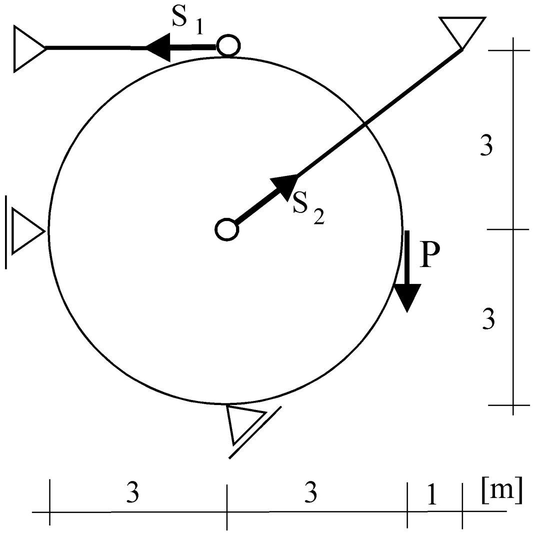
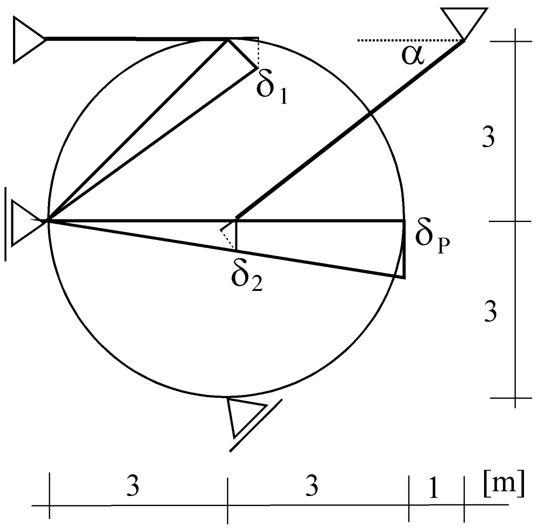
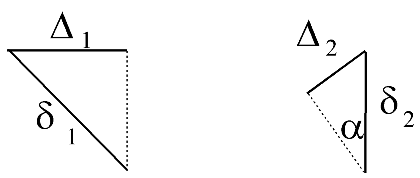
W podanym układzie idealnie sztywna kołowa tarcza została podparta dwiema podporami przegubowo-przesuwnymi i podwieszona dwoma idealnie sprężystymi prętami, ich moduły Younga: E_i=E=100 GPa , pola przekrojów poprzecznych: A_1 = 6 cm^2 , A_2 = 8,333 cm^2 . Długości prętów: l_1 = 3 m , l_2 = 5 m , wartość pionowej siły P = 13 kN . Wyznaczyć siły w prętach: S_1 , S_2 [kN] oraz pionowe przemieszczenie punktu przyłożenia siły : δ_P [mm] .



Gdyby belka była podwieszona jednym prętem, z równania statyki: sumy momentów względem lewej podpory przegubowo-przesuwnej (nie występują w nim niewiadome reakcje od podpór), dałoby się wyznaczyć siłę w pręcie. Ustrój byłby statyczne wyznaczalny. Ustrój pokazany obok ma jeden pręt więcej - jest 1-krotnie statycznie niewyznaczalny, trzeba będzie ułożyć jedno równanie zgodności przemieszczeń. Aby znaleźć dwie niewiadome siły, potrzeba jeszcze jednego równania, będzie to równanie statyki: suma momentów względem lewej podpory przegubowo-przesuwnej.

Siłę S_2 w środku koła rozłożono na składowe, pionowa wynosi: $0{,}6\ S_2$.
$\Sigma M_{(l.pod)} = 0 \Rightarrow$ 6m P - 3m 0,6 S_2 - 3m S_1 = 0 , czyli: $2\ P = 0{,}6\ S_2 + S_1$ (a)





Obok pokazano kinematycznie dopuszczalny (obrót tarczy wokół lewej podpory) plan przemieszczeń. Obrót tarczy o kąt ω jest sztywny, czyli końce prętów przyczepione do tarczy zataczają łuki, w przybliżeniu zastąpione odcinkami prostopadłymi (δ_1 , δ_2) do promieni wodzących tych punktów. Kąt ω jest mały

$$\omega \approx \text{tg}\ \omega = \frac{\delta_1}{3\sqrt{2}} = \frac{\delta_2}{3} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = \sqrt{2}\ \delta_2 \qquad \text{(b)}$$

Poniżej przedstawiono rysunki pokazujące związki pomiędzy przemieszczeniami punktów przyczepienia prętów do tarczy δ_i , a wydłużeniami prętów Δ_i które muszą być równoległe do osi prętów. Z rysunków tych wywnioskować można że:
$\delta_1 = \sqrt{2}\ \Delta_1$, $\Delta_2 / \delta_2 = \sin\alpha = 3/5$ (bo pręt 2 o długości l_2 = 5m jest ustawiony pod kątem α w stosunku do poziomu, narysowane kąty α są pomiędzy kierunkami wzajemnie prostopadłymi)

Wstawiając ostatnie dwa związki do równania (b) mamy: $\sqrt{2}\ \Delta_1 = \sqrt{2}\ (5/3)\ \Delta_2$ czyli: $\mathbf{\Delta_1 = (5/3)\ \Delta_2}$
Relacja wyróżniona tłustym drukiem jest poszukiwanym równaniem kinematycznym. Wynika z niego:

$$\frac{S_1 3\text{m}}{E\ 6\text{cm}^2} = \frac{5}{3}\frac{S_2 5\text{m}}{E\ 8{,}333\text{cm}^2}$$

Po uproszczeniu mamy: $S_1 = 2\ S_2$ Wstawiając to równanie do równania statyki (a) otrzymamy: $2\ P = 0{,}6\ S_2 + 2\ S_2$ czyli: $S_2 = (2/2{,}6)\ P = 10$ kN , $S_1 = 20$ kN

Wydłużenie pierwszego pręta wyniesie: $\Delta_1 = \frac{S_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{20\cdot 10^3\text{N}\cdot 3\text{m}}{100\cdot 10^9\text{N/m}^2\ 6\cdot 10^{-4}\text{m}^2}$ = 0,1 10^{-2} m =1 mm

Wydłużenie drugiego pręta wyniesie: $\Delta_2 = \frac{S_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{10\cdot 10^3\text{N}\cdot 5\text{m}}{100\cdot 10^9\text{N/m}^2\ 8{,}333\cdot 10^{-4}\text{m}^2}$ = 0,6 mm

Pionowe przemieszczenie wyniesie: $\delta_P = 2\ \delta_2 = 2\ (5/3)\ \Delta_2 = 2$ mm .