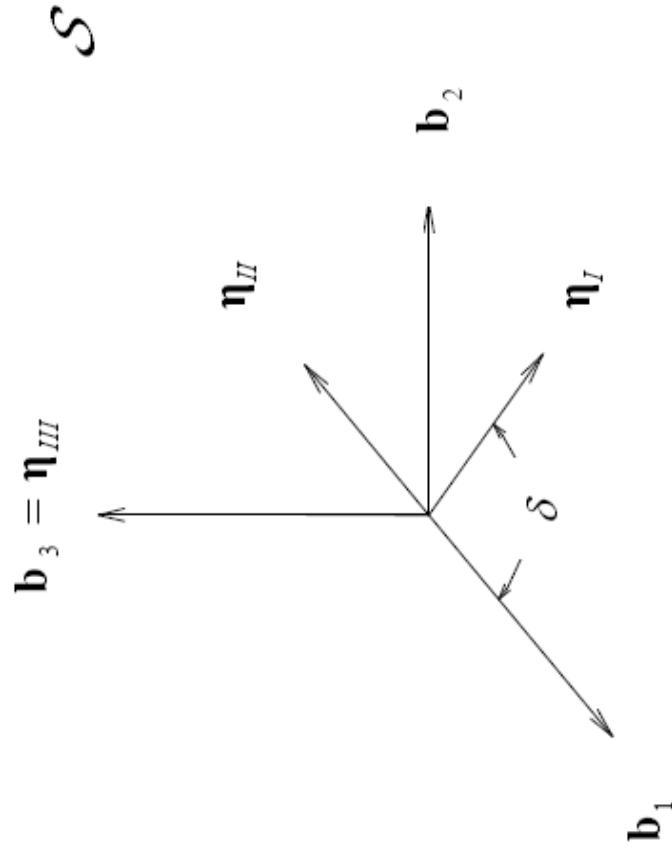
W zakresie sprężystym osie symetrii materiału pokrywają się z kierunkami \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 , bazę w przestrzeni naprężeń \mathcal{S} stanowią diady $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$,

$$\mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1).$$



W stanie granicznym osiami symetrii materiału są osie \mathbf{h}_1 i \mathbf{h}_2 na płaszczyźnie fizycznej ε_2 , w przestrzeni \mathcal{S} bazę będą stanowiły diady $\mathbf{b}_1 = \mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}_2$,

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}_1).$$



Ostatecznie rozkład stanów własnych tensora \mathbf{H}^p w bazie stanów własnych \mathbf{C}^p ma postać (J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski [2006]):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_I &= [\cos(\delta - \rho) - \sin(\delta - \frac{\pi}{4}) \sin(\rho - \frac{\pi}{4}) (1 - \cos 2\varphi)] \boldsymbol{\omega}_I + \\ &+ [\sin(\delta - \rho) - \sin(\delta - \frac{\pi}{4}) \cos(\rho - \frac{\pi}{4}) (1 - \cos 2\varphi)] \boldsymbol{\omega}_{II} + \\ &\quad - [\sin(\delta - \frac{\pi}{2}) \sin 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III}], \\ \boldsymbol{\eta}_{II} &= [-\sin(\delta - \rho) - \cos(\delta - \frac{\pi}{4}) \sin(\rho - \frac{\pi}{4}) (1 - \cos 2\varphi)] \boldsymbol{\omega}_I + \\ &+ [\cos(\rho - \delta) - \cos(\delta - \frac{\pi}{4}) \cos(\rho - \frac{\pi}{4}) (1 - \cos 2\varphi)] \boldsymbol{\omega}_{II} + \\ &\quad - [\cos(\delta - \frac{\pi}{2}) \sin 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III}], \\ \boldsymbol{\eta}_{III} &= \sin 2\varphi [\sin(\rho - \frac{\pi}{4}) \boldsymbol{\omega}_I + \cos(\rho - \frac{\pi}{4}) \boldsymbol{\omega}_{II}] + \cos 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III}, \end{aligned}$$

gdzie ρ , δ dystrybutory sztywności tensora \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p .

SCHEMAT POSTĘPOWANIA PRZY WYZNACZANIU ASYMETRYCZNEGO ENERGETYCZNEGO WARUNKU WYTEŻENIA

Idea specyfikacji polega na wykorzystaniu badań doświadczalnych uzyskanych z testów w jednoosiowych stanach naprężenia. W celu wyznaczenia asymetrycznej powierzchni granicznej dla tej samej symetrii materiału w stanie sprężystym i w stanie granicznym (tensor podatności \mathbf{C} (lub sztywności \mathbf{S}) jest równoległy do tensora granicznego \mathbf{H}), należy przeprowadzić następujące postępowanie.

1. Wyznaczyć tensor podatności **C** (lub sztywności **S**).
2. Wyznaczyć wartości własne (λ) i osie własne (ω) tensora podatności **C** (lub sztywności **S**).
3. Wyznaczyć macierz transformacji z układu osi głównych (osi w których został wykonany eksperyment) do układu osi własnych tensora podatności **C** (lub sztywności **S**).
4. Transformować wartości naprężeń z eksperymentu wyznaczone w **osiach głównych** ($\sigma_{gr,r}^1$ - naprężenie graniczne dla rozciągania względem pierwszej osi, $\sigma_{gr,r}^2$ - naprężenie graniczne dla rozciągania względem drugiej osi, $\sigma_{gr,s}^1$ - naprężenie graniczne dla ściskania względem pierwszej osi, $\sigma_{gr,s}^2$ - naprężenie graniczne dla ściskania względem drugiej osi) do **układu osi własnych** ($\sigma_{gr,r}^I$ - naprężenie graniczne w I stanie własnym dla rozciągania, $\sigma_{gr,r}^{II}$ - naprężenie graniczne w II stanie własnym dla rozciągania, $\sigma_{gr,s}^I$ - naprężenie graniczne w I stanie własnym dla ściskania, $\sigma_{gr,s}^{II}$ - naprężenie graniczne w II stanie własnym dla ściskania).

5. Podstawić wartości graniczne $\sigma_{gr,r}^I$, $\sigma_{gr,r}^{II}$, $\sigma_{gr,s}^I$, $\sigma_{gr,s}^{II}$ do kryterium

J. Rychlewskiego w kolejnych ćwiartkach układu osi własnych

$$\frac{\Phi(\sigma_r^I)}{\Phi(\sigma_{gr,r}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_r^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{II})} \leq 1 \text{ w ćwiartce pierwszej,}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_s^I)}{\Phi(\sigma_{gr,s}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_r^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{II})} \leq 1 \text{ w ćwiartce drugiej,}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_s^I)}{\Phi(\sigma_{gr,s}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_s^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{II})} \leq 1 \text{ w ćwiartce trzeciej,}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_r^I)}{\Phi(\sigma_{gr,r}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_s^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{II})} \leq 1 \text{ w ćwiartce czwartej,}$$

gdzie

$$\sigma = \sigma_{r,s}^I + \sigma_{r,s}^{II}$$

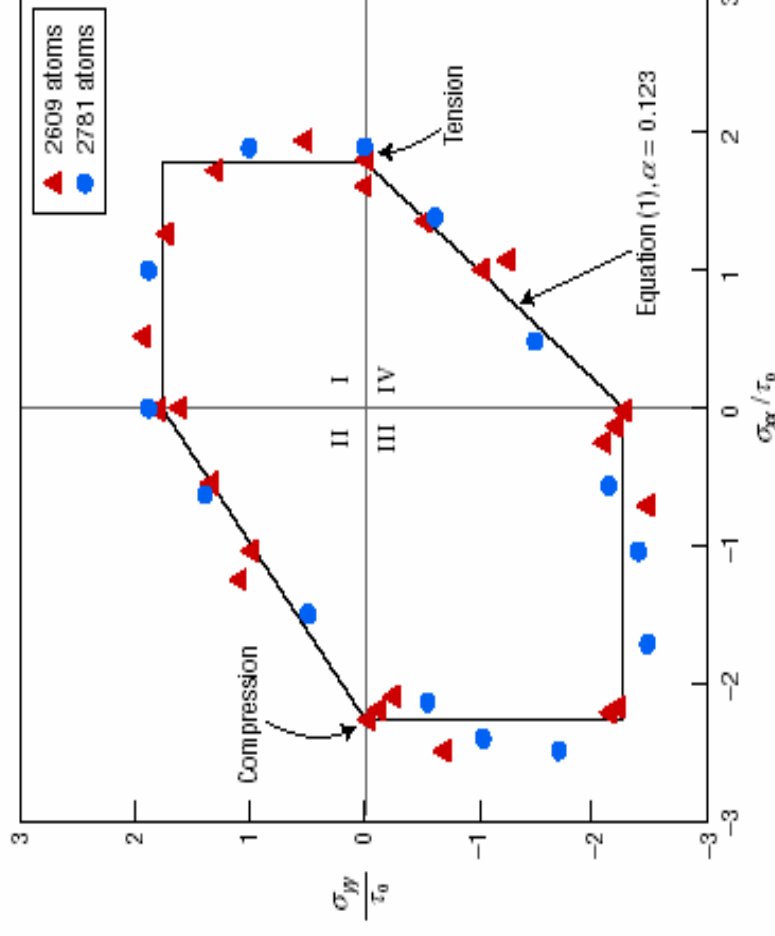
$$\Phi(\sigma_{r,s}^{I,II})$$

rozkład tensora naprężenia na stany własne,

graniczna wartość gęstości energii sprężystej w kolejnym stanie własnym.

SPECYFIKACJA ASYMETRYCZNEGO WARUNKU ENERGETYCZNEGO DLA AMORFICZNEGO METALU: Pd₄₀Ni₄₀P₂₀

Specyfikacja asymetrycznego warunku energetycznego została wykonana w oparciu o obliczenia atomowe podane w pracach: C. A. Schuh, A. C Lund [2003], A. C. Lund, C. A. Schuh [2005], kryterium Coulomba-Mohra:



Płaską macierz sztywności oraz odpowiadające jej wartości własne i stany własne przedstawiają następujące zależności:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 539800 & 159800 & 0 \\ 159800 & 539800 & 0 \\ 0 & 0 & 380000 \end{bmatrix} \text{MPa}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 699500 \\ 380000 \\ 380000 \end{bmatrix} \text{MPa}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z zależności tych wynika, że materiał jest izotropowy, ponieważ w stanie sprężystym mamy dwa moduły Kelvina (λ), brak dystrybutorów (ρ) oraz brak kątów Eulera.

Wartości naprężeń głównych z eksperymentu w układzie osi głównych wynoszą:

$$\text{na rozciąganie: } \mathbf{T}_{\sigma,r} = \begin{bmatrix} 3000 & 0 \\ 0 & 3000 \end{bmatrix} \text{MPa}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{na ściskanie: } \mathbf{T}_{\sigma,s} = \begin{bmatrix} -3600 & 0 \\ 0 & -3600 \end{bmatrix} \text{MPa}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Następnie wyznaczono wartości naprężeń granicznych, które uzyskano po transformacji z układu osi głównych do układu osi własnych w kolejnych stanach własnych według następującej analizy:

I stan własny – rozciąganie

Dokonując transformacji naprężeń granicznych z układu osi głównych do układu osi własnych

$$\begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3000 & 0 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2998 & 0 & 0 \\ 0 & 2998 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa,$$

a następnie projekcji stanu naprężenia na I stan własny

$$\begin{bmatrix} 2998 & 2998 & \sqrt{2}(0) \\ 2998 & 2998 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{bmatrix} 0.707^2 & 0.707 \cdot 0.707 & 0 \\ 0.707^2 & 0.707 \cdot 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2998 & 2998 & 0 \\ 2998 & 2998 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa,$$

otrzymujemy naprężenie graniczne w I stanie własnym dla rozciągania:

$$\sigma_{gr,r}^I = \sqrt{(2998)^2 + (2998)^2 + (0)^2} MPa, \quad \sigma_{gr,r}^I = (+)4240 MPa,$$

gdzie: (+) oznacza rozciąganie.

I stan własny – ściskanie

Dokonując transformacji naprężeń granicznych z układu osi głównych do układu osi własnych

$$\begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3600 & 0 & 0 \\ 0 & -3600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3599 & 0 & 0 \\ 0 & -3599 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa,$$

a następnie projekcji stanu naprężenia na I stan własny

$$\begin{bmatrix} -3599 & -3599 & \sqrt{2}(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{bmatrix} 0.707^2 & 0.707 \cdot 0.707 & 0 \\ 0.707 \cdot 0.707 & 0.707^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3598 & -3598 & 0 \\ -3598 & -3598 & 0 \end{bmatrix} MPa,$$

otrzymujemy naprężenie graniczne w I stanie własnym dla ściskania:

$$\sigma_{gr,s}^I = \sqrt{(-3598)^2 + (-3598)^2 + (0)^2} MPa, \quad \sigma_{gr,s}^I = (-)5088 MPa,$$

gdzie: (-) oznacza ściskanie.

II, III stan własny (podwójny) – rozciąganie

Naprężenie styczne wyrażone jest relacją:
$$\frac{[3000MPa - 3600MPa]}{2} = 3300MPa.$$

Po dokonaniu projekcji stanu naprężenia na stan własny

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}(3300) \end{bmatrix} MPa \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2333 \end{bmatrix} MPa,$$

otrzymujemy naprężenie graniczne w tym stanie własnym dla rozciągania:

$$\sigma_{gr,r}^{II,III} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (2333)^2} MPa, \quad \sigma_{gr,r}^{II,III} = (+)2333MPa.$$

II, III stan własny (podwójny) – ściskanie

Naprężenie styczne wyrażone jest relacją:
$$\frac{|-3600MPa - 3000MPa|}{2} = 3300MPa.$$

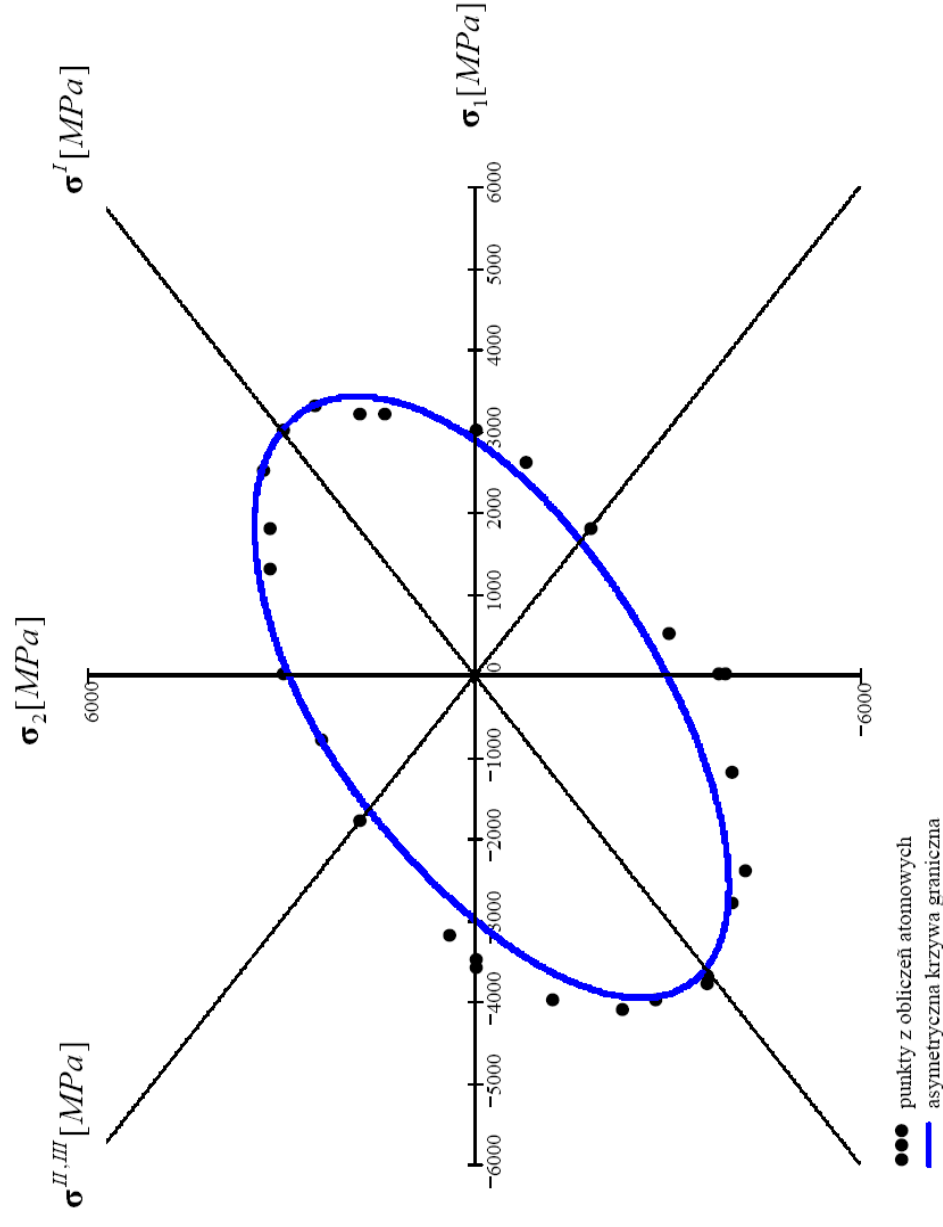
Po dokonaniu projekcji stanu naprężenia na stan własny

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}(3300) \end{bmatrix} MPa \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2333 \end{bmatrix} MPa,$$

otrzymujemy naprężenie graniczne w tym stanie własnym dla ściskania:

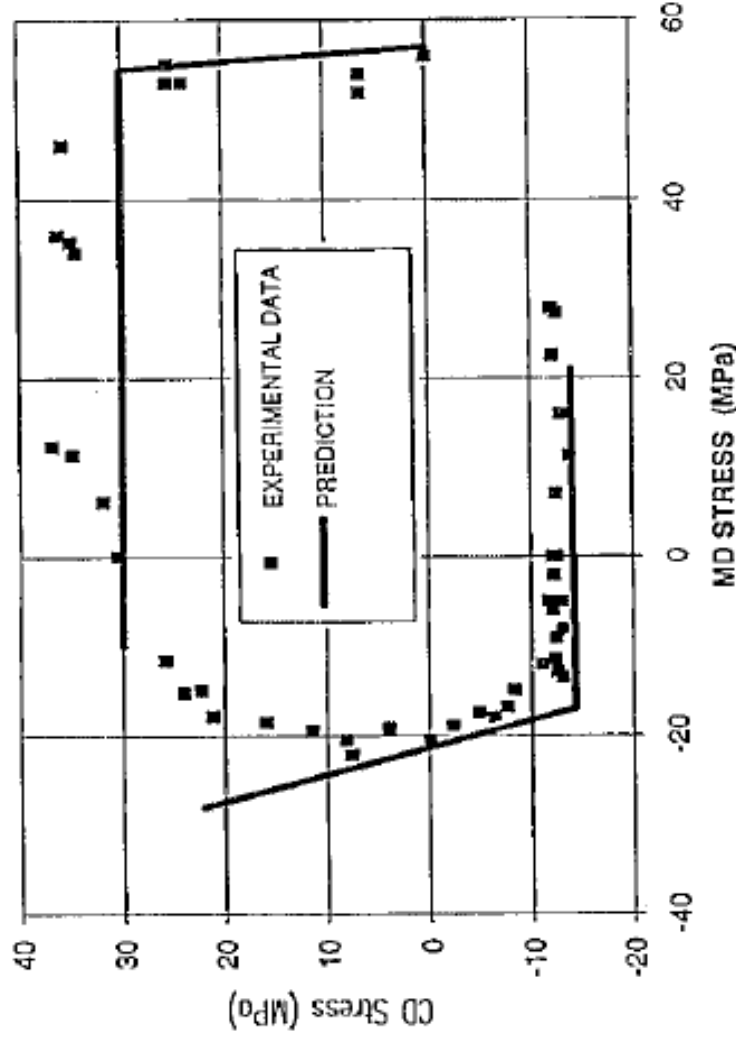
$$\sigma_{gr,s}^{II,III} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (2333)^2} MPa, \quad \sigma_{gr,s}^{II,III} = (-)2333MPa.$$

Asymetryczna powierzchnia graniczna wyznaczona dla obliczonych naprężeń granicznych w oparciu o energetyczne kryterium J. Rychlewskiego, zastosowana do każdej ćwiartki układu osi własnych.



SPECYFIKACJA ASYMETRYCZNEGO WARUNKU ENERGETYCZNEGO DLA KARTONU

Specyfikacja warunku energetycznego dla materiału cienkiej warstwy wykazującego efekt różnicy wytrzymałości została wykonana z wykorzystaniem danych doświadczalnych, które zostały podane w pracach: J. C. Suhling et al. [1985], M. W. Biegler, M. M. Mehrabadi [1995], Y. A. Arramon et al. [2000].



Płaską macierz sztywności oraz odpowiadające jej wartości własne i stany własne przedstawiają następujące zależności:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 4220 & 1700 & 0 \\ 1700 & 7940 & 0 \\ 0 & 0 & 1700 \end{bmatrix} \text{MPa}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 8600 \\ 3560 \\ 1700 \end{bmatrix} \text{MPa}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0.932 & 0.362 & 0 \\ -0.362 & 0.932 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z zależności tych wynika, że materiał jest ortotropowy w stanie sprężystym. Charakteryzują go trzy moduły Kelvina (λ), jeden dystrybutor ($\rho \approx 21^\circ$), jeden kąt Eulera.

Wartości naprężeń głównych z eksperymentu w układzie osi głównych wynoszą:

$$\text{na rozciąganie: } \mathbf{T}_{\sigma,r} = \begin{bmatrix} 56 & 0 \\ 0 & 30.5 \end{bmatrix} \text{MPa}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{na ściskanie: } \mathbf{T}_{\sigma,s} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -13 \end{bmatrix} \text{MPa}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Następnie wyznaczono wartości naprężeń granicznych, które uzyskano po transformacji z układu osi głównych do układu osi własnych w kolejnych stanach własnych według następującej analizy:

I stan własny – rozciąganie

Dokonując transformacji naprężeń granicznych z układu osi głównych do układu osi własnych

$$\begin{bmatrix} 0.932 & 0.362 & 0 \\ -0.362 & 0.932 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 56 & 0 & 0 \\ 0 & 30.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{bmatrix} 0.932 & 0.362 & 0 \\ -0.362 & 0.932 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 52.661 & -8.602 & 0 \\ -8.602 & 33.869 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa,$$

a następnie projekcji stanu naprężenia na I stan własny

$$\begin{bmatrix} 52.661 & 33.869 & \sqrt{2}(-8.602) \\ 33.869 & \sqrt{2}(-8.602) & 0 \\ \sqrt{2}(-8.602) & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{bmatrix} 0.932^2 & 0.932 \cdot 0.362 & 0 \\ 0.932 \cdot 0.362 & 0.362^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57.181 & 22.194 & 0 \\ 22.194 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa,$$

otrzymujemy naprężenie graniczne w I stanie własnym dla rozciągania:

$$\sigma_{gr,r}^I = \sqrt{(57.181)^2 + (22.194)^2 + (0)^2} MPa, \quad \sigma_{gr,r}^I = (+)61.337 MPa.$$

I stan własny – ściskanie

Dokonując transformacji naprężeń granicznych z układu osi głównych do układu osi własnych

$$\begin{bmatrix} 0.932 & 0.362 & 0 \\ -0.362 & 0.932 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -19.083 & 2.361 & 0 \\ 2.361 & -13.917 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -19.083 & 2.361 & 0 \\ 2.361 & -13.917 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa,$$

a następnie projekcji stanu naprężenia na I stan własny

$$\begin{bmatrix} -19.083 & -13.917 & \sqrt{2}(2.361) \\ 0.932^2 & 0.932 \cdot 0.362 & 0 \\ 0 & 0.362^2 & 0 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{bmatrix} 0.932^2 & 0.932 \cdot 0.362 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21.279 & -8.259 & 0 \\ -21.279 & -8.259 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa,$$

otrzymujemy naprężenie graniczne w I stanie własnym dla ściskania:

$$\sigma_{gr,s}^I = \sqrt{(-21.279)^2 + (-8.259)^2} + (0)^2 \text{ MPa}, \quad \sigma_{gr,s}^I = (-)22.826 \text{ MPa}.$$

II stan własny - rozciąganie

Dokonyjąc transformacji naprężeń granicznych z układu osi głównych do układu osi własnych

$$\begin{bmatrix} 0.932 & 0.362 & 0 \\ -0.362 & 0.932 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.932 & 0.362 & 0 \\ -0.362 & 0.932 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -13.388 & 17.009 & 0 \\ 17.009 & 23.888 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa,$$

a następnie projekcji stanu naprężenia na II stan własny

$$\begin{bmatrix} -13.388 & 23.888 & \sqrt{2}(17.009) \\ (-0.362)^2 & (-0.362) \cdot 0.932 & 0 \\ (-0.362) \cdot 0.932 & 0.932^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{bmatrix} (-0.362) \cdot 0.932 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.811 & 25.277 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa,$$

otrzymujemy naprężenie graniczne w II stanie własnym dla rozciągania:

$$\sigma_{gr,r}^{II} = \sqrt{(-9.811)^2 + (25.277)^2} + (0)^2 MPa, \quad \sigma_{gr,r}^{II} = (+)27.114 MPa.$$

II stan własny - ściskanie

Dokonując transformacji naprężeń granicznych z układu osi głównych do układu osi własnych

$$\begin{bmatrix} 0.932 & 0.362 & 0 \\ -0.362 & 0.932 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 56 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa} \cdot \begin{bmatrix} 0.932 & 0.362 & 0 \\ -0.362 & 0.932 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 46.966 & -23.275 & 0 \\ -23.275 & -3.966 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa},$$

a następnie projekcji stanu naprężenia na II stan własny

$$\begin{bmatrix} 46.966 & -3.966 & \sqrt{2}(-23.275) \end{bmatrix} \text{MPa} \cdot \begin{bmatrix} (-0.362)^2 & (-0.362) \cdot 0.932 & 0 \\ (-0.362) \cdot 0.932 & 0.932^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.487 & -19.289 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa},$$

otrzymujemy naprężenie graniczne w II stanie własnym dla ściskania:

$$\sigma_{gr,s}^{II} = \sqrt{(7.487)^2 + (-19.289)^2} + (0)^2 \text{ MPa}, \quad \sigma_{gr,s}^I = (-)20.691 \text{ MPa}.$$

III stan własny - rozciąganie

Naprężenie styczne wyrażone jest relacją:
$$\frac{[56MPa - (-13MPa)]}{2} = 34.5MPa.$$

Po dokonaniu projekcji stanu naprężenia na III stan własny

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}(34.5) \end{bmatrix} MPa \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 48.79 \end{bmatrix} MPa,$$

otrzymujemy naprężenie graniczne w III stanie własnym dla rozciągania:

$$\sigma_{gr,r}^{III} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (48.79)^2} MPa, \quad \sigma_{gr,r}^{III} = (+)48.79MPa.$$

III stan własny - ściskanie

Naprężenie styczne wyrażone jest relacją:
$$\frac{|-20MPa - 30.5MPa|}{2} = 25.25MPa.$$

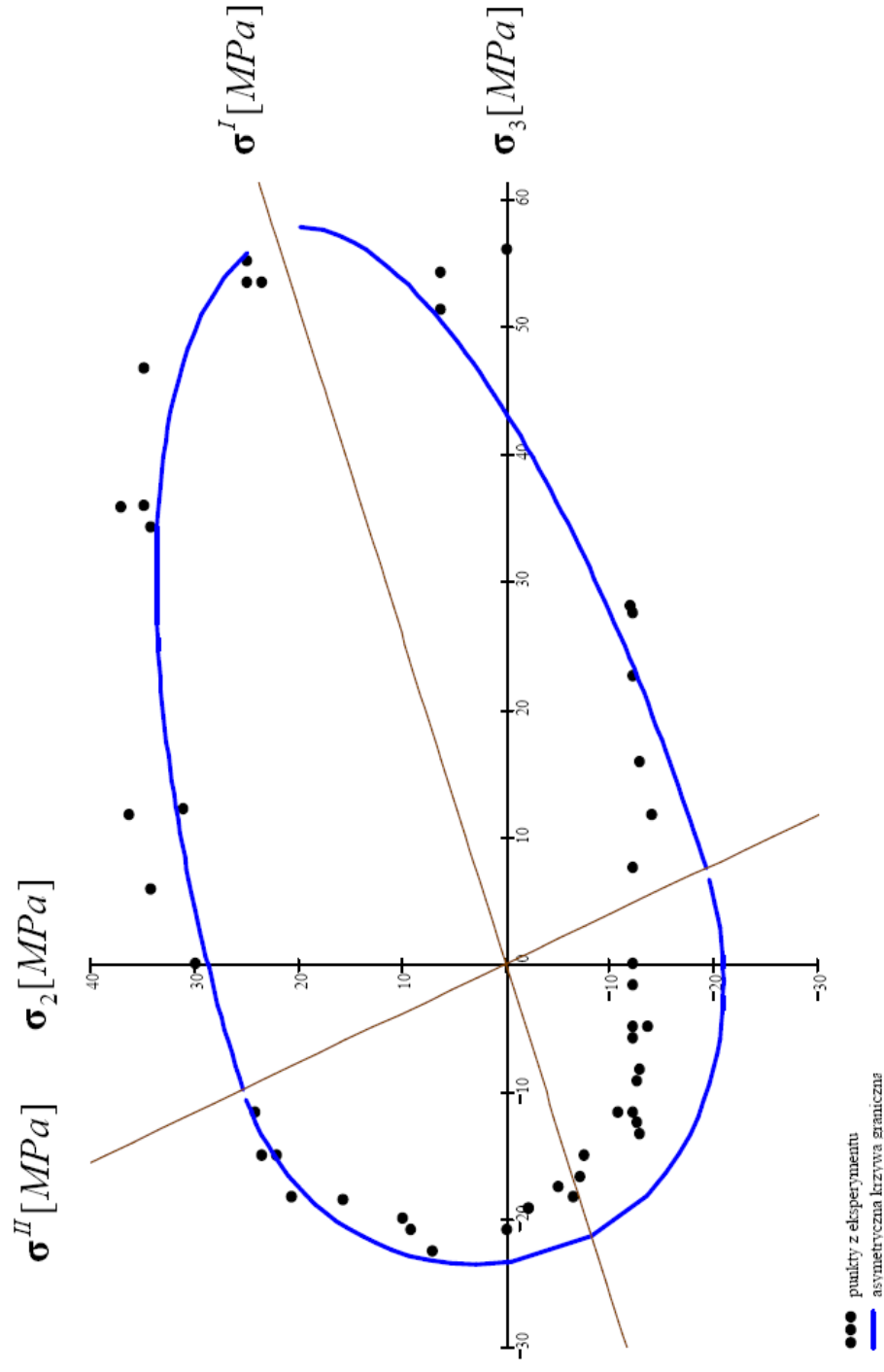
Po dokonaniu projekcji stanu naprężenia na III stan własny

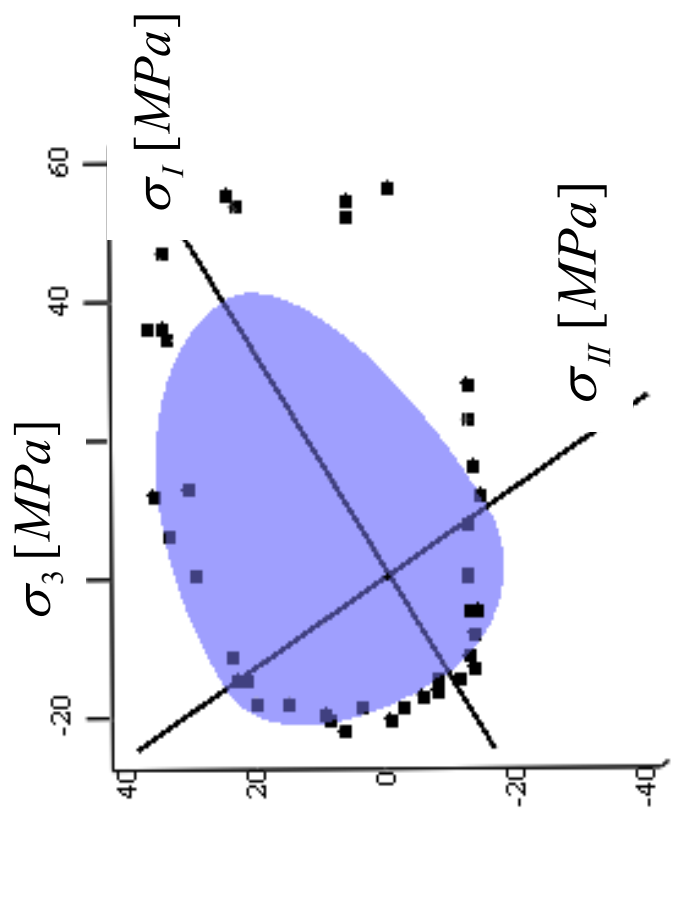
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & (25.25) \end{bmatrix} MPa \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 35.709 \end{bmatrix} MPa,$$

otrzymujemy naprężenie graniczne w III stanie własnym dla ściskania:

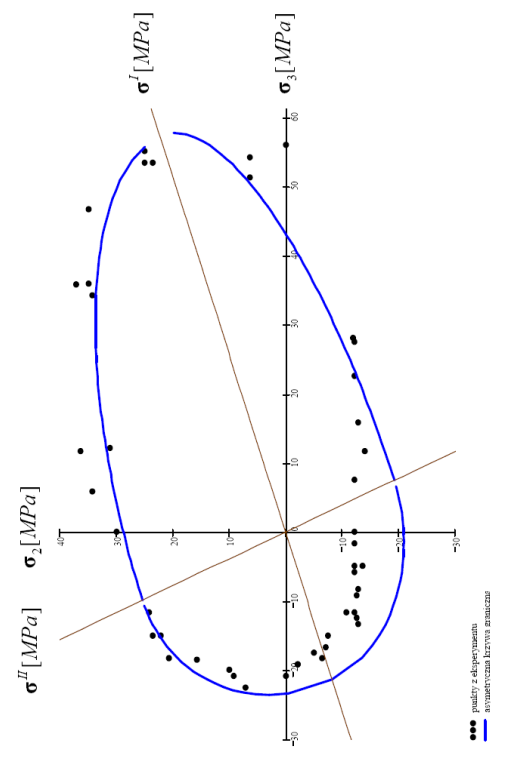
$$\sigma_{gr,s}^{III} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (35.709)^2} MPa, \quad \sigma_{gr,s}^{III} = (-)35.709MPa.$$

Asymetryczna powierzchnia graniczna wyznaczona dla obliczonych naprężeń granicznych w oparciu o energetyczne kryterium J. Rychlewskiego, zastosowana do każdej ćwiartki układu osi własnych.





σ_2 [MPa]



PODSUMOWANIE

Prezentowana analiza daje możliwość zastosowanie energetycznego kryterium J. Rychlewskiego [1984, 1995] do oceny wyteżenia materiałów, które cechuje różnica własności wytrzymałościowych, a zatem i zakresu sprężystego, w zależności od sposobu obciążenia wywołującego dany stan naprężenia w ciele. Przedstawiona interpretacja graficzna asymetrycznego warunku energetycznego w układzie osi własnych (w przestrzeni stanów własnych), wykazuje, że w każdej ćwiartce tego układu wyznaczona jest inna krzywa graniczna, odpowiadająca własnościom materiału określonym na drodze doświadczenia w układzie osi głównych (w przestrzeni naprężeń głównych). Takie podejście do analizy energetycznego kryterium wyteżenia J. Rychlewskiego pozwala na wykorzystanie jednoosiowych testów doświadczalnych do określenia wyteżenia materiału oraz daje również podstawę do wyznaczenia modułów Rychlewskiego h_k , a więc tensora stanu granicznego **H**.

Widoczne rozbieżności między wyznaczonymi teoretycznymi krzywymi granicznymi i punktami doświadczalnymi można będzie prawdopodobnie zmniejszyć jeżeli zastosujemy ogólne twierdzenie Rychlewskiego, które dopuszcza różne symetrie tensora podatności **C** (sztywności **S**) oraz tensora wyteżenia **H**.

LITERATURA

- 1 J. Rychlewski: Elastic energy decomposition and limit criteria, *Uspekhi Mekh.* -Advances in Mech., 1984, t. 7, s. 51÷80 (po rosyjsku).
- 2 J. Rychlewski: Unconventional approach to linear elasticity, *Arch. Mech.*, 1995, t. 47, s. 149÷171.
- 3 J. C. Suhling, R. E. Rowlands, M. W. Johnson, D. E. Gundersen: Tensorial Strength Analysis of Paperboard, *Exp. Mech.*, 1985, s. 75-84
- 4 M. W. Biegler, M. M. Mehrabadi: An energy-based constitutive model for anisotropic solids subject to damage, *Mechanics of Materials*, 1995, t. 19, s. 151-164
- 5 Y. A. Arramon, M. M. Mehrabadi, D. W. Martin, S. C. Cowin: A multidimensional anisotropic strength criterion based on Kelvin modes, *International Journal of Solids and Structures*, 2000, t. 37, s. 2915-2935.
- 6 C. A. Schuh, A. C. Lund: Atomistic basis for the plastic yield criterion of metallic glass, *Nature Materials*, 2003, t. 2, s. 449-452.
- 7 A. C. Lund, C. A. Schuh: Strength asymmetry in nanocrystalline metals under multiaxial loading, *Acta Materialia*, 2005, t. 53, s. 3193-3205.
- 8 J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski: Anizotropia sprężysta i wyteżenie cienkich warstw i powłok, IMIM PAN-IPPT PAN, Orekop, Kraków 2006.
- 9 K. Kowalczyk, J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski: An-energy based yield criterion for solids of cubic elasticity and orthotropic limit state, *Arch. Mech.*, 2003, t. 55, 2003, s. 431÷448.
- 10 R. B. Pęcherski, K. Kowalczyk, J. Ostrowska-Maciejewska: Energetyczne kryterium plastyczności dla monokryształów metali o sieci RSC, *Rudy Metale*, 2001, R 46, s. 639-644.
- 11 W. T. Burzyński: Studium nad Hipotezami Wyteżenia, Nakładem Akademii Nauk Technicznych, Lwów, 1928 (także: *Dzieła wybrane*, t. I, PWN, Warszawa, 1982, 67-257).
- 12 R. B. Pęcherski: Opracowanie teoretycznych podstaw projektowania powłok gradientowych ze względu na zadane własności i stany graniczne, Projektowanie i wytwarzanie funkcjonalnych materiałów gradientowych, Major B. (ed.), IMiM PAN, Orekop, Kraków 2007.

TENSORY \mathbf{S} , \mathbf{C} I \mathbf{H} NIE SĄ WSPÓŁOSIOWE

Twierdzenie dotyczące energetycznej interpretacji warunku granicznego jest sformułowane dla dowolnych tensorów \mathbf{S} , \mathbf{C} i \mathbf{H} daje to możliwość rozpatrywania różnych typów symetrii materiału w stanie sprężystym i w stanie granicznym.

- 1.K. Kowalczyk, J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski;
„An energy-based yield criterion for solids of cubic elasticity and orthotropic limit state”,
Arch. Mech., 2003, t. 55, s. 431÷448
- 2.J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski,;
„Anizotropia sprężysta i wyteżenie cienkich warstw i powłok”,
IMIIM PAN – IPPT PAN, Kraków 2006

Ad 1

Warunek graniczny typu Mises'a przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{h_1} \phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \frac{1}{h_2} \phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \dots + \frac{1}{h_\rho} \phi(\boldsymbol{\sigma}_\rho) = \frac{\sigma_1^2}{k_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{k_2^2} + \dots + \frac{\sigma_\rho^2}{k_\rho^2} \leq 1$$

gdzie:

$h_\alpha = \frac{k_\alpha^2}{2\lambda_\alpha}$ jest graniczną wartością energii sprężystej dla naprężenia $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ -

$\frac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_\alpha)}{h_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\sigma_\alpha^2}{2\lambda_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha^2}{k_\alpha^2}$, przestrzeń \mathcal{P}_α jest przestrzenią stanów bezpiecznych jeśli $k_\alpha \rightarrow \infty$.

Dla tensora podatności rozkład spektralny ma postać

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \dots + \frac{1}{\lambda_\rho} \mathbf{P}_\rho$$

gdzie tensor \mathbf{P}_k jest projektorem ortogonalnym dla tensora \mathbf{C} , w stanie sprężystym materiał posiada symetrię kubiczną: $k=I, II, III$

$$\lambda_I = \lambda_1 = S_{1111} + 2S_{1122}$$

$$\mathbf{P}_I = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

$$\lambda_{II} = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = S_{1111} - S_{1122}$$

$$\mathbf{P}_{II} = (\mathbf{K} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$$

$$\lambda_{III} = \lambda_5 = \lambda_6 = 2S_{2323}$$

$$\mathbf{P}_{III} = (\mathbf{I}_S - \mathbf{K})$$

gdzie:

$$\mathbf{C} \circ \mathbf{S} = \mathbf{S} \circ \mathbf{C} = \mathbf{I}_S,$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3$$

$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$ - kierunki elementarnego sześciianu

Graniczna wartością energii sprężystej ma postać

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \Phi^I(\boldsymbol{\sigma}) + \Phi^{II}(\boldsymbol{\sigma}) + \Phi^{III}(\boldsymbol{\sigma}) = \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{\lambda_I} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_{II}} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})^2] + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_{III}} [\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^2 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\sigma}] \end{aligned}$$

Dla tensora granicznego rozkład spektralny ma postać

$$\mathbf{H} = \frac{1}{K_1} \mathbf{\Gamma}_1 + \dots + \frac{1}{K_6} \mathbf{\Gamma}_6$$

gdzie tensor $\mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_6$ jest projektorem ortogonalnym dla tensora \mathbf{H} , w stanie granicznym materiał wykazuje ortotropię

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \boldsymbol{\chi}_1 \otimes \boldsymbol{\chi}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_6 = \boldsymbol{\chi}_6 \otimes \boldsymbol{\chi}_6$$

$$\boldsymbol{\chi}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{I}, \boldsymbol{\chi}_2 = \cos \varphi \mathbf{a}_{II} + \sin \varphi \mathbf{a}_{III}, \boldsymbol{\chi}_3 = -\sin \varphi \mathbf{a}_{II} + \cos \varphi \mathbf{a}_{III}$$

$$\boldsymbol{\chi}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{m}_2 \otimes \boldsymbol{\chi}_3 + \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_2), \boldsymbol{\chi}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{m}_1 \otimes \boldsymbol{\chi}_3 + \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_1)$$

$$\boldsymbol{\chi}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{m}_1 \otimes \boldsymbol{\chi}_2 + \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_1)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{a}_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2), \quad \mathbf{a}_{III} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2 - 2\mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3)$$

φ – kąt obrotu tensorów \mathbf{S} , \mathbf{C} i \mathbf{H}

Uwzględniając

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{P}_I, \quad \mathbf{\Gamma}_2 + \mathbf{\Gamma}_3 = \mathbf{P}_{II}, \quad \mathbf{\Gamma}_4 + \mathbf{\Gamma}_5 + \mathbf{\Gamma}_6 = \mathbf{P}_{III}$$

Rozkład spektralny tensora podatności ma postać

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\lambda_I} \mathbf{\Gamma}_1 + \frac{1}{\lambda_{II}} (\mathbf{\Gamma}_2 + \mathbf{\Gamma}_3) + \frac{1}{\lambda_{III}} (\mathbf{\Gamma}_4 + \mathbf{\Gamma}_5 + \mathbf{\Gamma}_6)$$

Wartość h wyznaczamy z zależności $\det(\mathbf{H} - \frac{1}{2h} \mathbf{C}) = 0$:

$$h_1 = \frac{K_1}{2\lambda_I} \rightarrow \infty, \quad h_2 = \frac{K_2}{2\lambda_{II}}, \quad h_3 = \frac{K_3}{2\lambda_{II}}$$

$$h_4 = \frac{K_4}{2\lambda_{III}}, \quad h_5 = \frac{K_5}{2\lambda_{III}}, \quad h_6 = \frac{K_6}{2\lambda_{III}}$$

Warunek graniczny ma postać

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{2\lambda_{II}}{K_2} \phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \frac{2\lambda_{II}}{K_3} \phi(\boldsymbol{\sigma}_3) + \frac{2\lambda_{III}}{K_4} \phi(\boldsymbol{\sigma}_4) + \frac{2\lambda_{III}}{K_5} \phi(\boldsymbol{\sigma}_5) + \frac{2\lambda_{III}}{K_6} \phi(\boldsymbol{\sigma}_6) \leq 1$$

$$\phi^{II} = \phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \phi(\boldsymbol{\sigma}_3), \quad \phi^{III} = \phi(\boldsymbol{\sigma}_4) + \phi(\boldsymbol{\sigma}_5) + \phi(\boldsymbol{\sigma}_6)$$

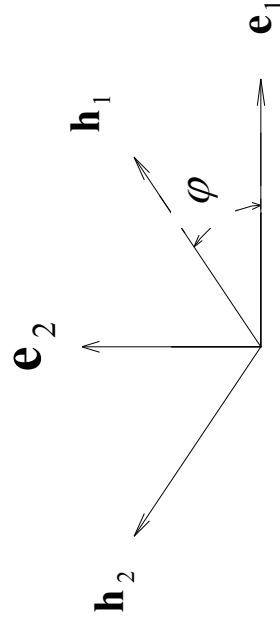
Ad 2

Aby podać warunek graniczny dla płaskich stanów, który ma charakter energetyczny wykorzystane jest twierdzenie dotyczące energetycznej interpretacji warunku granicznego.

Rozpatrywany materiał jest symetryczny zarówno w stanie sprężystym jak również w stanie granicznym. Dla stanów płaskich materiał posiada wówczas co najmniej symetrię prostokąta – jest materiałem ortotropowym.

Założono, że materiał jest ortotropowy w stanie sprężystym i granicznym o różnych osiach symetrii i różnych dystrybutorach.

W stanie sprężystym osiami symetrii są kierunki \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 na płaszczyźnie fizycznej. W stanie granicznym osiami symetrii są kierunki \mathbf{h}_1 i \mathbf{h}_2 obrócone względem \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 o kąt φ



$$\mathbf{h}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{h}_2 = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2$$

W przestrzeni trójwymiarowej \mathcal{S} rozpatrywane są cztery ortonormalne bazy

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \rightarrow \boldsymbol{\omega}_I, \boldsymbol{\omega}_{II}, \boldsymbol{\omega}_{III}, \quad \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \rightarrow \boldsymbol{\eta}_I, \boldsymbol{\eta}_{II}, \boldsymbol{\eta}_{III},$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}_K$ i $\boldsymbol{\eta}_L$ są stanami własnymi tensorów \mathbf{C}^P i \mathbf{H}^P .

Ich rozkłady spektralne mają postać:

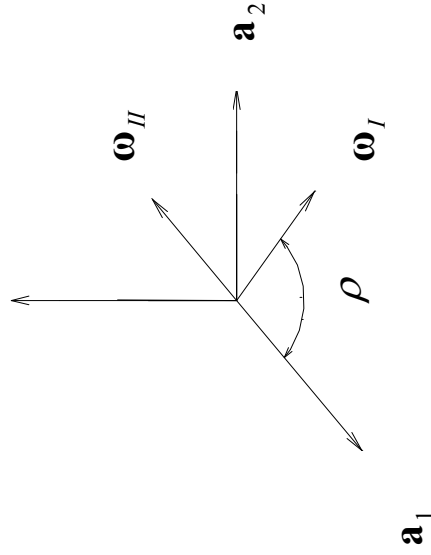
$$\mathbf{C}^P = \frac{1}{\lambda_1} \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \frac{1}{\lambda_2} \boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_{II} + \frac{1}{\lambda_3} \boldsymbol{\omega}_{III} \otimes \boldsymbol{\omega}_{III},$$

$$\mathbf{H}^P = \frac{1}{\chi_1^2} \boldsymbol{\eta}_I \otimes \boldsymbol{\eta}_I + \frac{1}{\chi_2^2} \boldsymbol{\eta}_{II} \otimes \boldsymbol{\eta}_{II} + \frac{1}{\chi_3^2} \boldsymbol{\eta}_{III} \otimes \boldsymbol{\eta}_{III}.$$

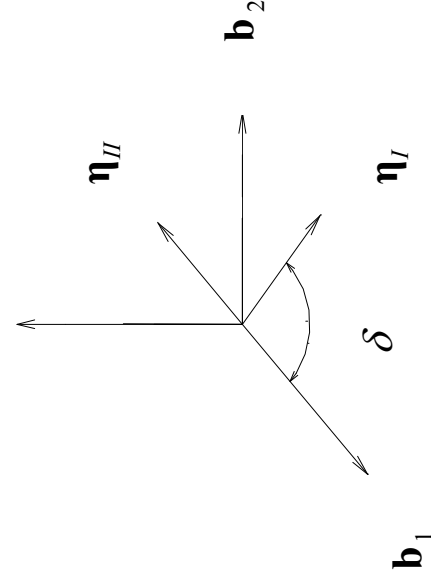
Stany własne $\mathbf{H}^P - \boldsymbol{\eta}_K$ rozłożono w bazie stanów własnych $\mathbf{C}^P - \boldsymbol{\omega}_K$

$$\mathbf{a}_3 = \boldsymbol{\omega}_{III}$$

\mathcal{S}

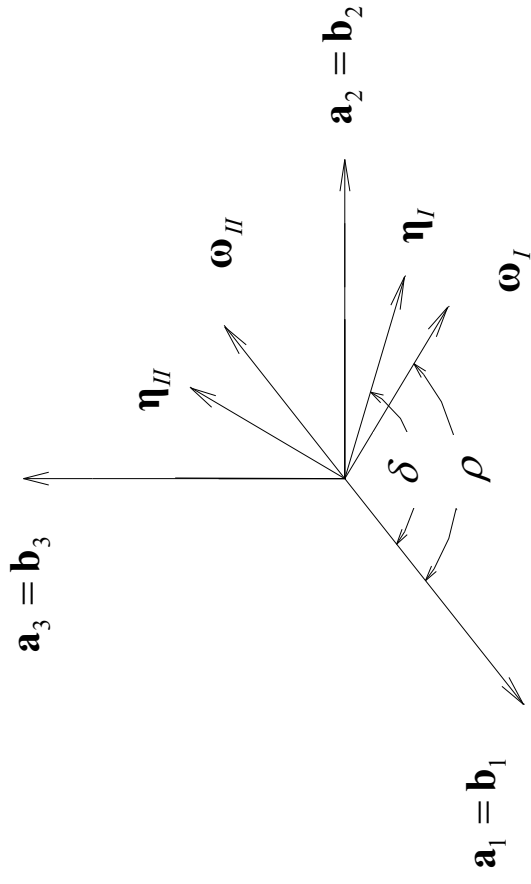


$$\mathbf{b}_3 = \boldsymbol{\eta}_{III}$$



W pracy dyskutowane jest kryterium J. Rychlewskiego dla różnych symetrii

- 1). $\varphi = 0$ - przypadek, gdy osie symetrii w stanie sprężystym i granicznym pokrywają się ($\mathbf{e}_i = \mathbf{h}_i$)



2). $\rho = \frac{\pi}{4} \varphi \neq 0$ - przypadek, gdy osie symetrii materiału w płaszczyźnie fizycznej w stanie sprężystym i granicznym nie pokrywają się i materiał w stanie sprężystym jest materiałem o symetrii kubicznej

3). $\delta = \frac{\pi}{4} \varphi \neq 0$ - przypadek, gdy osie symetrii materiału w płaszczyźnie fizycznej w stanie sprężystym i granicznym nie pokrywają się i materiał w stanie granicznym posiada symetrię kubiczną

4). $\rho = \delta \varphi \neq 0$ - wówczas osie symetrii materiału w płaszczyźnie fizycznej w stanie sprężystym i granicznym nie pokrywają się ale materiał jest tak samo symetryczny w stanie sprężystym i w stanie granicznym o takich samych dystrybutorach

5). $\rho \neq \delta \varphi \neq 0$ - wówczas osie symetrii materiału w płaszczyźnie fizycznej w stanie sprężystym i granicznym nie pokrywają się i materiał w stanie sprężystym ma inną symetrię niż w stanie granicznym