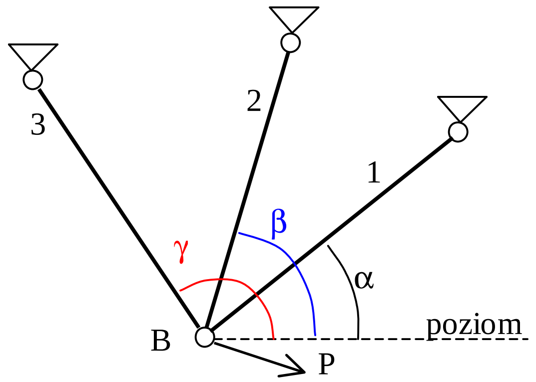
Rozwiązać podany ustrój.



Ustrój składa się z trzech prętów prostych połączonych przegubowo. Pręty 1,2,3 są ustawione pod kątem α,β,γ -odpowiednio. Obciążenie stanowi siła P- znane są jej składowe: pozioma i pionowa. O prętach kratowych wiadomo jakie są ich długości l_i, pola przekroju poprzecznego F_i, oraz znane są moduły sprężystości E_i. Dla każdego pręta rozciąganego wytrzymałość na rozciąganie jest większa niż wartość naprężeń rozciągających. Dla każdego pręta ściskanego wytrzymałość na ściskanie jest większa niż wartość bezwzględna naprężeń ściskających.

Dane: α, β, γ, P_x, P_y, l_i, F_i, E_i Szukane: N_i, Δ_i - 6 niewiadomych

W pierwszej kolejności należy znaleźć siły podłużne w prętach, następnie można wyliczyć zmiany długości prętów.

Rozwiązanie:

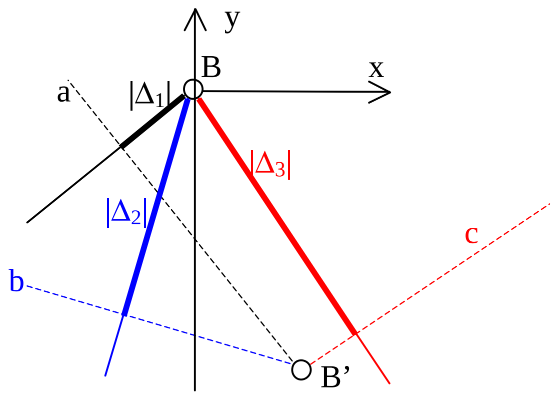
Jak widać trzeba znaleźć i rozwiązać 6 równań.

Równania równowagi dla węzła B: ΣX, ΣY - 2 równania (1,2)

Zmiana długości każdego pręta:

$$\Delta_i = \frac{N_i l_i}{E_i F_i} \quad \text{-3 równania} \qquad (3,4,5)$$

Ustrój jest **1**-krotnie statycznie niewyznaczalny więc należy ułożyć dokładnie **1** równanie zgodności przemieszczeń. W tym celu narysowano otoczenie węzła B w skali znacząco większej niż rysunek ustroju. Symbolem B oznaczono położenie węzła przed przyłożeniem obciążenia, symbolem B' oznaczono położenie węzła po przyłożeniu obciążenia. Ten plan przemieszczeń musi być **kinematycznie dopuszczalny**. Położenie punktu B' w stosunku do B jest nieznane, ponieważ w węźle B nie ma dodatkowej podpory (np. przegubowo-przesuwnej która determinowała by kierunek przesuwu, czyli odcinka BB') więc należy punkt B' umieścić w dowolnym miejscu, ale w sposób jak najbardziej ogólny - tzn. w takim który by nie sugerował jakiejś niezamierzonej współliniowości odcinków.



Liniami ciągłymi zaznaczono kierunki prętów, pogrubiono odcinki odpowiadające zmianom długości prętów. Liniami przerywanymi zaznaczono kierunki prostych prostopadłych do prętów. W szczególności prosta a jest prostopadła do pręta 1 i przechodzi przez punkt B' .

Na rysunku zmiana długości każdego pręta została przedstawiona w ten sposób że $|\Delta_i| = \Delta_i$

Jak wcześniej nadmieniono prosta a jest prostopadła do pręta 1, więc jej (prostej a) współczynnik kierunkowy wynosi $tg(\alpha+90^o)$.

Prosta a przecina oś y w odległości $\Delta_1/\sin\alpha$ pod punktem B, ponieważ pomiędzy osią y i prostą a jest zawarty kąt α tak jak pomiędzy osią x a prętem 1.

Reasumując równanie prostej a w układzie x,y związanym z punktem B ma postać:

a: $y = tg(\alpha+90^o)\,x - \Delta_1/\sin\alpha$

Postępując analogicznie dla pręta 2 i 3 znajdziemy równanie dla prostej b i c

b: $y = tg(\beta+90^o)\,x - \Delta_2/\sin\beta$

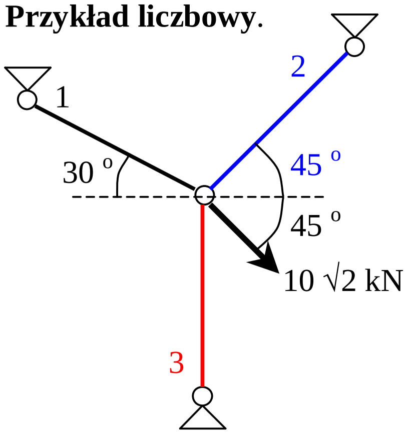
c: $y = tg(\gamma+90^o)\,x - \Delta_3/\sin\gamma$

Wszystkie trzy proste a,b,c przechodzą przez punkt B' więc x i y spełniające powyższe trzy równania są współrzędnymi punktu B' względem B.
Z równań prostych a,b,c można wyrugować x i y, po przekształceniach otrzymamy równanie zgodności przemieszczeń:

$$\Delta_1 \sin(\beta-\gamma)+\Delta_2 \sin(\gamma-\alpha)+\Delta_3 \sin(\alpha-\beta)= 0 \qquad (6)$$

Rozwiązując układ równań (1-6) znajdziemy niewiadome siły i zmiany długości.

Przykład liczbowy.



Z rysunku wynika że:
$\alpha = 150^o$, $\beta = 45^o$, $\gamma = -90^o$, P_x=10 kN, P_y= -10 kN
Niech: $l_i/(E_i\, F_i)$=const =c_i -dla każdego pręta.

Równanie kinematyczne:

$$\Delta_1 \sin(45^o+90^o)+\Delta_2 \sin(-90^o -150^o)+\Delta_3 \sin(150^o -45^o)= 0$$

po skróceniu przez c_i otrzymamy:

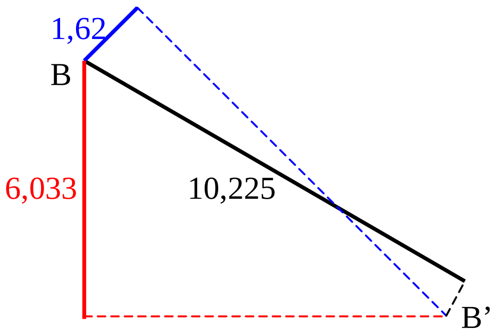
$$N_1\, 0{,}707 + N_2\, 0{,}866 + N_3\, 0{,}966= 0$$

Równania statyki:

ΣX: $\quad -N_1 \cos30^o + N_2 \cos45^o + 10 = 0$

ΣY: $\quad N_1 \sin30^o + N_2 \sin45^o - N_3 - 10 = 0$

Po rozwiązaniu ostatnich trzech równań otrzymamy
N_1 = 10,225 kN $\quad$ N_2 = -1,62 kN $\quad$ N_3 = -6,033 kN
Wydłużenia (skrócenia) prętów wyniosą:
Δ_1 = 10,225 kN c_i $\quad$ Δ_2 = -1,62 kN c_i $\quad$ Δ_3 = -6,033 kN c_i



Powyższe wartości pozwolą na naszkicowanie rzeczywistego planu przemieszczeń w jednostkach [kN c_i] .
Pręt 1 uległ wydłużeniu, pręty 2 i 3 skróceniu, rysując plan przemieszczeń uwzględniono te fakty.