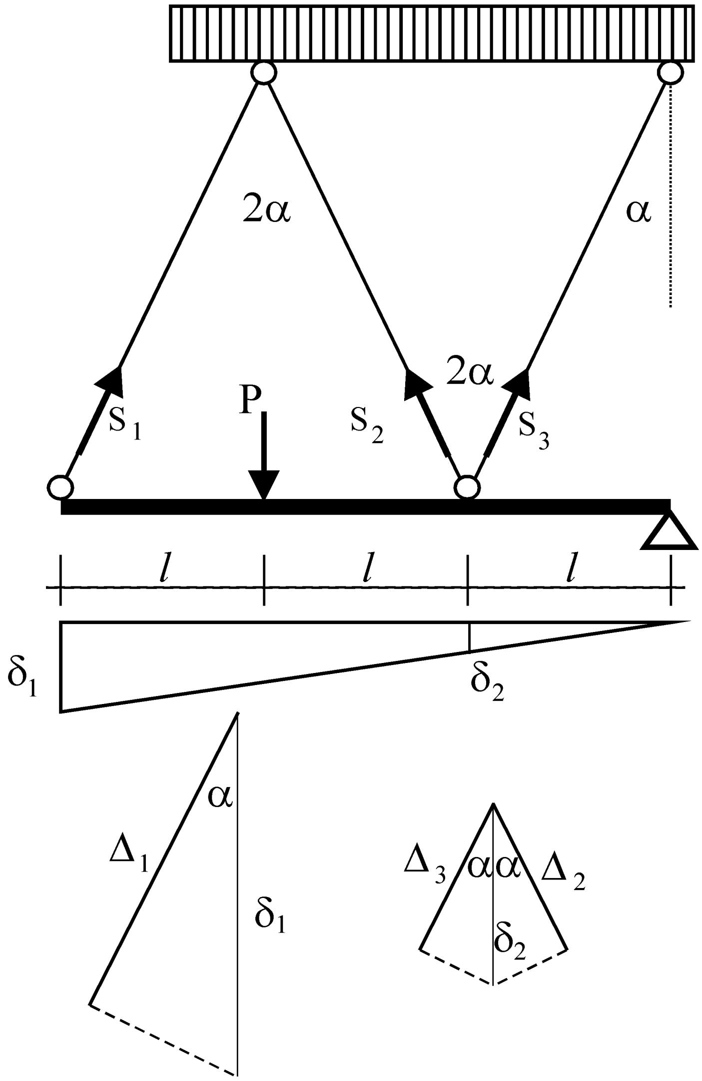
W podanym układzie idealnie sztywna pozioma belka została podparta przegubowo w jednym punkcie i podwieszona do sufitu trzema idealnie sprężystymi prętami ustawionymi pod kątem $\alpha = 24{,}62^o$ w stosunku do pionu, ich moduły Younga $E_i = E = 200$ GPa , pola przekroju poprzecznego $A_i = A = 5\ cm^2$. Poziomy wymiar $l = 1{,}25$ m , wartość pionowej siły P = 20 kN . Wyznaczyć siły w prętach: S_1 , S_2 , S_3 [kN] oraz pionowe przemieszczenia: δ_1 , δ_2 [mm] .



Gdyby belka była podwieszona jednym prętem, z równania statyki: sumy momentów względem podpory, dałoby się wyznaczyć siłę w pręcie. Ustrój byłby statyczne wyznaczalny. Ustrój pokazany obok ma dwa pręty więcej - jest 2-krotnie statycznie niewyznaczalny, trzeba będzie ułożyć dwa równania zgodności przemieszczeń. Aby znaleźć trzy niewiadome siły, potrzeba jeszcze jednego równania, będzie to równanie statyki: suma momentów względem podpory:

$\Sigma M_{(pod)} = 0 \quad \Rightarrow$

$(S_1\, 3l + S_2\, l + S_3\, l) \cos\alpha - P\, 2l = 0$

W równaniu tym nie wystąpią reakcje podpory przegubowej.

Poniżej belki pokazano kinematycznie dopuszczalny (obrót belki wokół podpory) plan przemieszczeń. Jeszcze niżej przedstawiono rysunki pokazujące związki pomiędzy pionowymi przemieszczeniami punktów przyczepienia prętów do belki δ_i , a wydłużeniami prętów Δ_i które muszą być równoległe do osi prętów. Z rysunków tych wywnioskować można że:

$\delta_1 = 3\ \delta_2$

$\Delta_1 = \delta_1 \cos\alpha$, $\boldsymbol{\Delta_2 = \Delta_3} = \delta_2 \cos\alpha$

czyli: $\boldsymbol{\Delta_1} = 3\ \dfrac{\Delta_2}{\cos\alpha} \cos\alpha = \mathbf{3\ \Delta_2}$

Relacje wyróżnione tłustym drukiem są poszukiwanymi równaniami kinematycznymi. Wynika z nich:

$$\frac{S_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{S_3 l_3}{E_3 A_3} \quad , \quad \frac{S_1 l_1}{E_1 A_1} = 3 \frac{S_2 l_2}{E_2 A_2}$$ Po uproszczeniu mamy:

$S_2 = S_3$, $S_1 = 3\ S_2$ Wstawiając te dwa równania do równania statyki otrzymamy:

$3\ S_2\ 3 + S_2 + S_2 = 2\ P / \cos\alpha$ czyli: $S_2 = \dfrac{2}{11} \dfrac{P}{\cos\alpha} = 4\ \text{kN} = S_3$, $S_1 = 12$ kN

Naprężenia normalne w prętach wyniosą:

$\sigma_1 = \dfrac{12 \cdot 10^3\, N}{5 \cdot 10^{-4}\, m^2} = 2{,}4\ 10^7$ Pa = 24 MPa , $\sigma_2 = \sigma_3 = 8$ MPa

Długości prętów wynoszą: $l_1 = l_2 = l_3 = l / \sin\alpha = 3$ m

Wydłużenie pierwszego pręta wyniesie: $\Delta_1 = \dfrac{\sigma_1 l_1}{E_1} = \dfrac{24 \cdot 10^6\, Pa \cdot 3m}{200 \cdot 10^9\, Pa} = 0{,}36\ 10^{-3}$ m = 0,36 mm

Pionowe przemieszczenia wyniosą: $\delta_1 = \Delta_1 / \cos\alpha = 0{,}396$ mm , $\delta_2 = \delta_1 / 3 = 0{,}132$ mm

Przeanalizujmy jeszcze następujący problem: w zadaniu jak wyżej przy ustalonym wymiarze poziomym l = 1,25 m dobrać kąt α tak by przemieszczenie belki δ_1 było minimalne.

Siła w pierwszym pręcie: $S_1 = 3\, S_2 = \dfrac{6}{11}\dfrac{P}{\cos\alpha}$

Wydłużenie pierwszego pręta: $\Delta_1 = \dfrac{S_1 l_1}{A_1 E_1} = \dfrac{6}{11}\dfrac{P}{\cos\alpha}\,\dfrac{l}{\sin\alpha}\,\dfrac{1}{A_1 E_1}$

Pionowe przemieszczenie belki: $\delta_1 = \dfrac{\Delta_1}{\cos\alpha} = \dfrac{6}{11}\dfrac{P}{E_1 A_1}\, l\, \dfrac{1}{\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}$ będzie minimalne wtedy gdy

funkcja: $f(\alpha) = \cos^2\alpha\ \sin\alpha$ osiągnie maksimum.

$\dfrac{\partial f}{\partial\alpha} = 2\cos\alpha\,(-\sin\alpha)\sin\alpha + \cos^2\alpha\cos\alpha = 0 \ \Rightarrow\ 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha\ 0 \ \Rightarrow\ tg^2\alpha = 0{,}5 \ \Rightarrow$

$tg\,\alpha = 1/\sqrt{2} \ \Rightarrow\ \alpha = 35{,}264^o$

Dla takiego kąta, wydłużenie pręta: Δ_1= 0,2893 mm , pionowe przemieszczenie: δ_1 = 0,3543 mm osiągają wartości minimalne.