

**Model efektywny
dla materiałów komórkowych
w zakresie liniowo-sprężystym**

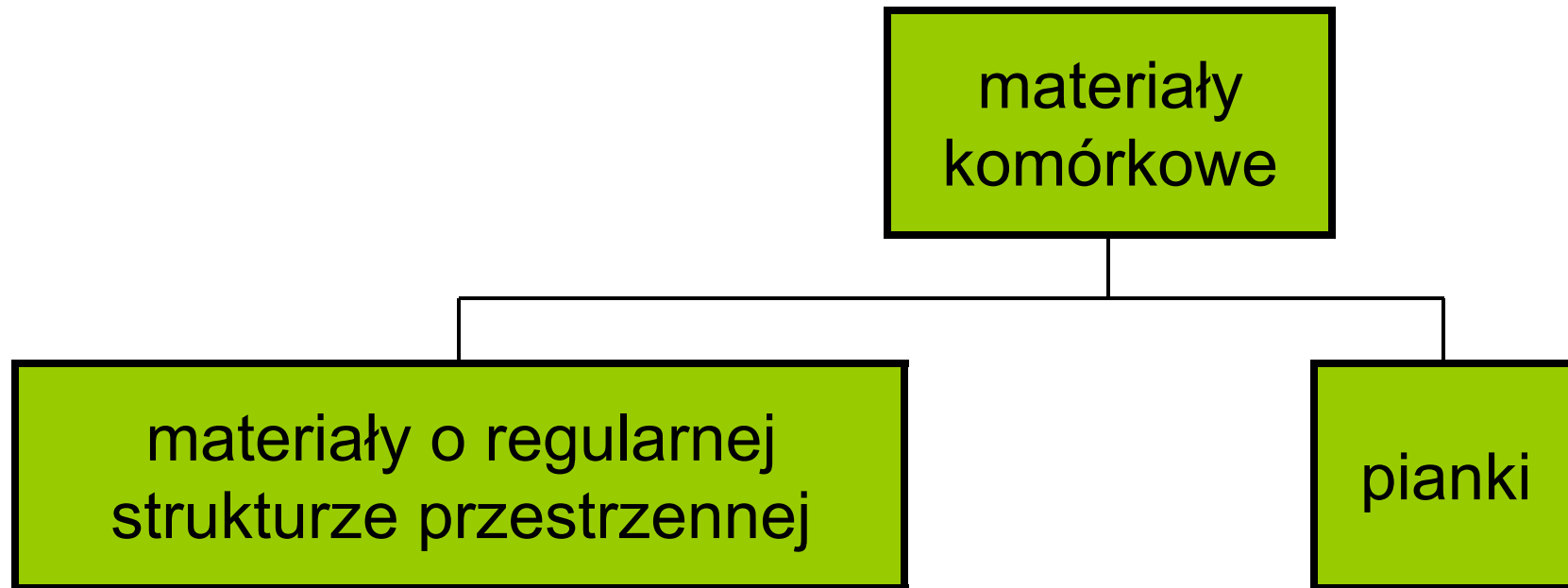
Małgorzata Janus-Michalska

Katedra Wytrzymałości Materiałów
Instytut Mechaniki Budowli
Politechnika Krakowska

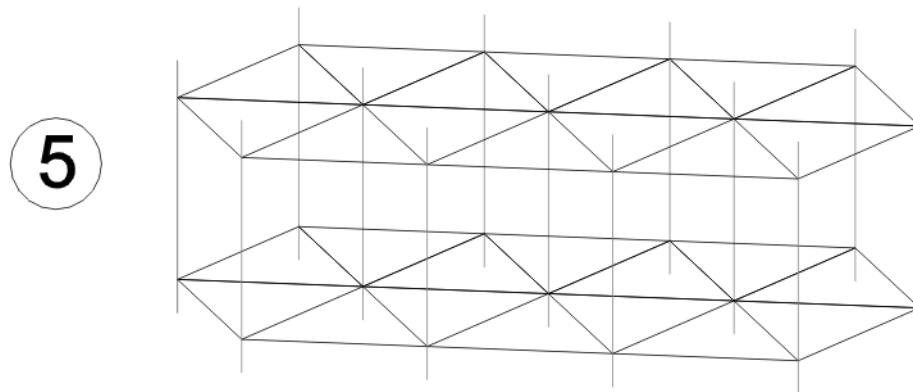
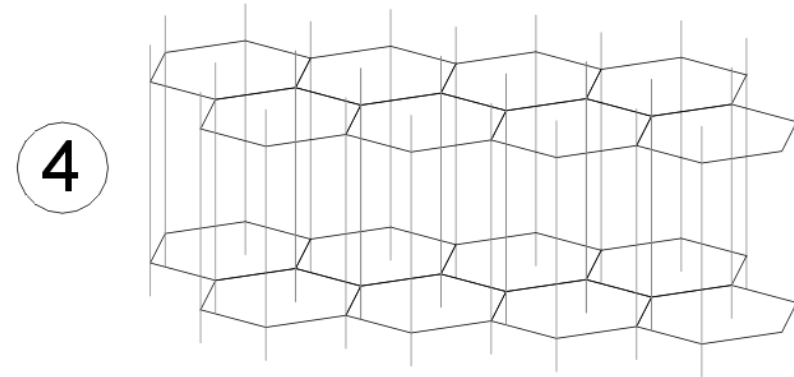
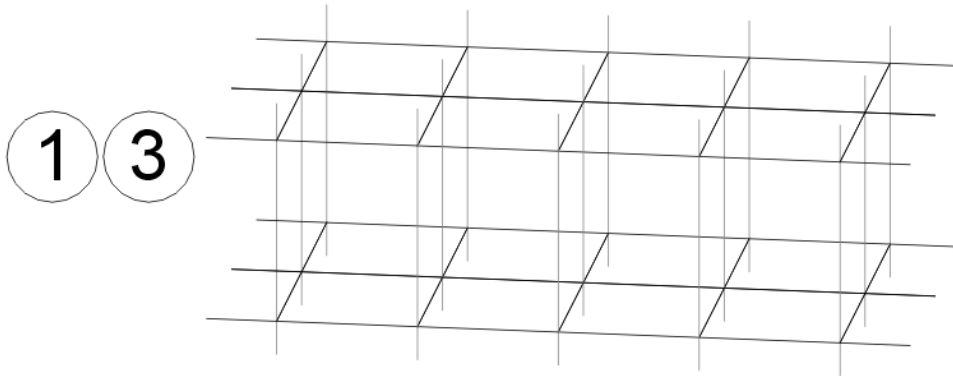
PLAN PREZENTACJI

1. Wprowadzenie
2. Analiza sprężysta oparta na modelu mikromechanicznym
 - istota modelowania wieloskalowego
 - komórka reprezentatywna i jej symetria
 - kinematyka mikrostruktury w jednorodnych stanach odkształceń
 - model belkowy struktury komórkowej o komórkach otwartych
 - efektywne continuum zastępcze - definicja naprężeń
 - tensor sztywności materiału anizotropowego

3. Graficzna reprezentacja stałych materiałowych
4. Przykłady modelowania własności sprężystych
5. Wnioski i kierunki dalszych prac
6. Literatura



Przykłady struktur materiałów komórkowych o układach regularnych



2 pianka

Reprezentatywna komórka

opis geometrii

$$\mathbf{b}_1^0 = \left(-L \frac{\sqrt{3}}{6}, +L \frac{\sqrt{3}}{6}, +L \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad \mathbf{e}_1^0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

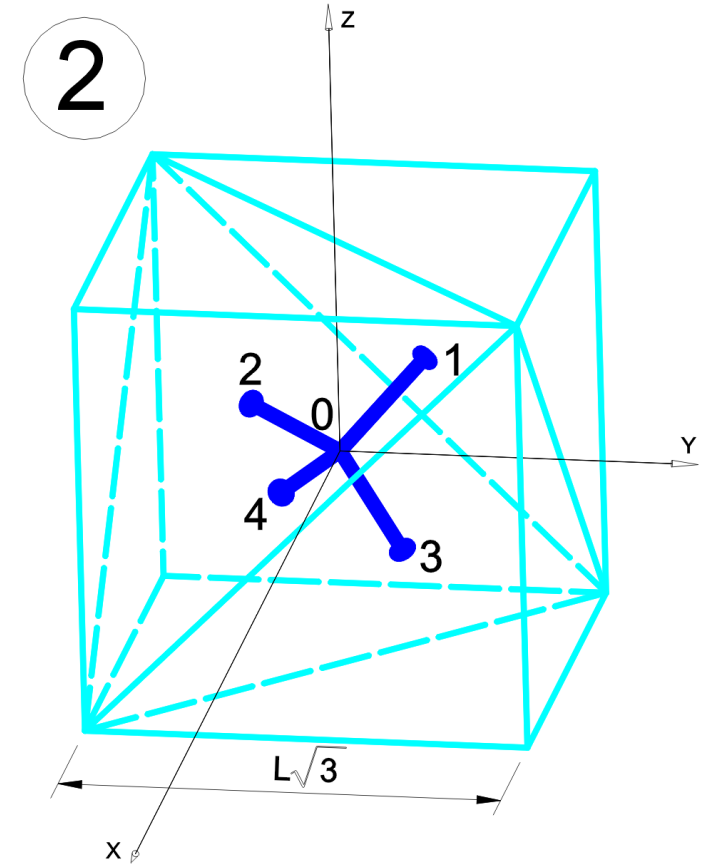
$$\mathbf{b}_2^0 = \left(+L \frac{\sqrt{3}}{6}, -L \frac{\sqrt{3}}{6}, +L \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad \mathbf{e}_2^0 = \left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\mathbf{b}_3^0 = \left(+L \frac{\sqrt{3}}{6}, +L \frac{\sqrt{3}}{6}, -L \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad \mathbf{e}_3^0 = \left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\mathbf{b}_4^0 = \left(-L \frac{\sqrt{3}}{6}, -L \frac{\sqrt{3}}{6}, -L \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad \mathbf{e}_4^0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

\mathbf{b}_i^0 wektory położenia punktów środkowych $|\mathbf{b}_i^0| = \frac{L_{0-i}}{2}$

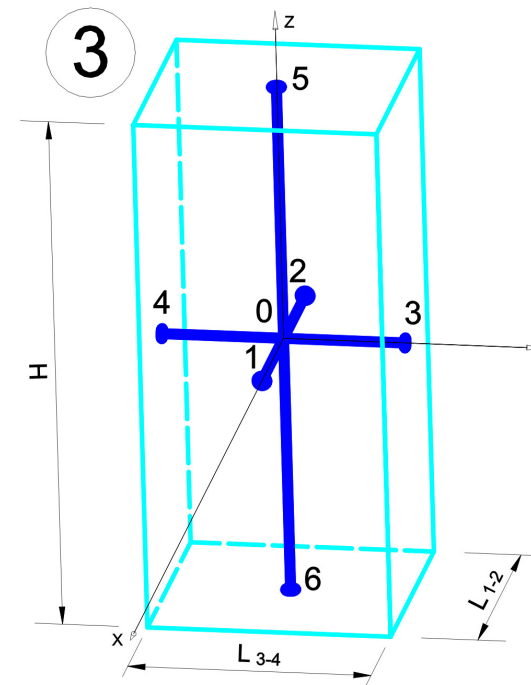
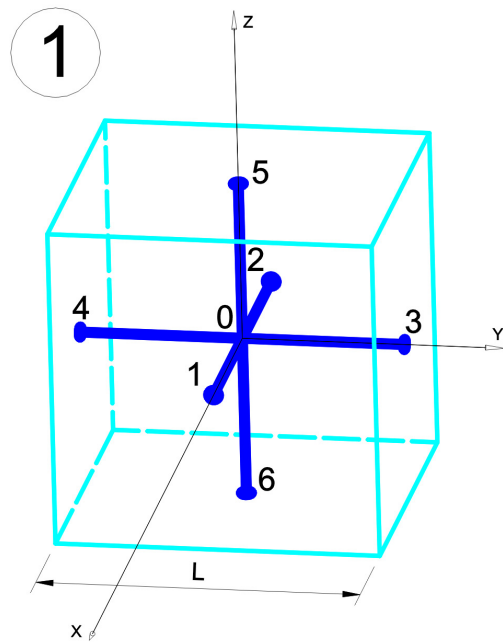
\mathbf{e}_i^0 wersory $i = 1, \dots, n$



Komórki reprezentatywne dla podanych struktur i ich symetrie

sześcian

pryzma o podstawie prostokąta

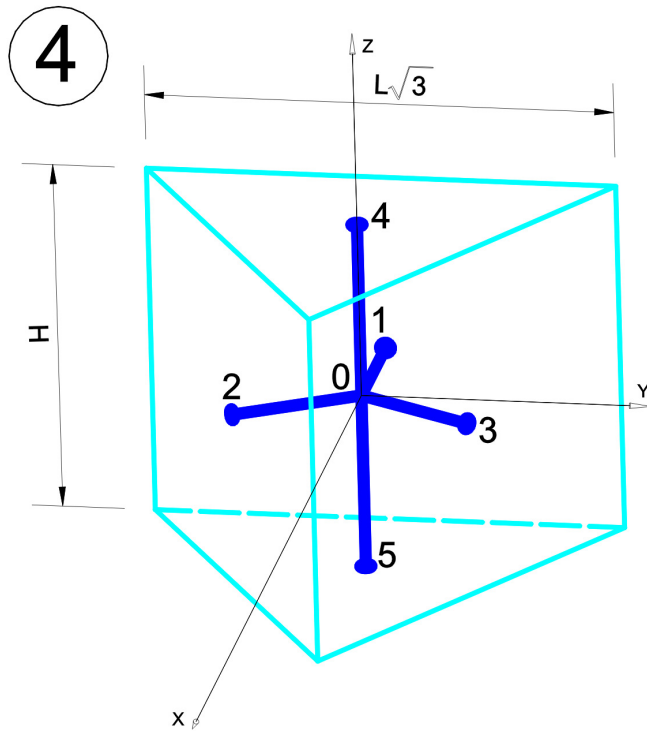


symetria kubiczna

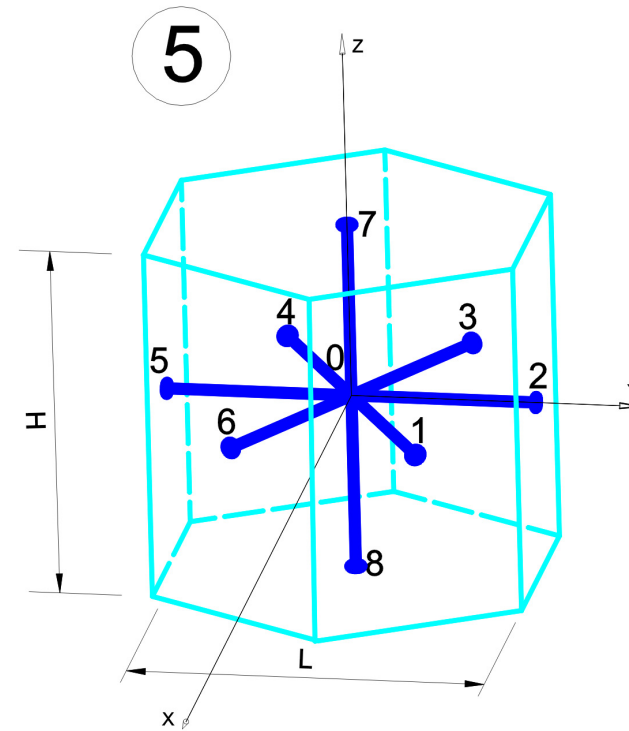
ortotropia

pryzma o podstawie:

trójkąta



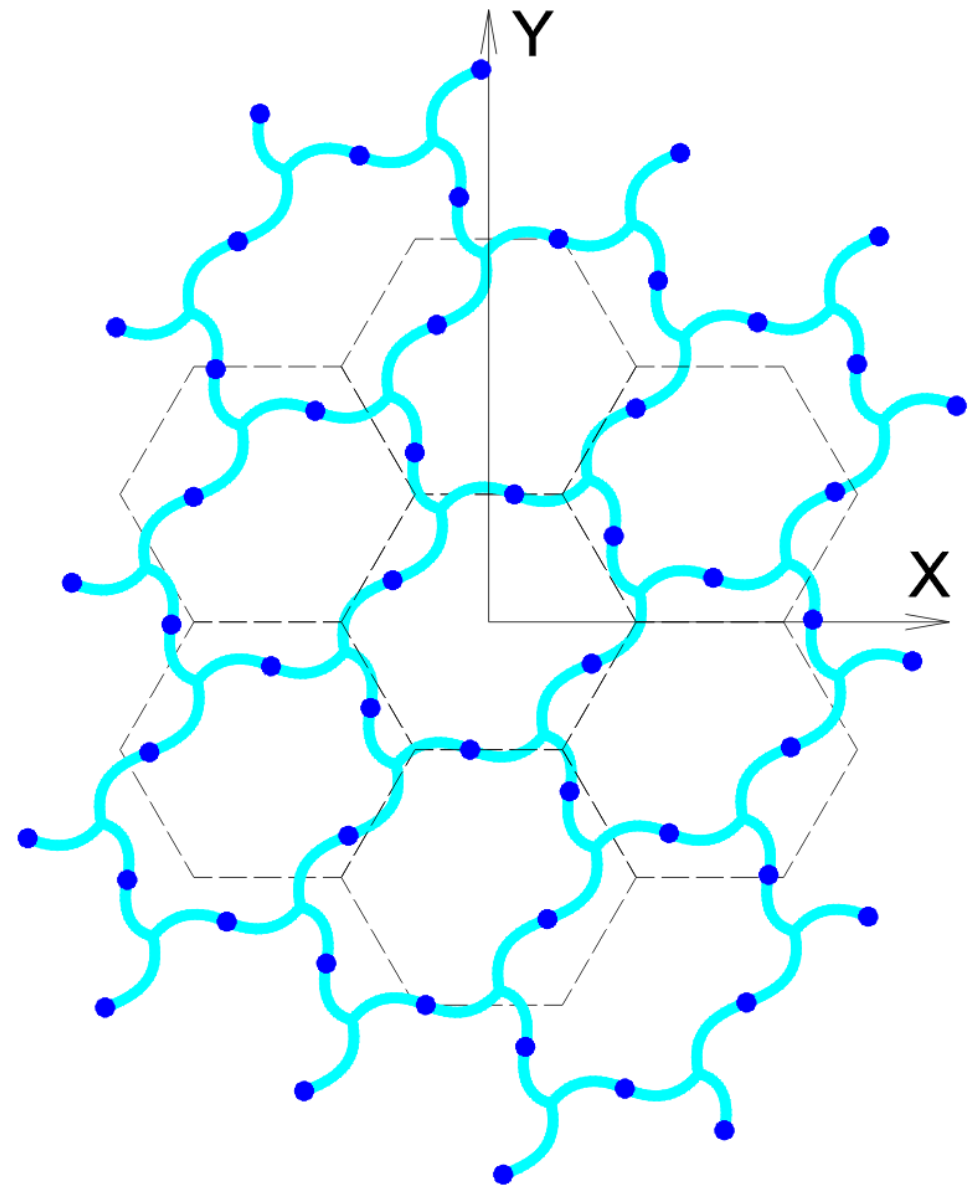
sześciokąta foremnego



transwersalna izotropia

Jednorodne stany odkształceń continuum zastępczego

podobieństwo przemieszczeń
węzłów i punktów środkowych



Kinematyka

$$\Delta_i = \Delta_{i-0} + \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{b}_i^0 + \Delta_0$$

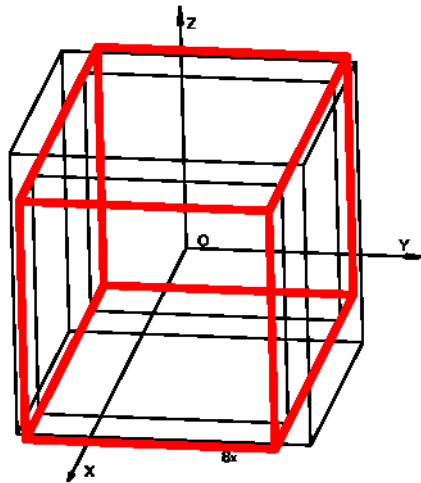
- Δ_i - przemieszczenia punktów środkowych
- Δ_{i-0} - przemieszczenia względne punktów środkowych, względem węzła środkowego
- $\Delta_0, \boldsymbol{\psi}$ - parametry ruchu sztywnego węzła środkowego

a) osiowe rozciągnięcie ε_α w kierunku α , $\alpha = x, y, z$.

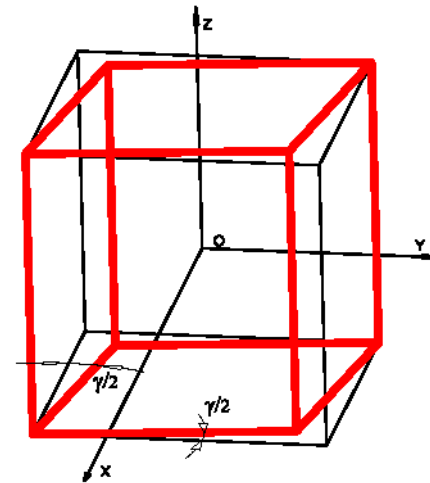
$$\Delta_i(\varepsilon_\alpha) = \varepsilon_\alpha (\mathbf{b}_i^0 \cdot \mathbf{e}_\alpha) \mathbf{e}_\alpha \quad i = 1, \dots, n.$$

b) ścięcie $\gamma_{\alpha\beta}$ w płaszczyźnie $\alpha\beta$, $\alpha \neq \beta$.

$$\Delta_i(\gamma_{\alpha\beta} / 2) = (\gamma_{\alpha\beta} / 2) ((\mathbf{b}_i^0 \cdot \mathbf{e}_\alpha) \mathbf{e}_\beta + (\mathbf{b}_i^0 \cdot \mathbf{e}_\beta) \mathbf{e}_\alpha) \quad i = 1, \dots, n.$$



a)



b)

Metoda analizy strukturalnej

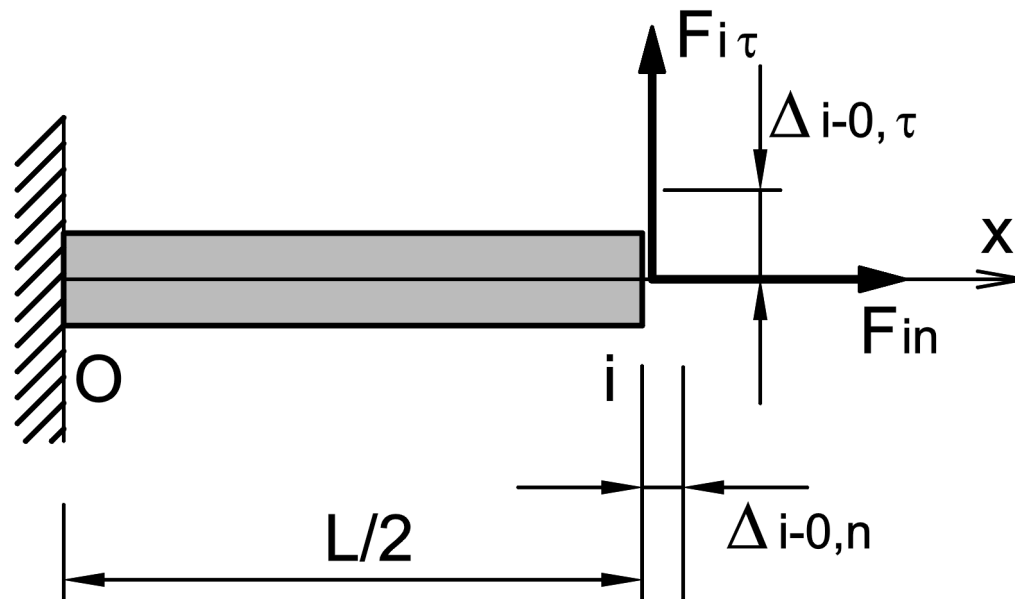
(metoda przemieszczeń)

model - belka Timoshenki

$$\Delta_{i-0} = \Delta_{i-0,n} + \Delta_{i-0,\tau}$$

$$\Delta_{i-0,n} = (\Delta_{i-0} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i$$

$$\Delta_{i-0,\tau} = -(\Delta_{i-0} \times \mathbf{e}_i) \times \mathbf{e}_i$$



Podatność wspornika dla obciążenia siłą osiową

$$c_n = s_n^{-1} = \frac{L}{2E_S A}$$

Podatność wspornika dla obciążenia siłą poprzeczną

$$c_\tau = s_\tau^{-1} = \frac{L^3}{24E_S J} + \frac{L}{2G_S A_\tau}$$

E_S, G_S - charakterystyki materiału szkieletu

A, A_τ, J - charakterystyki przekrojowe belek szkieletu

Związki siła - przemieszczenie

$$F_{in} = \Delta_{i-0,n} S_n \quad F_{i\tau} = \Delta_{i-0,\tau} S_\tau$$

Warunki równowagi określające parametry ruchu sztywnego:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \times \mathbf{b}_i^0 = \mathbf{0}$$

Prawo Hooke'a dla ciała anizotropowego

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \circ \boldsymbol{\varepsilon}$$

\mathbf{S} , tensor sztywności, $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}$ tensor podatności

Definicja tensora naprężeń dla continuum zastępczego

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V} \int_{V^s} \boldsymbol{\sigma}^s dV$$

WYNIKI

rozwiązania analityczne

graficzna prezentacja

Program Mathcad

Obliczenia wykonał: Piotr Kordzikowski

Komórka	1	2	3
S_{1111}	$\frac{s_n}{2L}$	$\frac{2s_{nL}}{9\sqrt{3}L}$	$\frac{L_{1-2}s_{n1-2}}{2L_{3-4}H}$
S_{2222}	$\frac{s_n}{2L}$	$\frac{2s_{nL}}{9\sqrt{3}L}$	$\frac{L_{3-4}s_{n3-4}}{2L_{1-2}H}$
S_{3333}	$\frac{s_n}{2L}$	$\frac{2s_{nL}}{9\sqrt{3}L}$	$\frac{Hs_{n5-6}}{2L_{1-2}L_{3-4}}$
S_{1122}	0	$\frac{2s_{\tau L}}{9\sqrt{3}L}$	0
S_{2323}	$\frac{s_{\tau}}{4L}$	$\frac{(s_{nL} - s_{\tau L})}{9\sqrt{3}L}$	$\frac{\frac{2H^2s_{\tau5-6}}{L_{3-4}^2s_{\tau3-4} + H^2s_{\tau5-6}} \frac{L_{3-4}}{2}s_{\tau3-4}}{2L_{1-2}H}$
S_{1313}	$\frac{s_{\tau}}{4L}$	$\frac{(s_{nL} - s_{\tau L})}{9\sqrt{3}L}$	$\frac{\frac{2H^2s_{\tau5-6}}{L_{1-2}^2s_{\tau1-2} + H^2s_{\tau5-6}} \frac{L_{1-2}}{2}s_{\tau1-2}}{2L_{3-4}H}$
S_{1212}	$\frac{s_{\tau}}{4L}$	$\frac{(s_{nL} - s_{\tau L})}{9\sqrt{3}L}$	$\frac{\frac{2L_{3-4}^2s_{\tau3-4}}{L_{3-4}^2s_{\tau3-4} + L_{1-2}^2s_{\tau1-2}} \frac{L_{1-2}}{2}s_{\tau1-2}}{2L_{3-4}H}$

Komórka	4	5
S_{1111}	$\frac{\sqrt{3} (s_{nL} + 3 s_{\tau L}) s_{nL}}{12 H (s_{nL} + s_{\tau L})}$	$\frac{\sqrt{3} (3 s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{8 H}$
S_{2222}	$\frac{\sqrt{3} (s_{nL} + 3 s_{\tau L}) s_{nL}}{12 H (s_{nL} + s_{\tau L})}$	$\frac{\sqrt{3} (3 s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{8 H}$
S_{3333}	$\frac{2 \sqrt{3} s_{nL}}{9 L}$	$\frac{\sqrt{3} H s_{nH}}{3 L^2}$
S_{1122}	$\frac{\sqrt{3} (s_{nL} - s_{\tau L}) s_{nL}}{12 H (s_{nL} + s_{\tau L})}$	$\frac{\sqrt{3} (s_{nL} - 2 s_{\tau L})}{8 H}$
S_{2323}	$\frac{2 \sqrt{3} H s_{\tau H} s_{\tau L}}{3 (3 L^2 s_{\tau L} + 4 H^2 s_{\tau H})}$	$\frac{\sqrt{3} H s_{\tau H} s_{\tau L}}{(3 L^2 s_{\tau L} + 2 H^2 s_{\tau H})}$
S_{1313}	$\frac{2 \sqrt{3} H s_{\tau H} s_{\tau L}}{3 (3 L^2 s_{\tau L} + 4 H^2 s_{\tau H})}$	$\frac{\sqrt{3} H s_{\tau H} s_{\tau L}}{(3 L^2 s_{\tau L} + 2 H^2 s_{\tau H})}$
S_{1212}	$\frac{\sqrt{3} s_{\tau L} s_{nL}}{6 H (s_{nL} + s_{\tau L})}$	$\frac{\sqrt{3} (s_{nL} + 2 s_{\tau L})}{8 H}$

$$S_{ijkl} = S_{ijkl}(s_n, s_\tau, H, L, A, \dots)$$

Moduły Younga

$$\frac{1}{E(\mathbf{n})} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$$

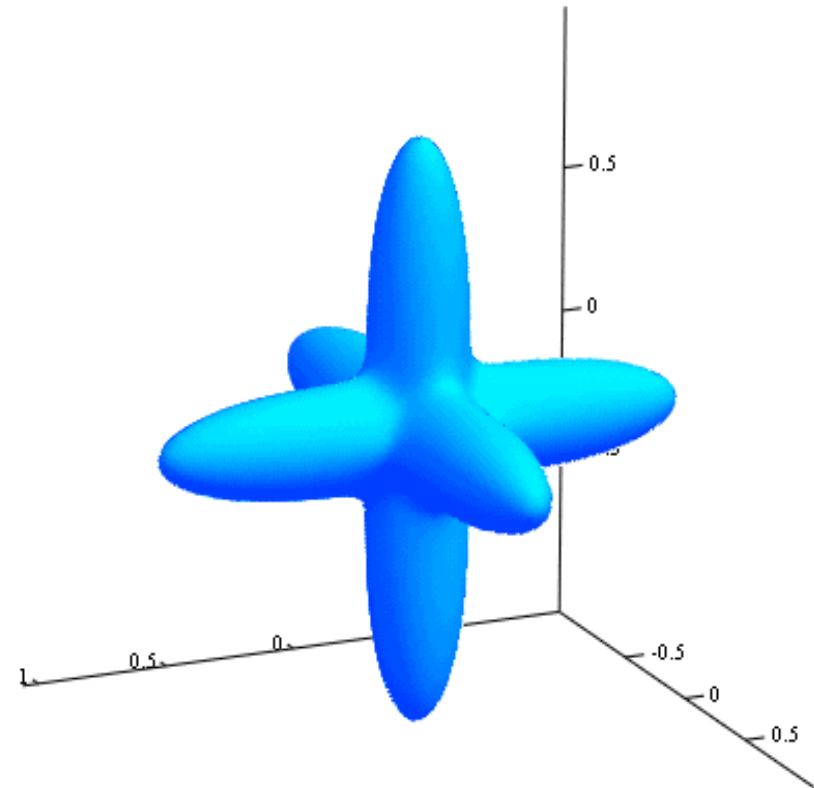
wykresy bezwymiarowe:

$$E_r(\mathbf{n}) = \frac{E(\mathbf{n})}{E_{\max}}$$

Komórka sześcienna (symetria kubiczna)

dane:

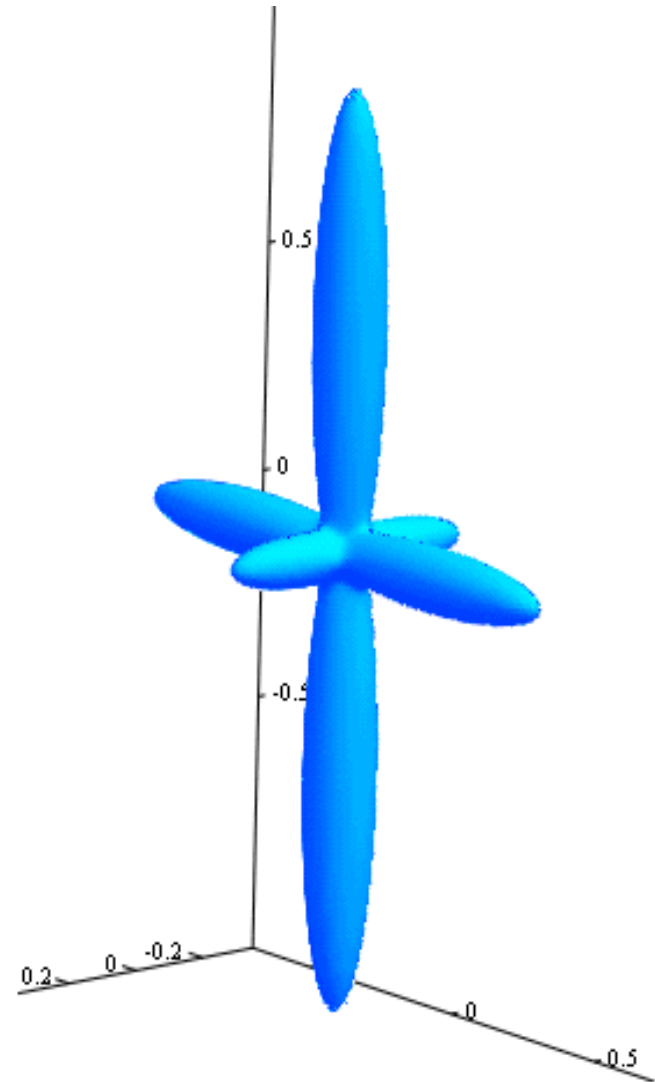
L	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



Pryzma prostokątna (symetria ortotropowa)

dane:

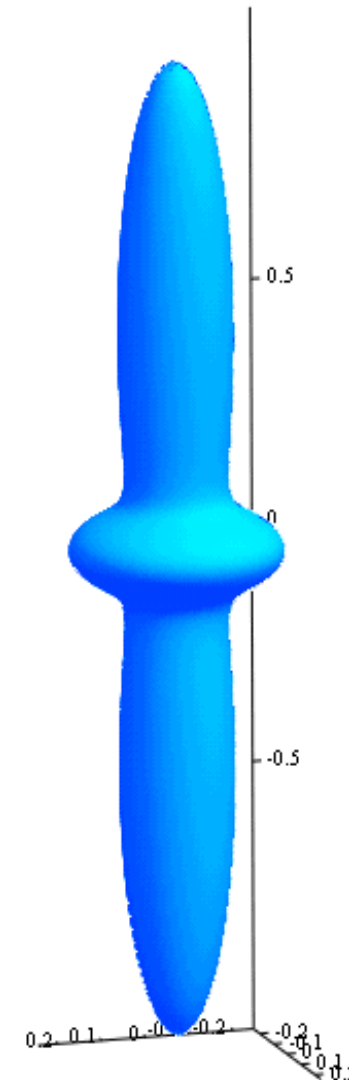
L_{12}	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
L_{34}	$2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
H	$3,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$0,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



Pryzma o podstawie trójkąta równobocznego (transwersalna izotropia)

dane:

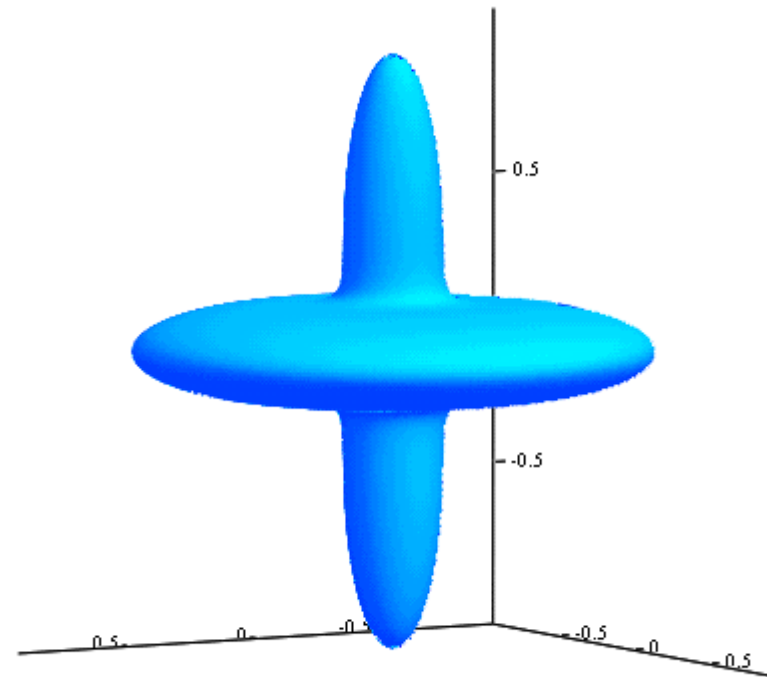
L	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
H	$2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



Pryzma o podstawie sześciokąta foremnego (transwersalna izotropia)

dane:

L	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
H	$2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



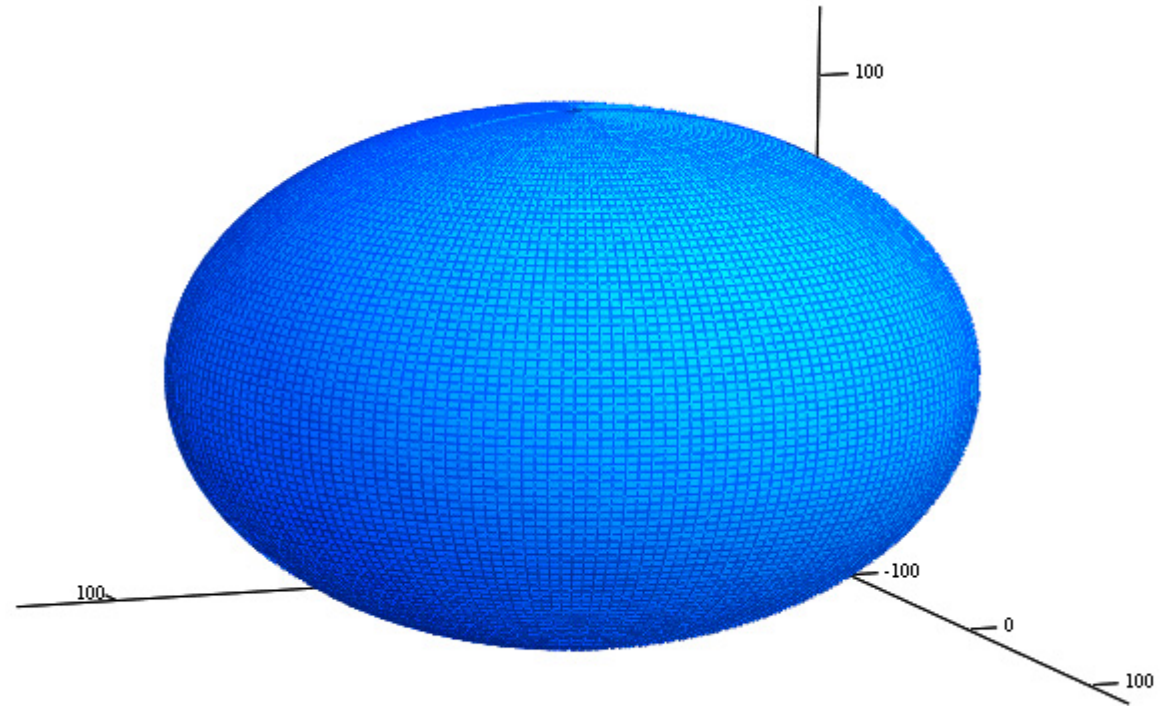
Uogólniony moduł ściśliwości

$$\frac{1}{3K(\mathbf{n})} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$$

Komórka sześcienna (symetria kubiczna)

dane:

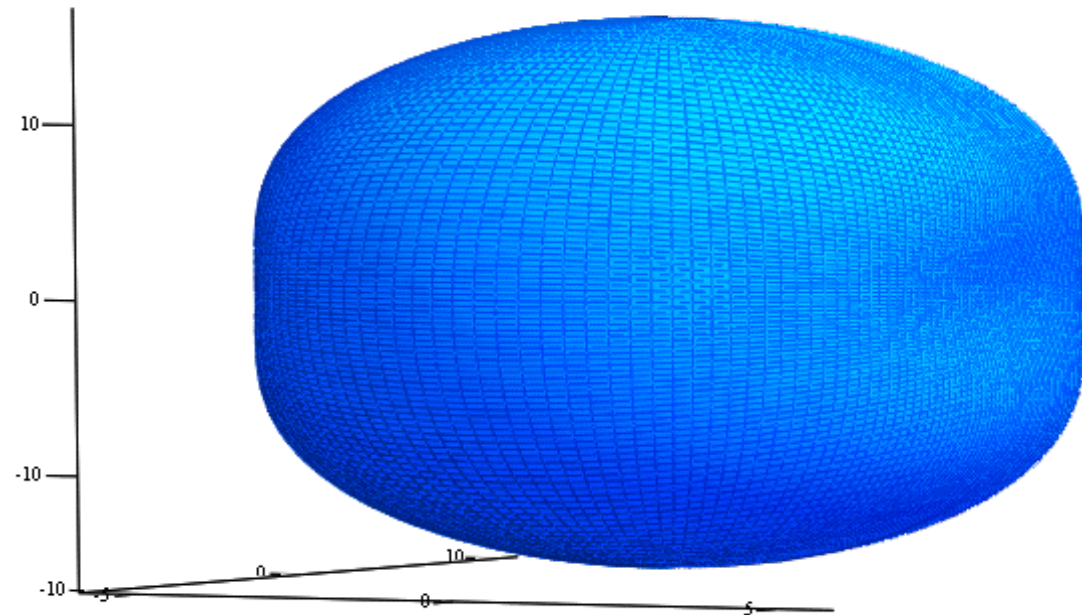
L	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



Pryzma prostokątne (symetria ortotropowa)

dane:

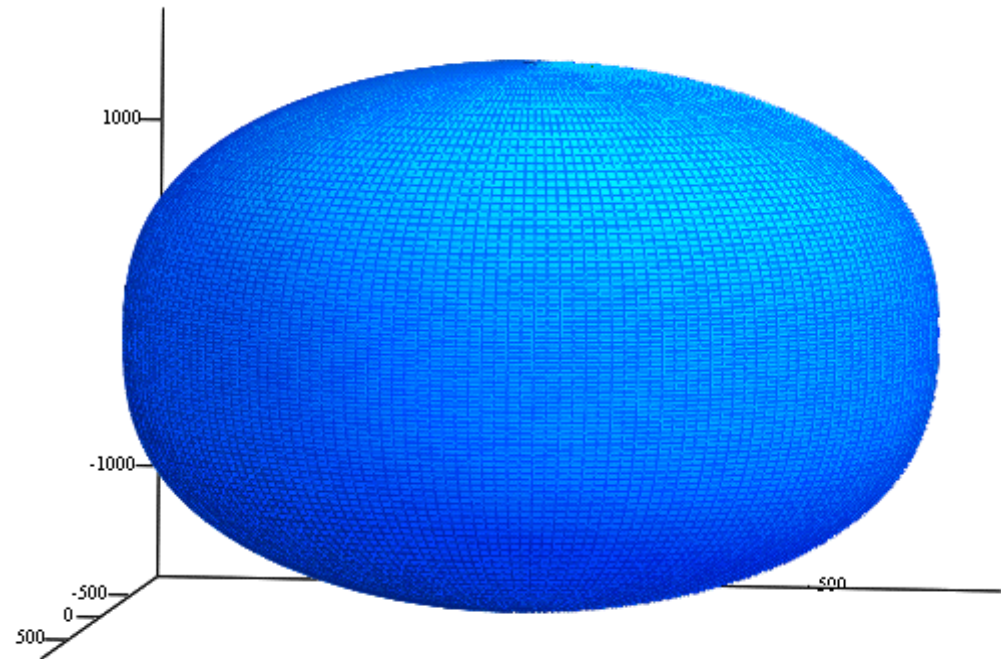
L_{12}	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
L_{34}	$2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
H	$3,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$0,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



Pryzma o podstawie trójkąta równobocznego (transwersalna izotropia)

dane:

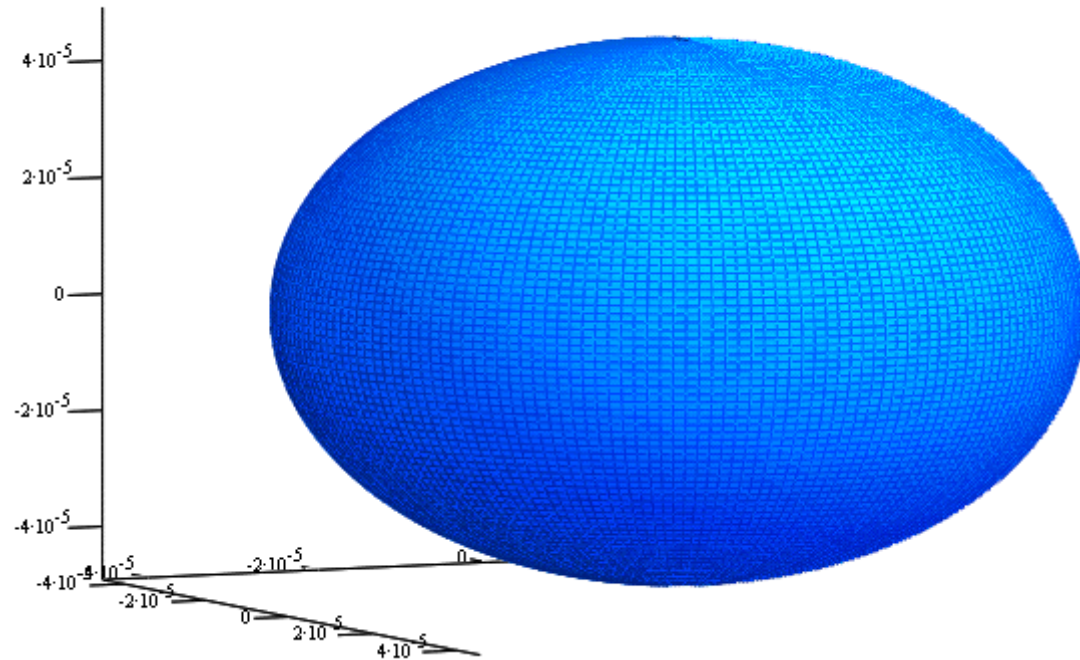
L	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
H	$2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



Pryzma o podstawie sześciokąta foremnego (transwersalna izotropia)

dane:

L	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
H	$2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



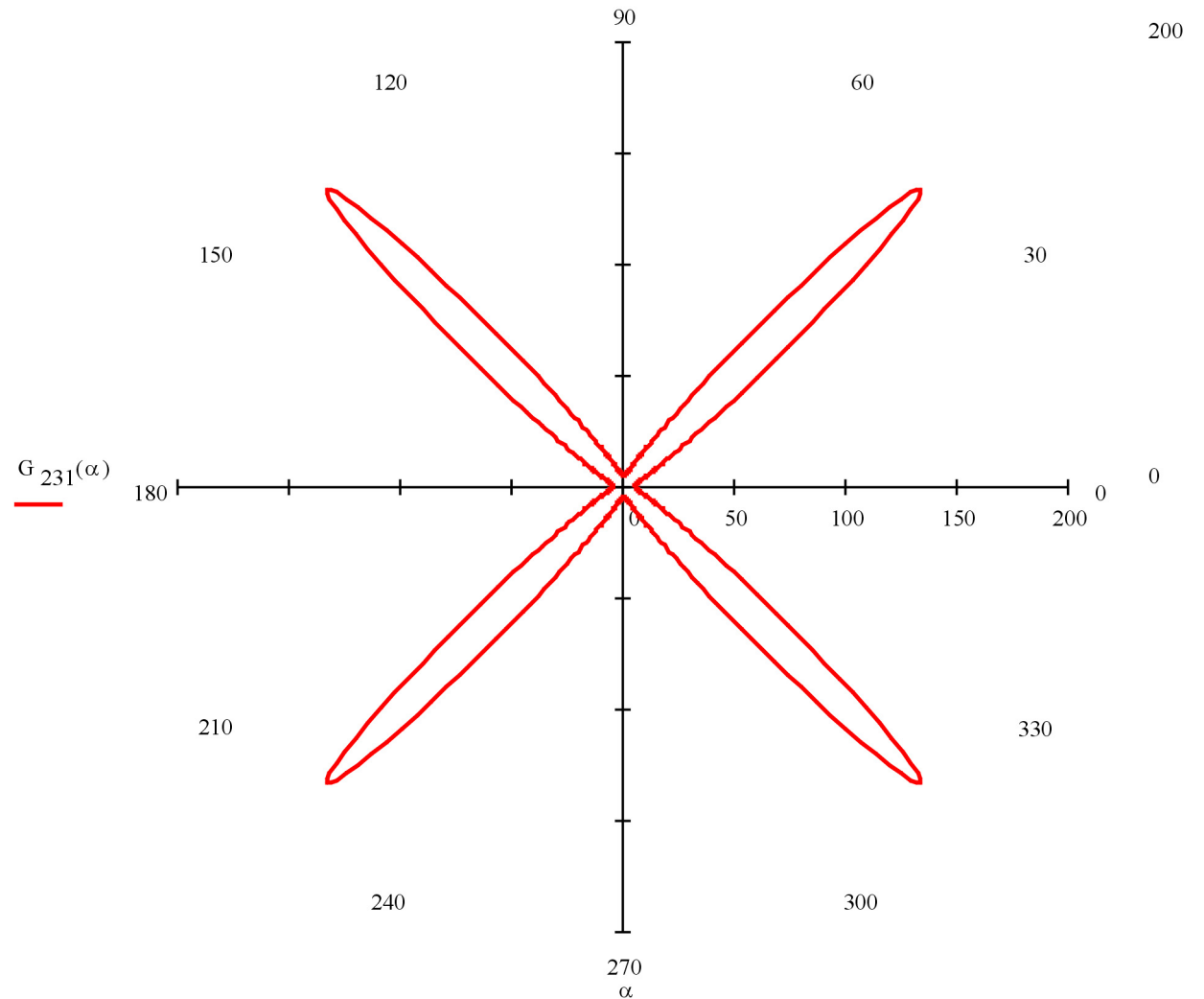
Moduł ścinania

$$\frac{1}{2G(\mathbf{n}, \mathbf{m})} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m})$$

Komórka sześcienna (symetria kubiczna)

dane:

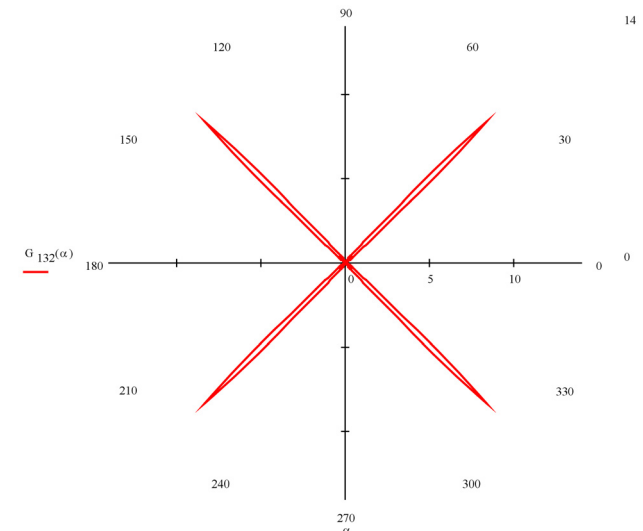
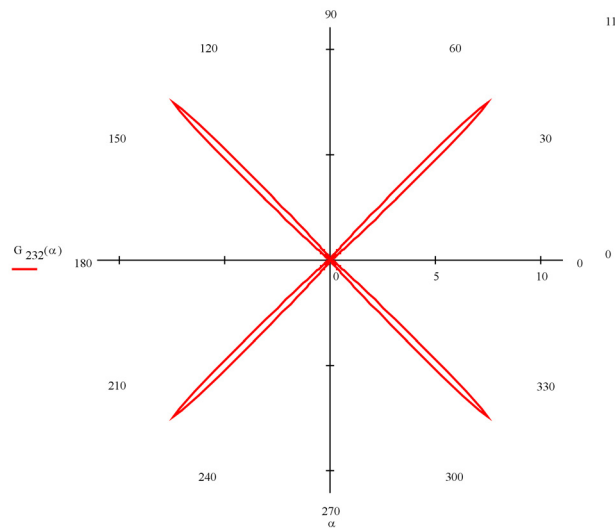
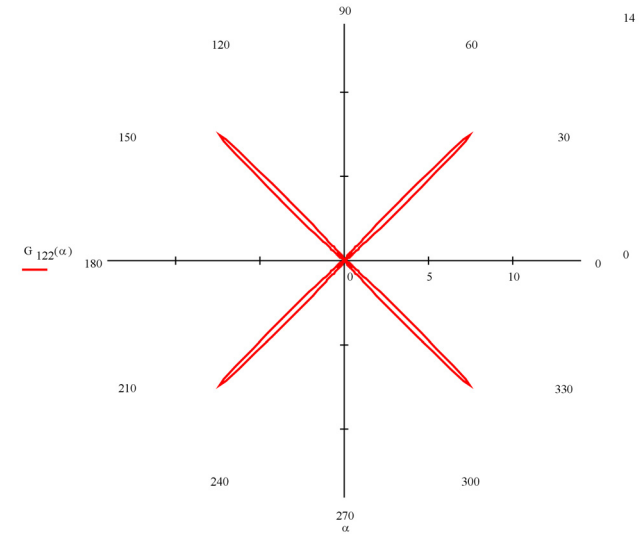
L	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



Pryzma prostokątna (symetria ortotropowa)

dane:

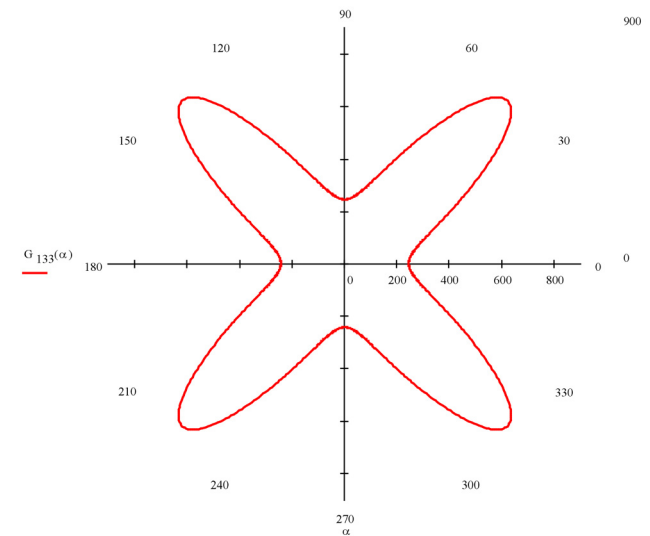
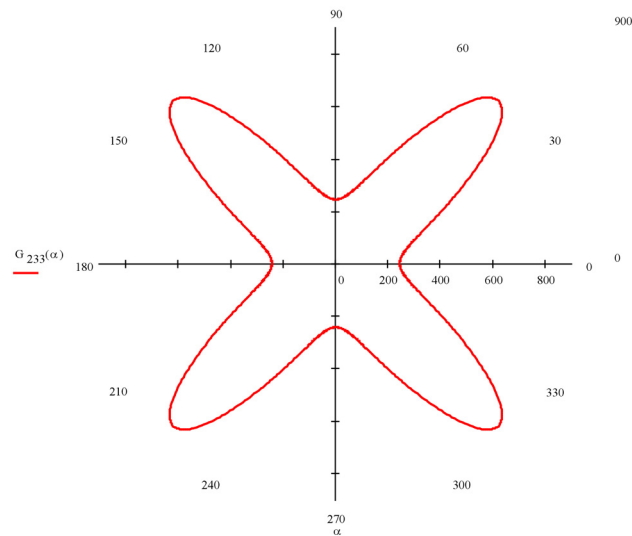
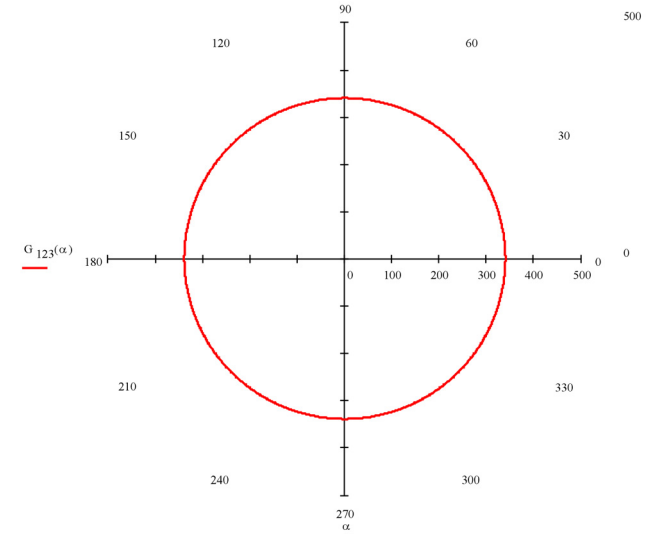
L_{12}	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
L_{34}	$2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
H	$3,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$0,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



Pryzma o podstawie trójkąta równobocznego (transwersalna izotropia)

dane:

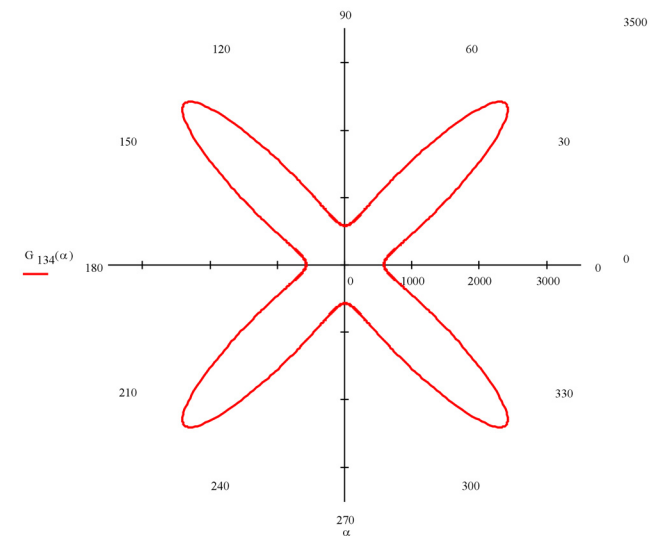
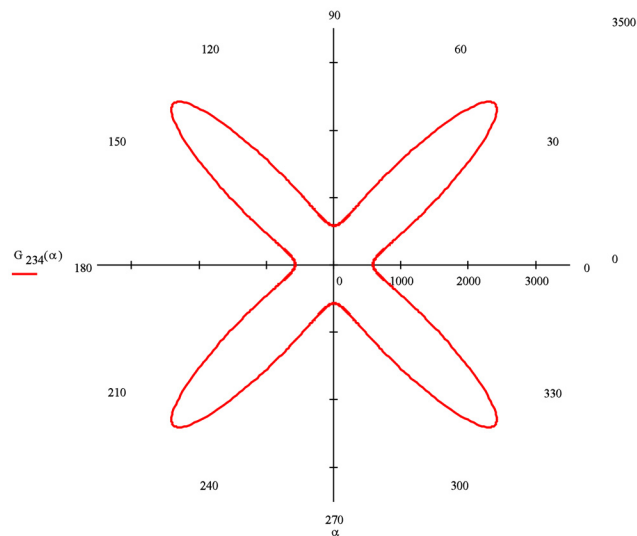
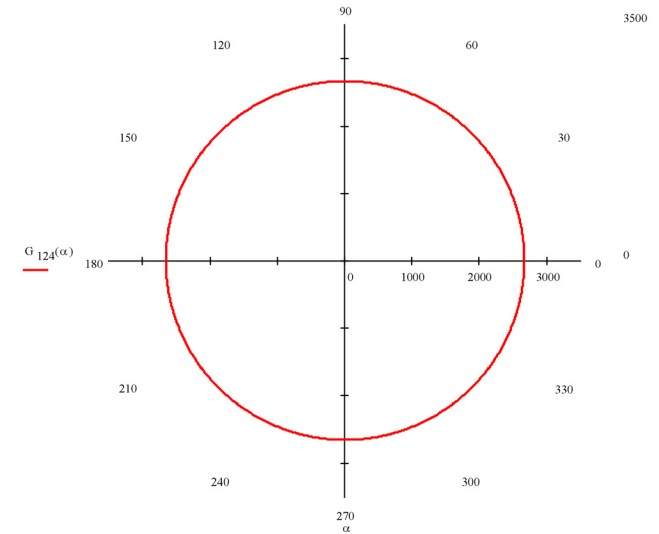
L	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
H	$2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



Pryzma o podstawie sześciokąta foremnego (transwersalna izotropia)

dane:

L	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
H	$2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



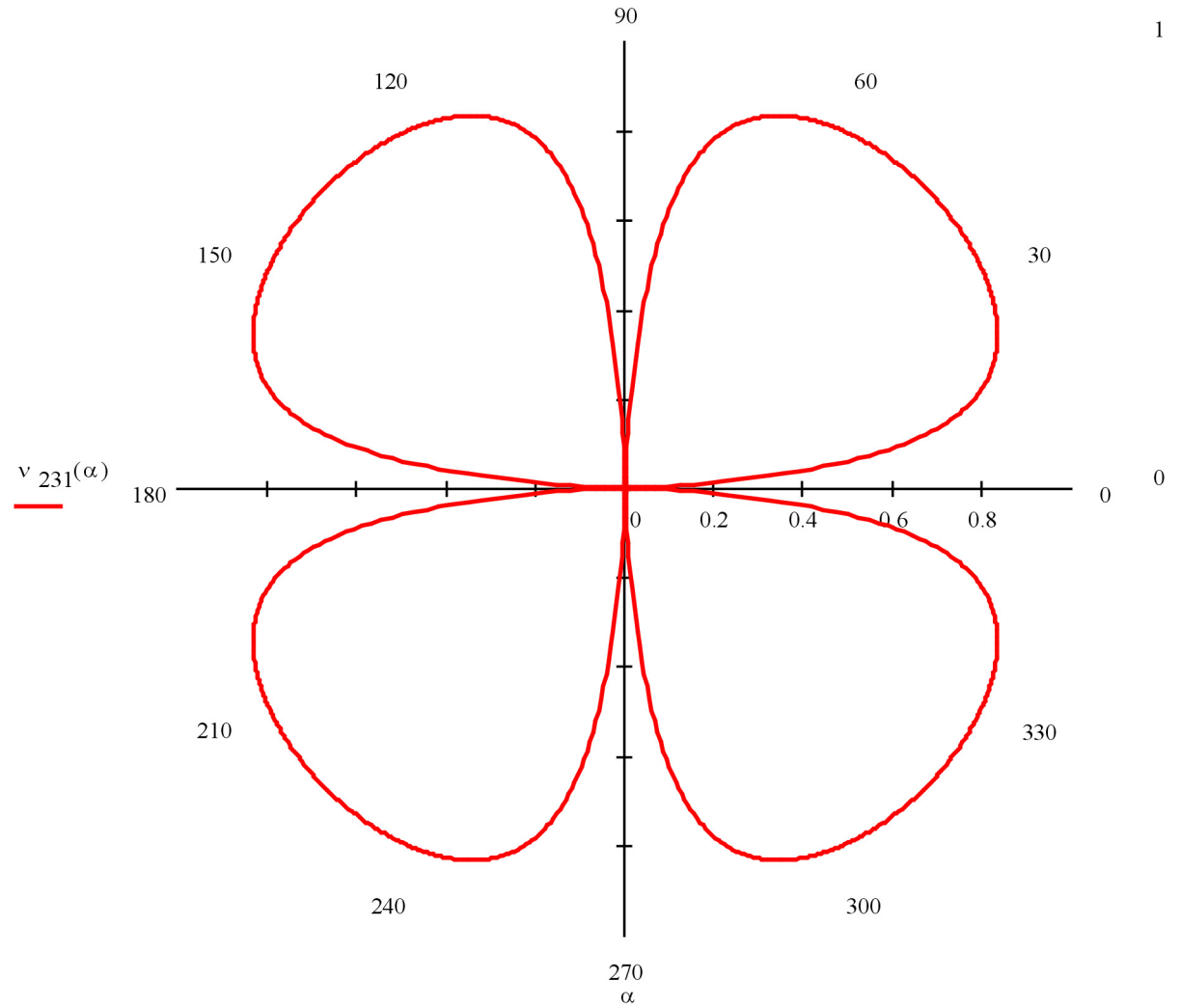
Współczynnik Poissona

$$\frac{-\nu(\mathbf{n}, \mathbf{m})}{E(\mathbf{n})} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})$$

Komórka sześcienna (symetria kubiczna)

dane:

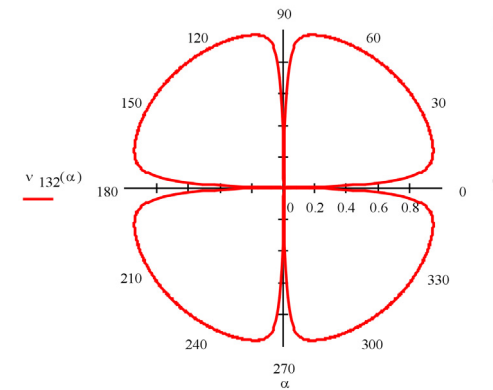
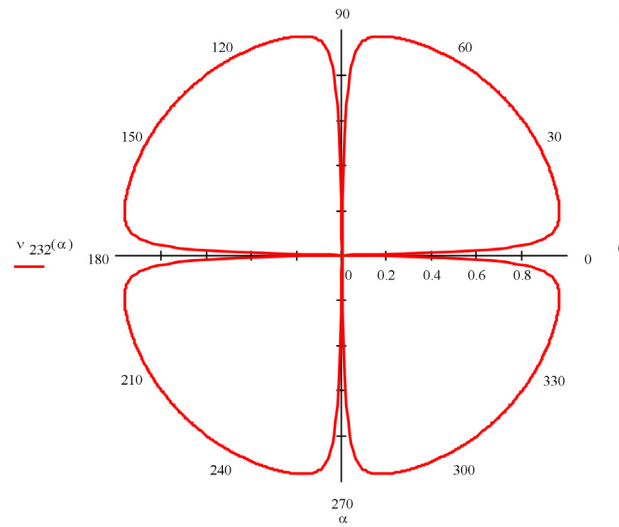
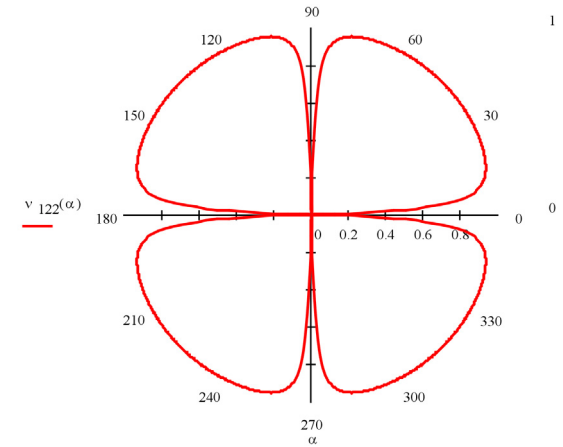
L	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



Pryzma prostokątne (symetria ortotropowa)

dane:

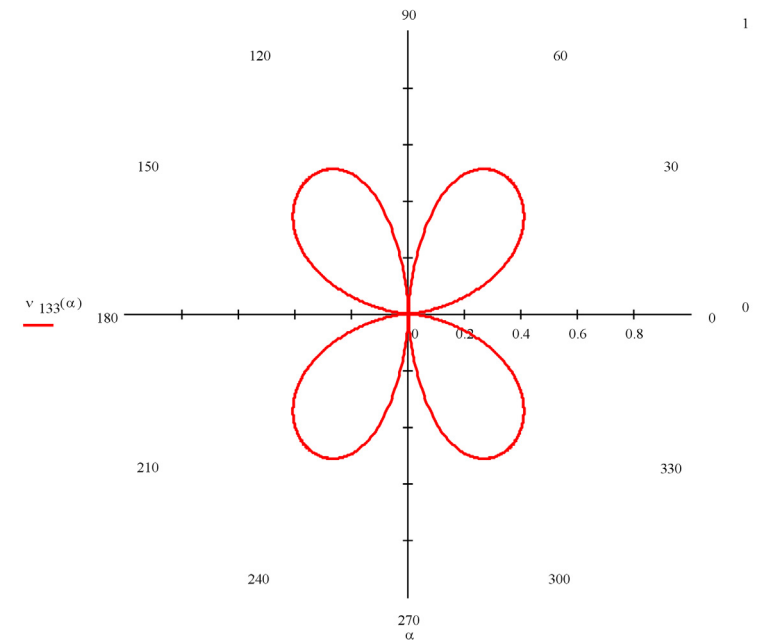
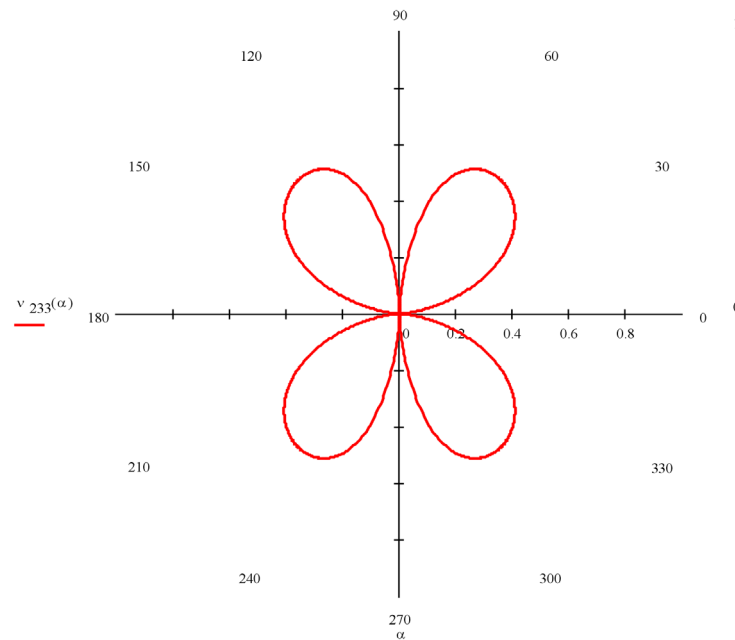
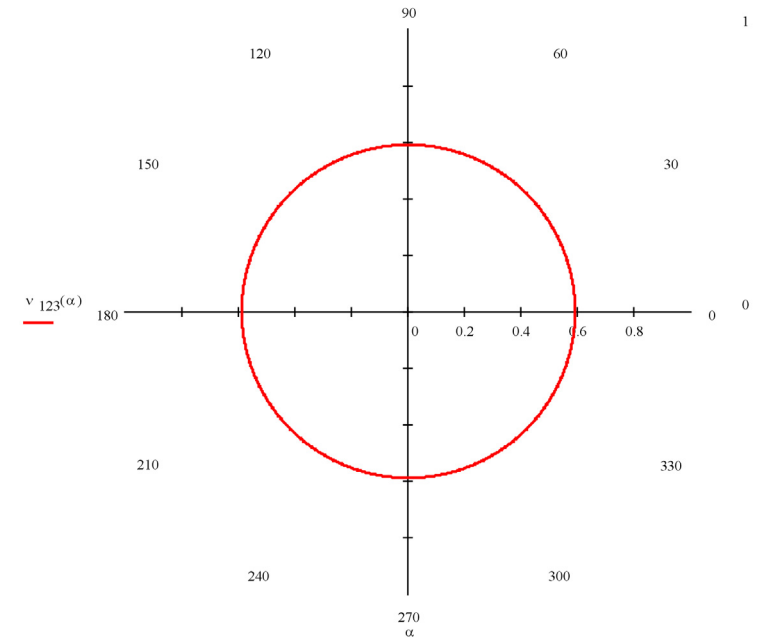
L_{12}	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
L_{34}	$2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
H	$3,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$0,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



Pryzma o podstawie trójkąta równobocznego (transwersalna izotropia)

dane:

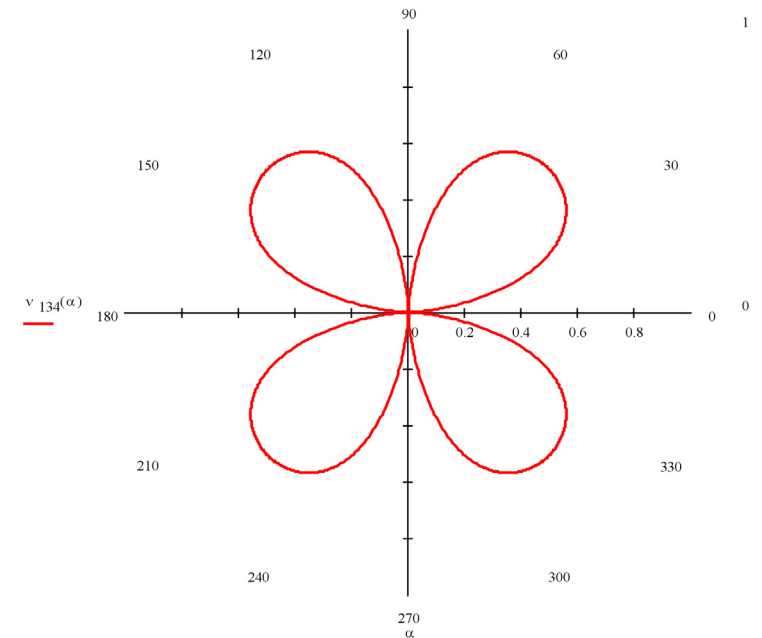
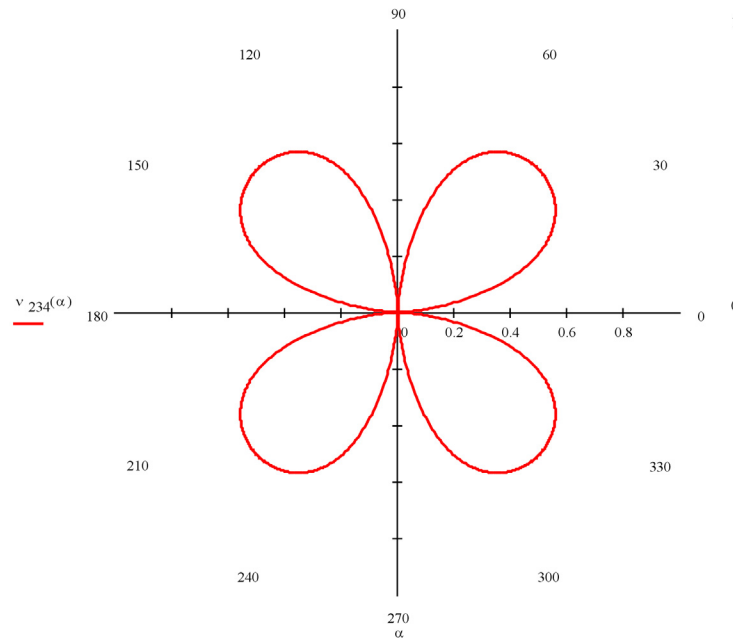
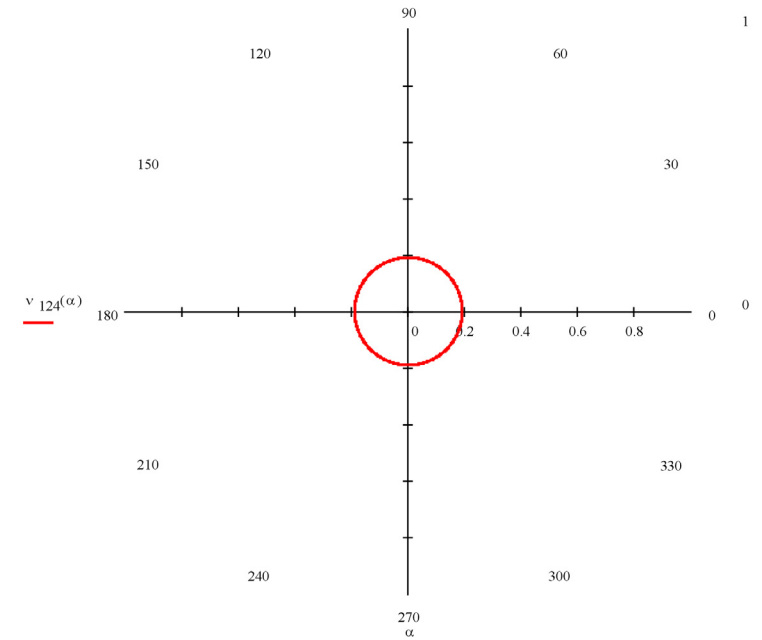
L	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
H	$2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



Pryzma o podstawie sześciokąta foremnego (transwersalna izotropia)

dane:

L	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
H	$2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
R	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
E_s	12 GPa
G_s	$4,8 \text{ GPa}$



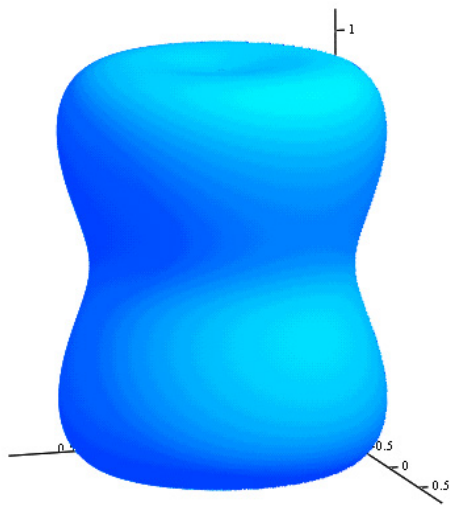
Modelowanie

- struktura krępa ograniczająca zakres zastosowania modelu belkowego
- struktura smukła (stateczność)

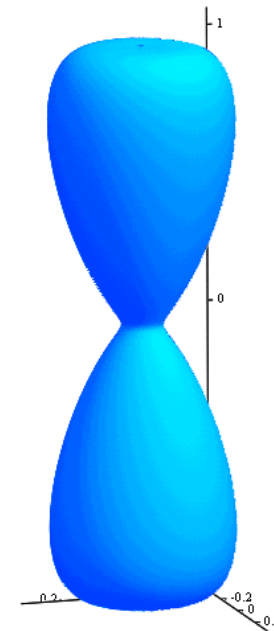
Przykład: honeycomb

wykresy bezwymiarowe:

$$E_r(\mathbf{n}) = \frac{E(\mathbf{n})}{E_{\max}}$$



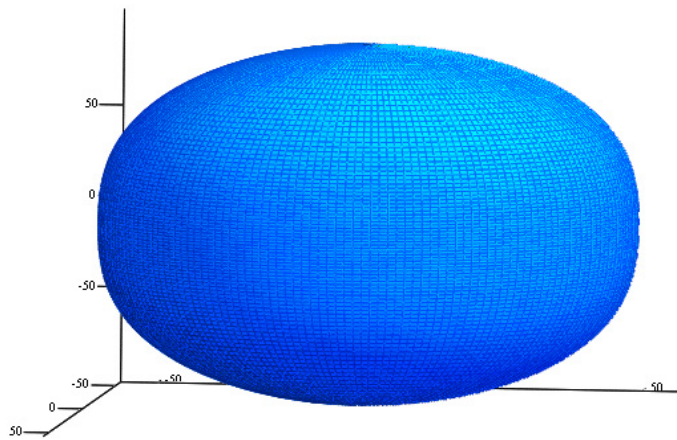
struktura krępa



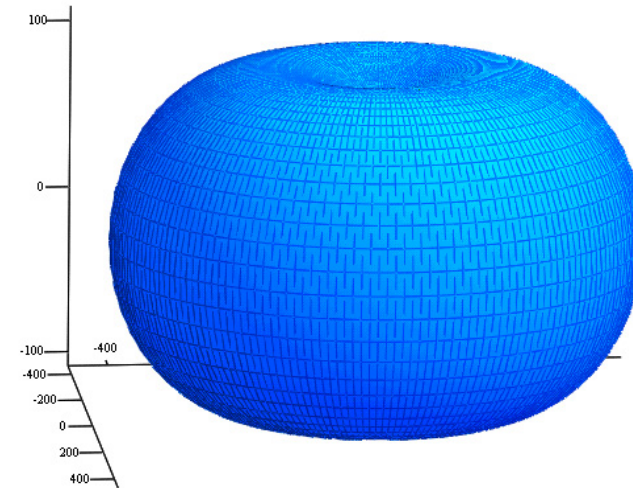
struktura smukła

Uogólniony moduł ściśliwości

$$K(\mathbf{n})$$



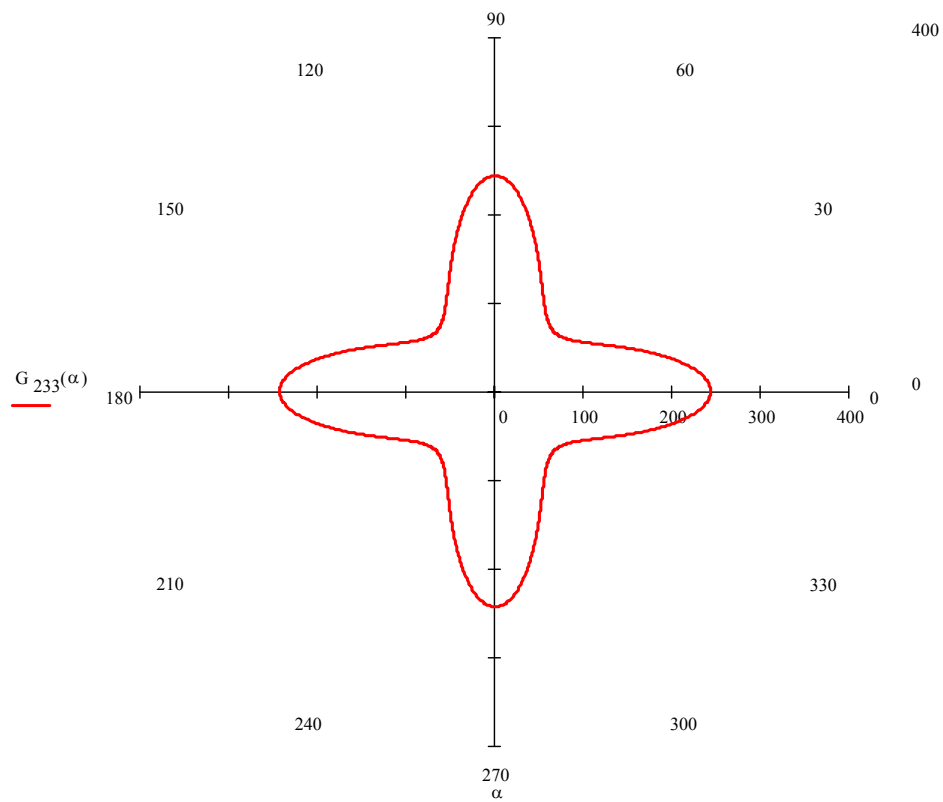
struktura krępa



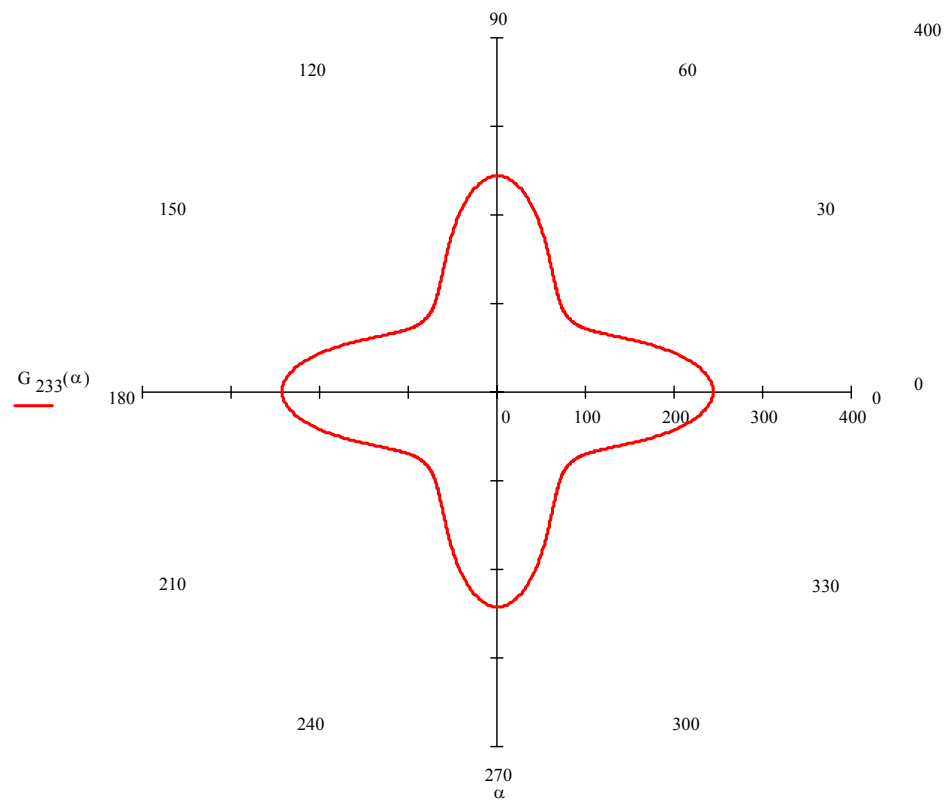
struktura smukła

Moduł ścinania

struktura krępa



struktura smukła



Wnioski:

zbudowano model efektywny dla materiałów komórkowych o komórkach otwartych (model belkowy)

rozwiązania umożliwiają modelowanie własności sprężystych poprzez zmianę parametrów struktury

zaprezentowane podejście pozwala na zbudowanie modelu efektywnego dla struktur o komórkach zamkniętych (model płytowy)

model może być rozszerzony poza zakres liniowo sprężysty (rozwiązania numeryczne)

Literatura

- [1] **L.J. Gibson, M.F. Ashby** (1997). **Cellular Solids**, 2nd edition Cambridge University Press.
- [2] **J.Rychlewski** (1984). Unconventional approach to linear elasticity, Arch. Mech., **47**, 1995, 149-171.
- [3] **S.Nemat-Naser** (1999). Micromechanics, Elsevier.
- [4] **M.Janus-Michalska, R.B.Pęcherski**, (2003). Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling, Technische Mechanik, Band 23, Heft 2-4, 234-244.
- [5] **P.Kordzikowski, M.Janus-Michalska, R.B.Pęcherski**, (2003). Analysis of the influence of the strength of the struts forming a cubic cell structure on the distribution of the energy limits, Rudy i Metale Nieżelazne, R49, No.3, 2004.