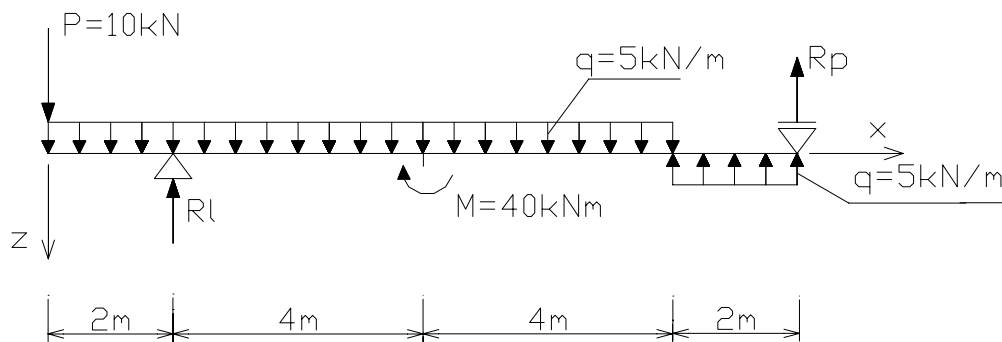


BELKA PROSTA

PRZYKŁAD 1

Dla belki obciążonej jak na rysunku obliczyć reakcje, zapisać funkcje sił przekrojowych i sporządzić ich wykresy.



$$\text{kNm} := 10^3 \text{ J} \quad \text{MPa} := 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \text{Nm} := \text{J} \quad \text{MN} := 10^6 \text{ N} \quad \text{kN} := 10^3 \text{ N}$$

$$P := 10 \text{ kN} \quad q := 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad M := 40 \text{ kNm}$$

Reakcje podpór

$$R_L := 1 \text{ kN}$$

Given

$$10 \text{ m} \cdot R_L + M - 12 \text{ m} \cdot P - q \cdot 10 \text{ m} \cdot 7 \text{ m} + q \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 0$$

$$\text{Find}(R_L) = 42 \text{ kN}$$

$$R_L := 42 \text{ kN}$$

$$R_P := 1 \text{ kN}$$

Given

$$-10 \text{ m} \cdot R_P + M + q \cdot 10 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} - q \cdot 2 \text{ m} \cdot 9 \text{ m} - 2 \text{ m} \cdot P = 0$$

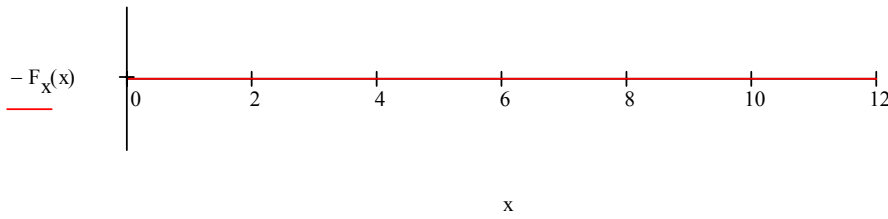
$$\text{Find}(R_P) = 8 \text{ kN}$$

$$R_P := 8 \text{ kN}$$

Równania sił przekrojowych

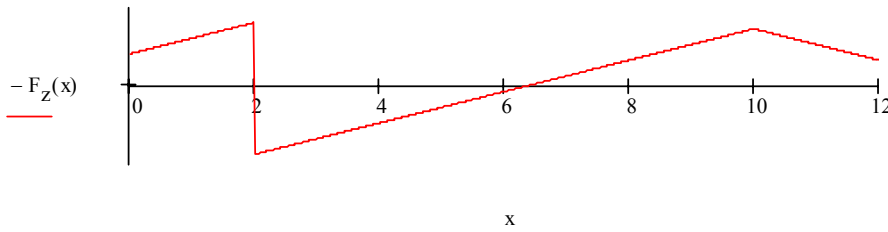
$$F_x(x) := 0$$

-F_x(x): minus po to aby dodatnie wartości siły podłużnej były pod osią x a ujemne wartości siły podłużnej nad osią x !



$$F_z(x) := -P - q \cdot x + \Phi(x - 2\text{m}) \cdot R_L + \Phi(x - 10\text{m}) \cdot q \cdot (x - 10\text{m}) + \Phi(x - 10\text{m}) \cdot q \cdot (x - 10\text{m})$$

-F_z(x): minus po to aby dodatnie wartości siły poprzecznej były pod osią x a ujemne wartości siły poprzecznej nad osią x !

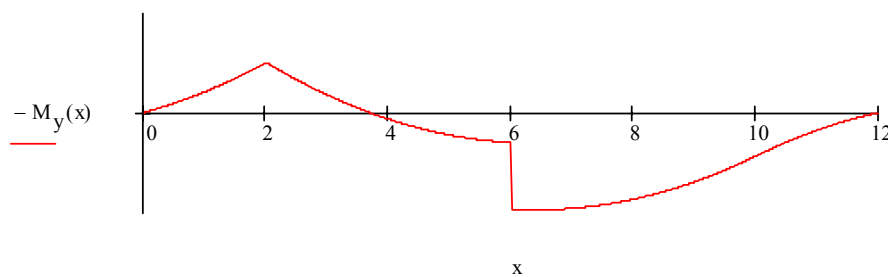


$$F_z(0\text{m}) = -10\text{kN}$$

$$F_z(1.999\text{m}) = -19.995\text{kN} \quad F_z(2.01\text{m}) = 21.95\text{kN} \quad F_z(6.4\text{m}) = 0\text{kN} \quad F_z(10\text{m}) = -18\text{kN} \quad F_z(12\text{m}) = -8\text{kN}$$

$$M_y(x) := (-P) \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + \Phi(x - 2\text{m}) \cdot R_L \cdot (x - 2\text{m}) + \Phi(x - 6\text{m}) \cdot M + \Phi(x - 10\text{m}) \cdot q \cdot \frac{(x - 10\text{m})^2}{2} + \Phi(x - 10\text{m}) \cdot q \cdot \frac{(x - 10\text{m})^2}{2}$$

-M_y(x): minus po to aby uzyskać na rysunku wykres po stronie włókien rozciąganych !

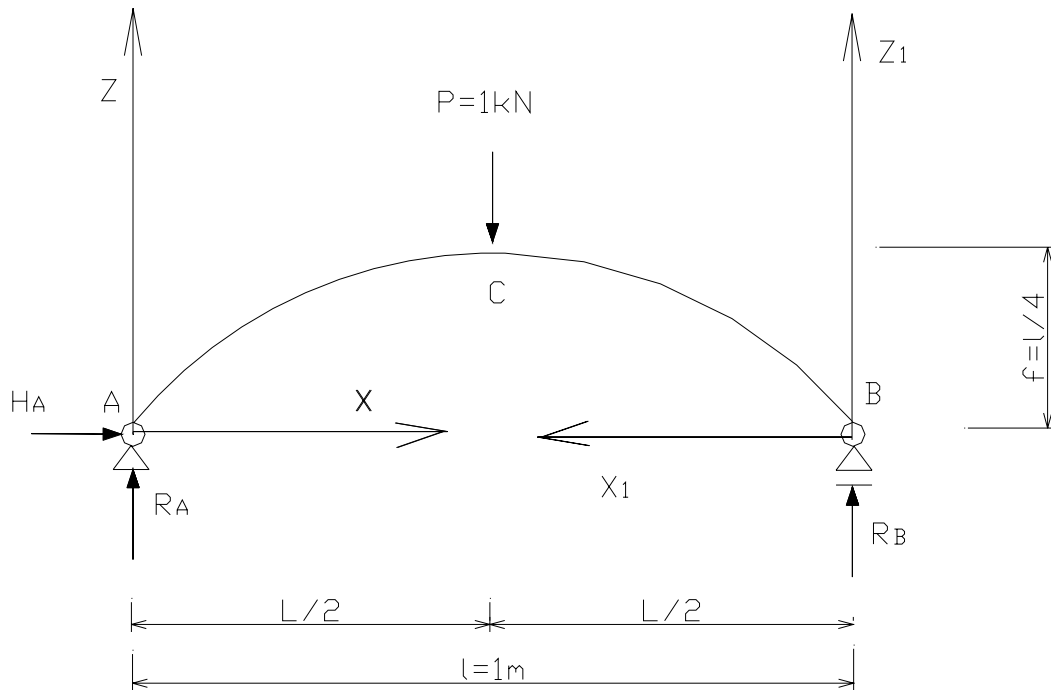


$$M_V(2\text{m}) = -30\text{kNm} \quad M_V(5.99\text{m}) = 17.98\text{kNm} \quad M_V(6\text{m}) = 58\text{kNm} \quad M_V(6.4\text{m}) = 58.4\text{kNm} \quad M_V(10\text{m}) = 26\text{kNm}$$

ŁUKI

PRZYKŁAD 1

Dla łuku pokazanego na rysunku zapisać funkcje sił przekrojowych i sporządzić ich wykresy.



$$P := 1\text{kN} \quad l := 1\text{m}$$

$$f := \frac{l}{4}$$

$$Z(X) := \frac{4f}{l^2} \cdot X \cdot (l - X)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{4f}{l^2} \cdot X \cdot (l - X) \right]$$

$$4f \cdot \frac{(l - 2 \cdot X)}{l^2}$$

$$\tan(\beta) = Z(X)$$

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1 / \cos^2(\beta)$$

$$[\sin^2(\beta) / \cos^2(\beta)] + 1 = [1 / \cos^2(\beta)]$$

$$\tan^2(\beta) + 1 = [1 / \cos^2(\beta)]$$

$$\cos(\beta) = 1 / [1 + \tan^2(\beta)]^{1/2}$$

$$c(X) := \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{4f \cdot (l - 2 \cdot X)}{l^2} \right]^2}}$$

$$s(X) := c(X) \cdot \left[\frac{4f \cdot (l - 2 \cdot X)}{l^2} \right]$$

$$R_A := \frac{P}{2} \quad R_A = 0.5 \text{ kN}$$

$$R_B := \frac{P}{2} \quad R_B = 0.5 \text{ kN}$$

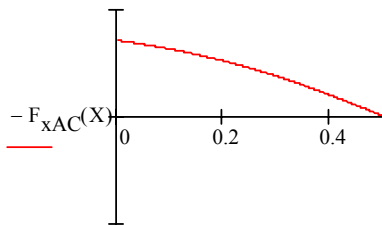
Przedział AC

$$F_{xAC}(X) := -R_A \cdot s(X)$$

BC

$$F_{xBC}(X) := -R_B \cdot s(X)$$

$-F_x(x)$: minus po to aby dodatnie wartości siły podłużnej były pod osią x a ujemne wartości siły podłużnej nad osią x !



X

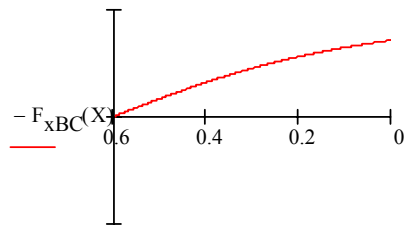
$$F_{xAC}(0\text{m}) = -0.354 \text{ kN}$$

$$F_{xAC}(0.125\text{m}) = -0.3 \text{ kN}$$

$$F_{xAC}(0.25\text{m}) = -0.224 \text{ kN}$$

$$F_{xAC}(0.375\text{m}) = -0.121 \text{ kN}$$

$$F_{xAC}(0.5\text{m}) = 0 \text{ kN}$$



X

$$F_{xBC}(0\text{m}) = -0.354 \text{ kN}$$

$$F_{xBC}(0.125\text{m}) = -0.3 \text{ kN}$$

$$F_{xBC}(0.25\text{m}) = -0.224 \text{ kN}$$

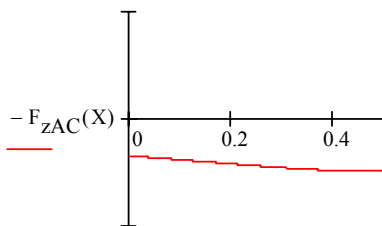
$$F_{xBC}(0.375\text{m}) = -0.121 \text{ kN}$$

$$F_{xBC}(0.5\text{m}) = 0 \text{ kN}$$

$$F_{zAC}(X) := R_A \cdot c(X)$$

$$F_{zBC}(X) := -R_B \cdot c(X)$$

$-F_z(x)$: minus po to aby dodatnie wartości siły poprzecznej były pod osią x a ujemne wartości siły poprzecznej nad osią x !



X

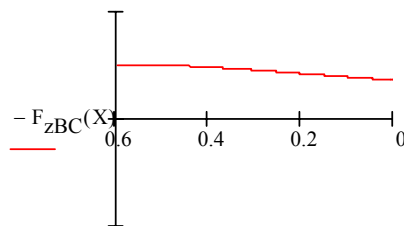
$$F_{zAC}(0\text{m}) = 0.354 \text{ kN}$$

$$F_{zAC}(0.125\text{m}) = 0.4 \text{ kN}$$

$$F_{zAC}(0.25\text{m}) = 0.447 \text{ kN}$$

$$F_{zAC}(0.375\text{m}) = 0.485 \text{ kN}$$

$$F_{zAC}(0.5\text{m}) = 0.5 \text{ kN}$$



X

$$F_{zBC}(0\text{m}) = -0.354 \text{ kN}$$

$$F_{zBC}(0.125\text{m}) = -0.4 \text{ kN}$$

$$F_{zBC}(0.25\text{m}) = -0.447 \text{ kN}$$

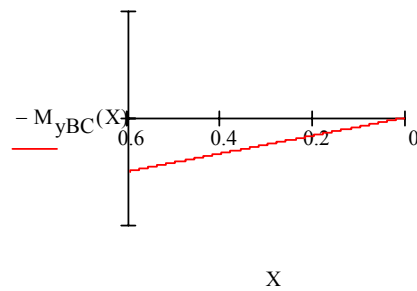
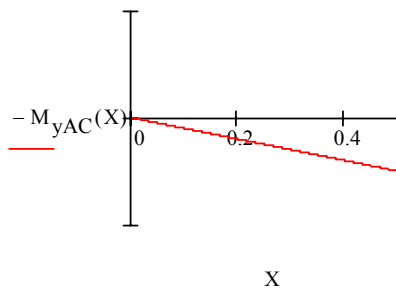
$$F_{zBC}(0.375\text{m}) = -0.485 \text{ kN}$$

$$F_{zBC}(0.5\text{m}) = -0.5 \text{ kN}$$

$$M_{yAC}(X) := R_A \cdot X$$

$$M_{yBC}(X) := R_B \cdot X$$

$-M_y(x)$: minus po to aby uzyskać na rysunku wykres po stronie włókien rozciąganych !



$$M_{yAC}(0\text{m}) = 0\text{mkN}$$

$$M_{yAC}(0.125\text{m}) = 0.063\text{mkN}$$

$$M_{yAC}(0.25\text{m}) = 0.125\text{mkN}$$

$$M_{yAC}(0.375\text{m}) = 0.188\text{mkN}$$

$$M_{yAC}(0.5\text{m}) = 0.25\text{mkN}$$

$$M_{yBC}(0\text{m}) = 0\text{mkN}$$

$$M_{yBC}(0.125\text{m}) = 0.063\text{mkN}$$

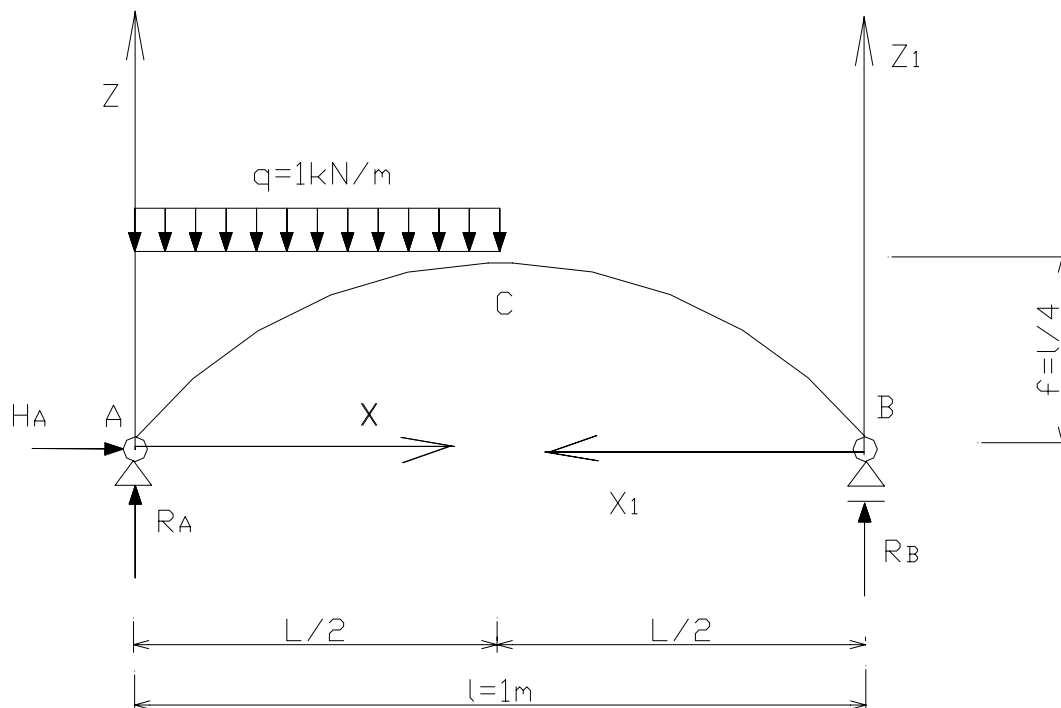
$$M_{yBC}(0.25\text{m}) = 0.125\text{mkN}$$

$$M_{yBC}(0.375\text{m}) = 0.188\text{mkN}$$

$$M_{yBC}(0.5\text{m}) = 0.25\text{mkN}$$

PRZYKŁAD 2

Dla łuku pokazanego na rysunku zapisać funkcje sił przekrojowych i sporządzić ich wykresy.



$$q := 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad l := 1\text{m}$$

$$f := \frac{1}{4}$$

$$Z(X) := \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot X \cdot (1 - X)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot X \cdot (1 - X) \right]$$

$$4 \cdot f \cdot \frac{(1 - 2 \cdot X)}{l^2}$$

$$\tan(\beta) = Z(X)$$

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1 / \cos^2(\beta)$$

$$[\sin^2(\beta) / \cos^2(\beta)] + 1 = [1 / \cos^2(\beta)]$$

$$\tan^2(\beta) + 1 = [1 / \cos^2(\beta)]$$

$$\cos(\beta) = 1 / [1 + \tan^2(\beta)]^{1/2}$$

$$c(X) := \frac{1}{\sqrt{1 + \left[4 \cdot f \cdot \frac{(1 - 2 \cdot X)}{l^2} \right]^2}}$$

$$s(X) := c(X) \cdot \left[4 \cdot f \cdot \frac{(1 - 2 \cdot X)}{l^2} \right]$$

$$R_A := \frac{3}{8} \cdot q \cdot l \quad R_A = 0.375\text{kN}$$

$$R_B := \frac{1}{8} \cdot q \cdot l \quad R_B = 0.125\text{kN}$$

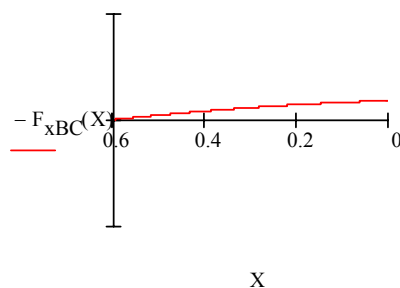
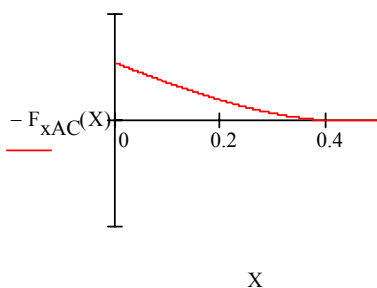
Przedział AC

$$F_{xAC}(X) := -R_A \cdot s(X) + q \cdot X \cdot c(X)$$

BC

$$F_{xBC}(X) := -R_B \cdot s(X)$$

-F_x(x): minus po to aby dodatnie wartości siły podłużnej były pod osią x a ujemne wartości siły podłużnej nad osią x !



$$F_{xAC}(0\text{m}) = -0.265\text{kN}$$

$$F_{xBC}(0\text{m}) = -0.088\text{kN}$$

$$F_{xAC}(0.125\text{m}) = -0.15\text{kN}$$

$$F_{xBC}(0.125\text{m}) = -0.075\text{kN}$$

$$F_{xAC}(0.25\text{m}) = -0.056\text{kN}$$

$$F_{xBC}(0.25\text{m}) = -0.056\text{kN}$$

$$F_{xAC}(0.375\text{m}) = 0\text{ kN}$$

$$F_{xBC}(0.375\text{m}) = -0.03\text{ kN}$$

$$F_{xAC}(0.4\text{m}) = 4.903 \times 10^{-3}\text{ kN}$$

$$F_{xBC}(0.4\text{m}) = -0.025\text{ kN}$$

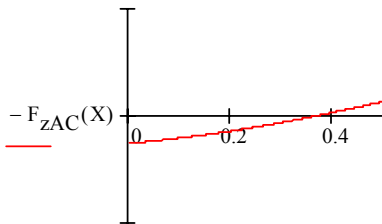
$$F_{xAC}(0.5\text{m}) = 0\text{ kN}$$

$$F_{xBC}(0.5\text{m}) = 0\text{ kN}$$

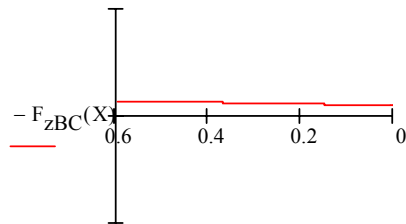
$$F_{zAC}(X) := R_A \cdot c(X) - q \cdot X \cdot c(X)$$

$$F_{zBC}(X) := -R_B \cdot c(X)$$

$-F_z(x)$: minus po to aby dodatnie wartości siły poprzecznej były pod osią x a ujemne wartości siły poprzecznej nad osią x !



X



X

$$F_{zAC}(0\text{m}) = 0.265\text{ kN}$$

$$F_{zBC}(0\text{m}) = -0.0888\text{ kN}$$

$$F_{zAC}(0.125\text{m}) = 0.2\text{ kN}$$

$$F_{zBC}(0.125\text{m}) = -0.1\text{ kN}$$

$$F_{zAC}(0.25\text{m}) = 0.112\text{ kN}$$

$$F_{zBC}(0.25\text{m}) = -0.112\text{ kN}$$

$$F_{zAC}(0.375\text{m}) = 0\text{ kN}$$

$$F_{zBC}(0.375\text{m}) = -0.121\text{ kN}$$

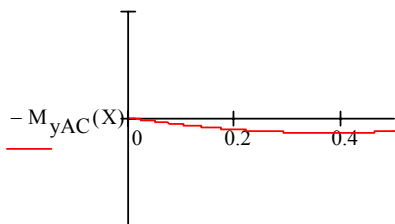
$$F_{zAC}(0.5\text{m}) = -0.125\text{ kN}$$

$$F_{zBC}(0.5\text{m}) = -0.125\text{ kN}$$

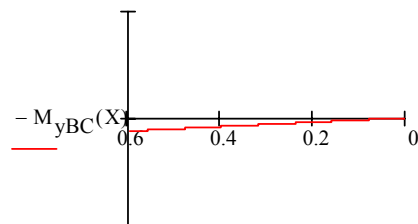
$$M_{yAC}(X) := R_A \cdot X - q \cdot X \cdot 0.5X$$

$$M_{yBC}(X) := R_B \cdot X$$

$-M_y(x)$: minus po to aby uzyskać na rysunku wykres po stronie włókien rozciąganych !



X



X

$$M_{yAC}(0\text{m}) = 0\text{ m kN}$$

$$M_{yBC}(0\text{m}) = 0\text{ m kN}$$

$$M_{yAC}(0.125\text{m}) = 0.039\text{ m kN}$$

$$M_{yBC}(0.125\text{m}) = 0.016\text{ m kN}$$

$$M_{yAC}(0.25\text{m}) = 0.063\text{ m kN}$$

$$M_{yBC}(0.25\text{m}) = 0.031\text{ m kN}$$

$$M_{yAC}(0.4\text{m}) = 0.07\text{ m kN}$$

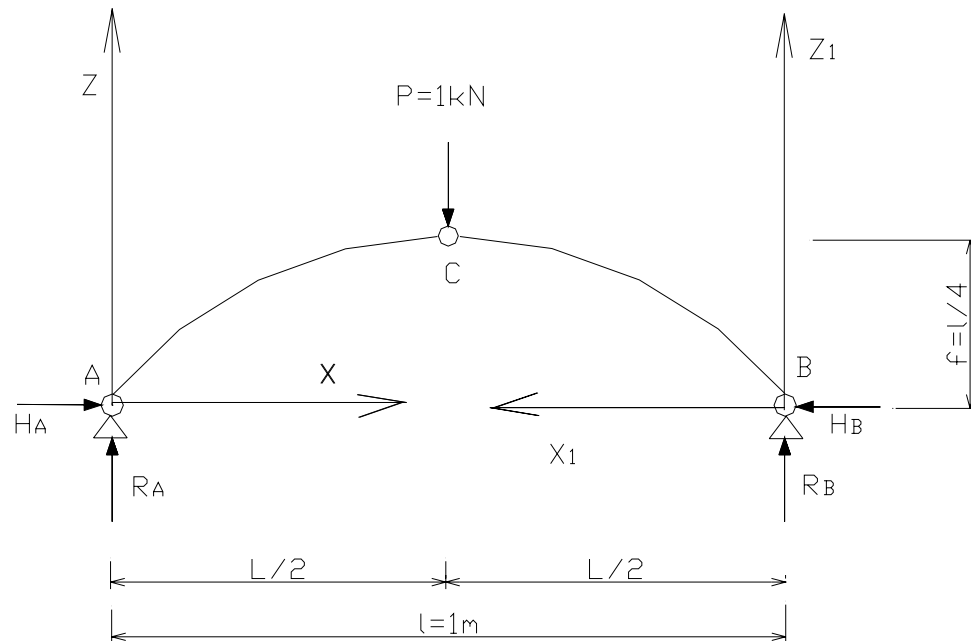
$$M_{yBC}(0.375\text{m}) = 0.047\text{ m kN}$$

$$M_{yAC}(0.5\text{m}) = 0.063\text{ m kN}$$

$$M_{yBC}(0.5\text{m}) = 0.063\text{ m kN}$$

PRZYKŁAD 3

Dla łuku pokazanego na rysunku zapisać funkcje sił przekrojowych i sporządzić ich wykresy.



$$P := 1\text{kN} \quad l := 1\text{m}$$

$$f := \frac{1}{4}$$

$$Z(X) := \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot X \cdot (1 - X)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot X \cdot (1 - X) \right]$$

$$4 \cdot f \cdot \frac{(1 - 2 \cdot X)}{l^2}$$

$$\tan(\beta) = Z(X)$$

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1 / \cos^2(\beta)$$

$$[\sin^2(\beta) / \cos^2(\beta)] + 1 = [1 / \cos^2(\beta)]$$

$$\tan^2(\beta) + 1 = [1 / \cos^2(\beta)]$$

$$\cos(\beta) = 1 / [1 + \tan^2(\beta)]^{(1/2)}$$

$$c(X) := \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{4 \cdot f \cdot (1 - 2 \cdot X)}{l^2} \right]^2}}$$

$$s(X) := c(X) \cdot \left[\frac{4 \cdot f \cdot (1 - 2 \cdot X)}{l^2} \right]$$

$$R_A := \frac{P}{2} \quad R_A = 0.5 \text{ kN} \quad H_A := P$$

$$R_B := \frac{P}{2} \quad R_B = 0.5 \text{ kN} \quad H_B := P$$

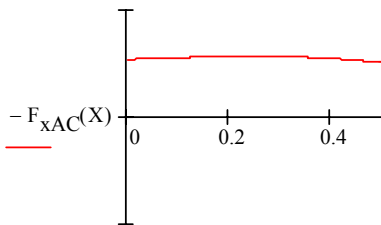
Przedział AC

$$F_{xAC}(X) := -R_A \cdot s(X) - H_A \cdot c(X)$$

BC

$$F_{xBC}(X) := -R_B \cdot s(X) - H_B \cdot c(X)$$

$-F_x(x)$: minus po to aby dodatnie wartości siły podłużnej były pod osią x a ujemne wartości siły podłużnej nad osią x !



X

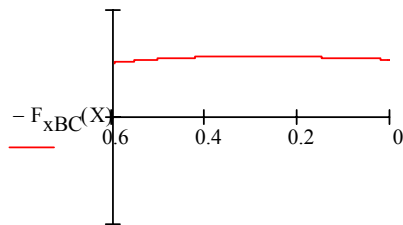
$$F_{xAC}(0\text{m}) = -1.061 \text{ kN}$$

$$F_{xAC}(0.125\text{m}) = -1.1 \text{ kN}$$

$$F_{xAC}(0.25\text{m}) = -1.118 \text{ kN}$$

$$F_{xAC}(0.375\text{m}) = -1.091 \text{ kN}$$

$$F_{xAC}(0.5\text{m}) = -1 \text{ kN}$$



X

$$F_{xBC}(0\text{m}) = -1.061 \text{ kN}$$

$$F_{xBC}(0.125\text{m}) = -1.1 \text{ kN}$$

$$F_{xBC}(0.25\text{m}) = -1.118 \text{ kN}$$

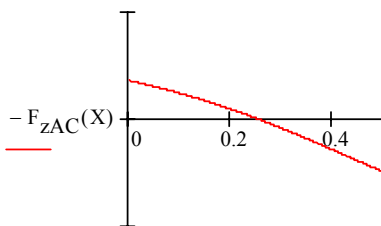
$$F_{xBC}(0.375\text{m}) = -1.091 \text{ kN}$$

$$F_{xBC}(0.5\text{m}) = -1 \text{ kN}$$

$$F_{zAC}(X) := R_A \cdot c(X) - H_A \cdot s(X)$$

$$F_{zBC}(X) := -R_B \cdot c(X) + H_B \cdot s(X)$$

$-F_z(x)$: minus po to aby dodatnie wartości siły poprzecznej były pod osią x a ujemne wartości siły poprzecznej nad osią x !



X

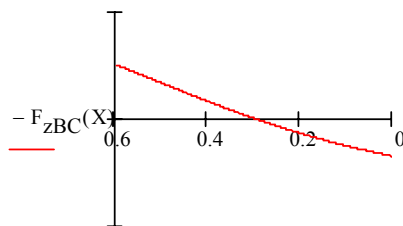
$$F_{zAC}(0\text{m}) = -0.354 \text{ kN}$$

$$F_{zAC}(0.125\text{m}) = -0.2 \text{ kN}$$

$$F_{zAC}(0.25\text{m}) = 0 \text{ kN}$$

$$F_{zAC}(0.375\text{m}) = 0.243 \text{ kN}$$

$$F_{zAC}(0.5\text{m}) = 0.5 \text{ kN}$$



X

$$F_{zBC}(0\text{m}) = 0.354 \text{ kN}$$

$$F_{zBC}(0.125\text{m}) = 0.2 \text{ kN}$$

$$F_{zBC}(0.25\text{m}) = 0 \text{ kN}$$

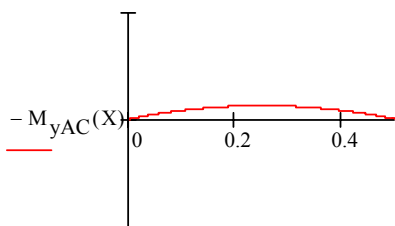
$$F_{zBC}(0.375\text{m}) = -0.243 \text{ kN}$$

$$F_{zBC}(0.5\text{m}) = -0.5 \text{ kN}$$

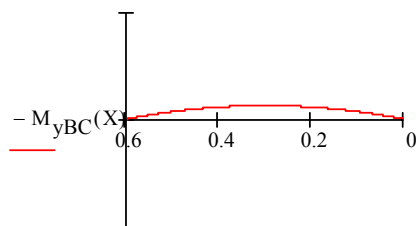
$$M_{yAC}(X) := R_A \cdot X - H_A \cdot Z(X)$$

$$M_{yBC}(X) := R_B \cdot X - H_B \cdot Z(X)$$

$-M_y(x)$: minus po to aby uzyskać na rysunku wykres po stronie włókien rozciąganych !



X



X

$$M_{yAC}(0\text{m}) = 0 \text{ m kN}$$

$$M_{yAC}(0.125\text{m}) = -0.047 \text{ m kN}$$

$$M_{yAC}(0.25\text{m}) = -0.063 \text{ m kN}$$

$$M_{yAC}(0.375\text{m}) = -0.047 \text{ m kN}$$

$$M_{yAC}(0.5\text{m}) = 0 \text{ m kN}$$

$$M_{yBC}(0\text{m}) = 0 \text{ m kN}$$

$$M_{yBC}(0.125\text{m}) = -0.047 \text{ m kN}$$

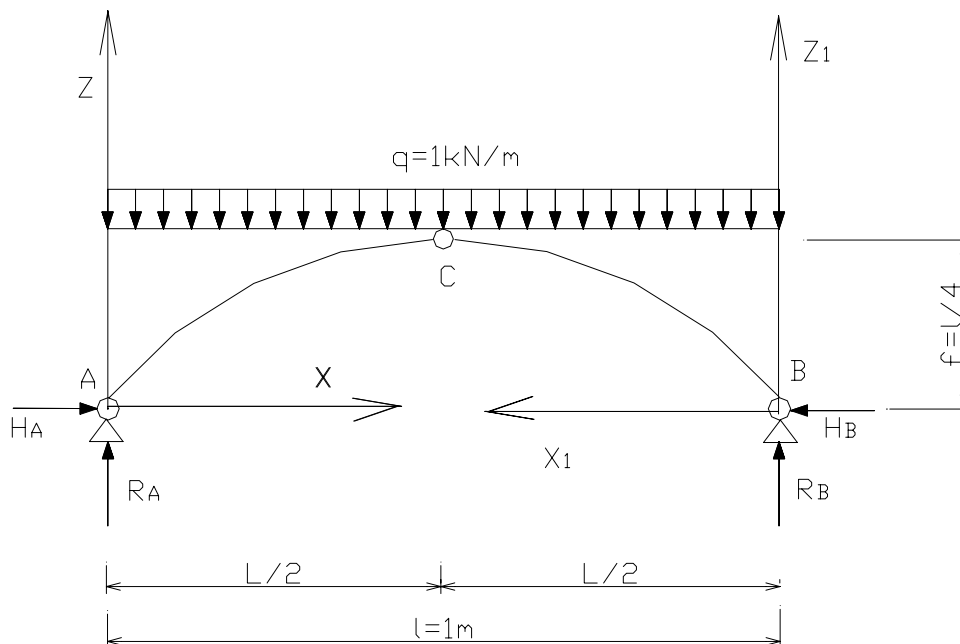
$$M_{yBC}(0.25\text{m}) = -0.063 \text{ m kN}$$

$$M_{yBC}(0.375\text{m}) = -0.047 \text{ m kN}$$

$$M_{yBC}(0.5\text{m}) = 0 \text{ m kN}$$

PRZYKŁAD 4

Dla łuku pokazanego na rysunku zapisać funkcje sił przekrojowych i sporządzić ich wykresy.



$$q := 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad l := 1\text{m}$$

$$f := \frac{1}{4}$$

$$Z(X) := \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot X \cdot (1 - X)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot X \cdot (1 - X) \right]$$

$$4 \cdot f \cdot \frac{(1 - 2 \cdot X)}{l^2}$$

$$\tan(\beta) = Z(X)$$

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1 / \cos^2(\beta)$$

$$[\sin^2(\beta) / \cos^2(\beta)] + 1 = [1 / \cos^2(\beta)]$$

$$\tan^2(\beta) + 1 = [1 / \cos^2(\beta)]$$

$$\cos(\beta) = 1 / [1 + \tan^2(\beta)]^{1/2}$$

$$c(X) := \frac{1}{\sqrt{1 + \left[4 \cdot f \cdot \frac{(1 - 2 \cdot X)}{l^2} \right]^2}}$$

$$s(X) := c(X) \cdot \left[4 \cdot f \cdot \frac{(1 - 2 \cdot X)}{l^2} \right]$$

$$R_A := \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \quad R_A = 0.5\text{kN}$$

$$H_A := 0.5 \cdot q \cdot l$$

$$R_B := \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \quad R_B = 0.5\text{kN}$$

$$H_B := 0.5 \cdot q \cdot l$$

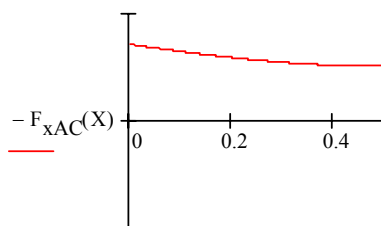
Przedział AC

BC

$$F_{xAC}(X) := -R_A \cdot s(X) + q \cdot X \cdot s(X) - H_A \cdot c(X)$$

$$F_{xBC}(X) := -R_B \cdot s(X) + q \cdot X \cdot s(X) - H_B \cdot c(X)$$

-F_x(x): minus po to aby dodatnie wartości siły podłużnej były pod osią x a ujemne wartości siły podłużnej nad osią x!



X

$$F_{xAC}(0\text{m}) = -0.707\text{kN}$$

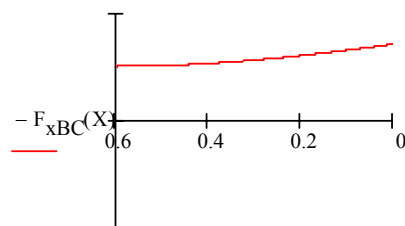
$$F_{xAC}(0.125\text{m}) = -0.625\text{kN}$$

$$F_{xAC}(0.25\text{m}) = -0.559\text{kN}$$

$$F_{xAC}(0.375\text{m}) = -0.515\text{kN}$$

$$F_{xAC}(0.4\text{m}) = -0.51\text{kN}$$

$$F_{xAC}(0.5\text{m}) = -0.5\text{kN}$$



X

$$F_{xBC}(0\text{m}) = -0.707\text{kN}$$

$$F_{xBC}(0.125\text{m}) = -0.625\text{kN}$$

$$F_{xBC}(0.25\text{m}) = -0.559\text{kN}$$

$$F_{xBC}(0.375\text{m}) = -0.515\text{kN}$$

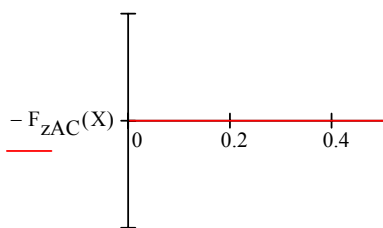
$$F_{xBC}(0.4\text{m}) = -0.51\text{kN}$$

$$F_{xBC}(0.5\text{m}) = -0.5\text{kN}$$

$$F_{zAC}(X) := R_A \cdot c(X) - q \cdot X \cdot c(X) - H_A \cdot s(X)$$

$$F_{zBC}(X) := -R_B \cdot c(X) + q \cdot X \cdot c(X) + H_B \cdot s(X)$$

$-F_z(x)$: minus po to aby dodatnie wartości siły poprzecznej były pod osią x a ujemne wartości siły poprzecznej nad osią x !



X

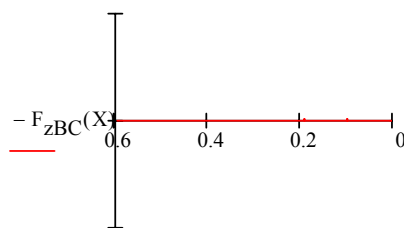
$$F_{zAC}(0\text{m}) = 0\text{kN}$$

$$F_{zAC}(0.125\text{m}) = 0\text{kN}$$

$$F_{zAC}(0.25\text{m}) = 0\text{kN}$$

$$F_{zAC}(0.375\text{m}) = 0\text{kN}$$

$$F_{zAC}(0.5\text{m}) = 0\text{kN}$$



X

$$F_{zBC}(0\text{m}) = 0\text{kN}$$

$$F_{zBC}(0.125\text{m}) = 0\text{kN}$$

$$F_{zBC}(0.25\text{m}) = 0\text{kN}$$

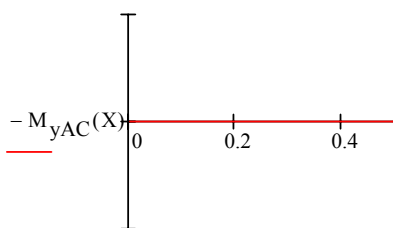
$$F_{zBC}(0.375\text{m}) = 0\text{kN}$$

$$F_{zBC}(0.5\text{m}) = 0\text{kN}$$

$$M_{yAC}(X) := R_A \cdot X - q \cdot X \cdot 0.5X - H_A \cdot Z(X)$$

$$M_{yBC}(X) := R_B \cdot X - q \cdot X \cdot 0.5X - H_B \cdot Z(X)$$

$-M_y(x)$: minus po to aby uzyskać na rysunku wykres po stronie włókien rozciąganych !



X

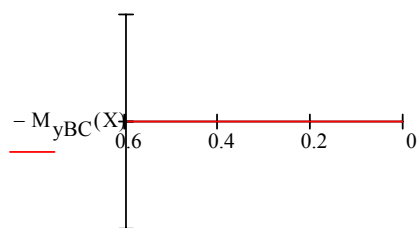
$$M_{yAC}(0\text{m}) = 0\text{mkN}$$

$$M_{yAC}(0.125\text{m}) = 0\text{mkN}$$

$$M_{yAC}(0.25\text{m}) = 0\text{mkN}$$

$$M_{yAC}(0.4\text{m}) = 0\text{mkN}$$

$$M_{yAC}(0.5\text{m}) = 0\text{mkN}$$



X

$$M_{yBC}(0\text{m}) = 0\text{mkN}$$

$$M_{yBC}(0.125\text{m}) = 0\text{mkN}$$

$$M_{yBC}(0.25\text{m}) = 0\text{mkN}$$

$$M_{yBC}(0.375\text{m}) = 0\text{mkN}$$

$$M_{yBC}(0.5\text{m}) = 0\text{mkN}$$