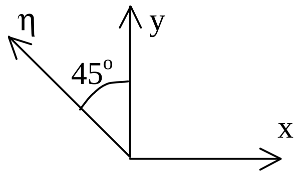
W punkcie ciała w którym panuje płaski stan **naprężenia** (płaski w płaszczyźnie x,y,η) zmierzono odkształcenia w trzech kierunkach. Znaleźć pełny tensor odkształceń w układzie xyz i naprężenia główne.

$\varepsilon_x = 10 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = 5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_\eta = 2 \cdot 10^{-4}$, $E = 2 \cdot 10^{5}$ MPa , $\nu = 0.3$

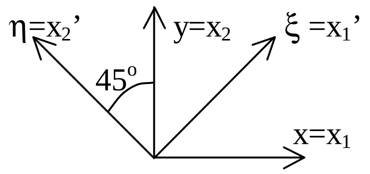


Rozwiązanie:

Podane są odkształcenia liniowe, ale nie wiadomo ile wynoszą odkształcenia kątowe w jakimkolwiek układzie współrzędnych. Trzeba znaleźć odkształceni kątowe w płaszczyźnie xy, czyli w układzie x,y. Następnie wykorzystując informację że mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia, obliczymy odkształcenie liniowe w kierunku prostopadłym do płaszczyzny xy, czyli w kierunku równoległym do osi z

Macierz przejścia z układu xyz od $\xi\eta z$ (obrócony o kąt b): **a**

(Oś $z = x_3 = \zeta = x_3'$ jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. Pierwsza równość wynika z tego że tą samą oś różnie nazywamy w zapisie „inżynierskim" i wskaźnikowym. Ta sama uwaga dotyczy trzeciej równości. Równość druga wynika z tego że transformacja układu x_i do x_i' jest obrotem wokół osi z, czyli jej położenie po transformacji nie ulega zmianie.)



b = 45 °

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \cos b & \sin b & 0 \\ -\sin b & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Prawo transformacji dla odkształceń: $\varepsilon_{ij}' = a_{ik}\, a_{jl}\, \varepsilon_{kl}$

Wyrazimy znane ε_η poprzez znane ε_x i ε_y oraz nieznane ε_{xy}

$$\begin{aligned} \varepsilon_\eta = \varepsilon_{22}' = \quad & a_{21} a_{21} \varepsilon_{11} + \quad a_{21} a_{22} \varepsilon_{12} + \quad a_{21} a_{23} \varepsilon_{13} + \\ & a_{22} a_{21} \varepsilon_{21} + \quad a_{22} a_{22} \varepsilon_{22} + \quad a_{22} a_{23} \varepsilon_{23} + \\ & a_{23} a_{21} \varepsilon_{31} + \quad a_{23} a_{22} \varepsilon_{32} + \quad a_{23} a_{23} \varepsilon_{33} = \\ = \quad & 0{,}5\, \varepsilon_x + \quad (-0{,}5)\, \varepsilon_{xy} + \quad 0 + \\ & (-0{,}5)\, \varepsilon_{xy} + \quad 0{,}5\, \varepsilon_y + \quad 0 + \; 0+0+0 \end{aligned}$$

Niewiadomą ε_{xy} przenosimy na lewą stronę:

$$\varepsilon_{xy} = 0{,}5\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \varepsilon_\eta = 10^{-4}\,[0{,}5\,(10+5)-2] = 5{,}5 \cdot 10^{-4}$$

Mamy płaski stan **naprężenia** w płaszczyźnie x,y czyli $\sigma_z = 0$

$$\sigma_z = 2G\,\varepsilon_z + \lambda\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon_z = -(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\,\lambda/(2G+\lambda) = -(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\,\nu/(1-\nu) = -15 \cdot 10^{-4}\; 0{,}3/0{,}7 = -6{,}43 \cdot 10^{-4}$$

Ostatecznie mamy tensor odkształceń w układzie xyz : $\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 10 & 5,5 & 0 \\ 5,5 & 5,0 & 0 \\ 0 & 0 & -6,43 \end{bmatrix} 10^{-4}$

Stałe materiałowe: $2G = E / (1+\nu) = 1,538 * 10^{5}$ MPa

$\lambda = E\,\nu / [(1+\nu)(1-2\nu)] = 1,154 * 10^{5}$ MPa

Naprężenie styczne: $\tau_{xy} = 2G\,\varepsilon_{xy} = 84,6$ MPa

Naprężenia normalne:

$\sigma_x = 2G\,\varepsilon_x + \lambda\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) =$

$1,538*10^{5}$ MPa $10 * 10^{-4}$ + 98,9 MPa = 252,7 MPa

$\sigma_y = 2G\,\varepsilon_y + \lambda\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) =$

$1,538*10^{5}$ MPa $5 * 10^{-4}$ + 98,9 MPa = 175,8 Mpa

$\sigma_z = 2G\,\varepsilon_z + \lambda\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) =$

$1,538*10^{5}$ MPa $(-6,43) * 10^{-4}$ + 98,9 MPa = 0 (sprawdzenie ok.)

Tensor naprężeń w ukł. xyz: $\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} 252,7 & 84,6 & 0 \\ 84,6 & 175,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa

Naprężenia główne:

$\sigma_{1,2} = 0,5\,(\sigma_x + \sigma_y) \pm 0,5\,[(\sigma_x - \sigma_y)^{2} + 4\,\tau_{xy}^{2}]^{0,5}$

$\sigma_1 = 307,2$ MPa

$\sigma_2 = 121,3$ MPa