Dana jest macierz naprężeń w punkcie: $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}$, oraz wektor normalny płaszczyzny którą przecinamy bryłę w tym punkcie: **a**. Obliczyć współrzędne wektora naprężenia $\mathbf{p}_{\mathbf{v}}$, odpowiadającego temu przecięciu, oraz jego składowe normalną $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}}$ i styczną $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{s}}$ do płaszczyzny przekroju.

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{MPa}\,, \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$\text{Wersor: } \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Wektor naprężenia:

$$\mathbf{p}_{\mathbf{v}} = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{v} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}\text{MPa} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2*1+0*2-1*(-2) \\ 0*1+3*2+4*(-2) \\ -1*1+4*2+1*(-2) \end{bmatrix}\text{MPa} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}\text{MPa}$$

$p_{vi} = \sigma_{ij}\,\alpha_{vj}$ np.: $p_{vy} = p_{v2} = \sigma_{2j}\,\alpha_{vj} = \sigma_{21}\,\alpha_{v1}+\sigma_{22}\,\alpha_{v2}+\sigma_{23}\,\alpha_{v3}$

Miara rzutu wektora $\mathbf{p}_{\mathbf{v}}$ na kierunek **v:**

$$\mathbf{p}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{v} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\{1*4+2*(-2)+(-2)*5\}\text{MPa} = \frac{-10}{9}\ \text{MPa}$$

Wektor składowej normalnej wektora $\mathbf{p}_{\mathbf{v}}$: $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}}$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}} = (\mathbf{p}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{v})\,\mathbf{v} = \frac{-10}{9}\text{MPa}\,\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{-10}{27}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}\text{MPa}$$

Wektor składowej stycznej wektora $\mathbf{p}_{\mathbf{v}}$: $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{s}}$

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{s}} = \mathbf{p}_{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 4*9+10 \\ -2*9+20 \\ 5*9-20 \end{bmatrix}\text{MPa} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 46 \\ 2 \\ 25 \end{bmatrix}\text{MPa}$$

Sprawdzenie prostopadłości $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{s}}$ i $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}}$

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{s}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}} = \frac{-10}{27}\ \frac{1}{27}\{1*46+2*2+(-2)*25\}\text{MPa} = 0$$