W punkcie konstrukcji istnieje stan naprężenia reprezentowany przez macierz $\mathbf{T_\sigma}$. Określ wartości i kierunki własne tej macierzy. Przedstaw graficznie tą macierz w układzie kierunków wyjściowych i własnych. Przez w/w punkt przeprowadzono płaszczyznę o normalnej **a** oraz płaszczyznę o normalnej **b**. Oblicz wektory naprężenia na tych płaszczyznach i ich składowe: normalną i styczną. Przedstaw graficznie uzyskane wyniki. Narysuj koła Mohra dla tego zadania reprezentującego płaski stan naprężeń.

Dane: $\mathbf{T_\sigma} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ MPa , $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie:

Wartości własne:

Niezmienniki naprężenia: I_1= (5-2) MPa = 3 MPa , I_2= (-10-9) (MPa)^2 = -19 (MPa)^2 , $I_3 = 0$

Równanie charakterystyczne: $\sigma^3 - I_1\,\sigma^2 + I_2\,\sigma - I_3 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \sigma^3 - 3\,\sigma^2 - 19\,\sigma = 0$

Po uwzględnieniu oczywistego rozwiązania σ=0 otrzymamy równanie kwadratowe: $\sigma^2 - 3\,\sigma - 19 = 0$

$\Delta = 9 + 4 \cdot 19 = 85$, $\sigma_1 = (3+\sqrt{85})/2 = 6{,}10977$ MPa , $\sigma_2 = (3-\sqrt{85})/2 = -3{,}10977$ MPa

W związku z tym że mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia, niezerowe pierwiastki równania charakterystycznego oznaczono indeksami 1 i 2 (w zadaniu przestrzennym można byłoby je ponumerować: , $\sigma_1 = 6{,}10977$ MPa , $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -3{,}10977$ MPa).

Dla zadania płaskiego można wykorzystać wzory pozwalające obliczyć wartości naprężeń głównych:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}{}^2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7^2 + 4 \cdot 3^2}$$

Kierunki główne:

Dla wartości: $\sigma_1 = 6{,}10977$ MPa poszukujemy wersora $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}$

Wstawiając powyższe do równania: $(\mathbf{T_\sigma} - \mathbf{I}\,\sigma_1)\,\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$, otrzymamy:

$(5-6{,}11)\,\alpha_{11} + 3\,\alpha_{12} = 0$

$3\,\alpha_{11} + (-2-6{,}11)\,\alpha_{12} = 0$

Powyższe dwa równania są liniowo zależne, z każdego z nich można wywnioskować że:

$\alpha_{11} = 2{,}70326\,\alpha_{12}$

Wektor $\mathbf{v_1}$ ma mieć długość =1 , czyli: $\alpha_{11}{}^2 + \alpha_{12}{}^2 = 1 \;\Rightarrow\; (2{,}70326^2 + 1)\,\alpha_{12}{}^2 = 1$, więc:

$\alpha_{12} = 1/\sqrt{2{,}70326^2 + 1} = 0{,}34695$, oraz $\alpha_{11} = 2{,}70326 \cdot 0{,}34695 = 0{,}937886$

Ostatecznie wersor $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}937886 \\ 0{,}34695 \end{bmatrix}$

Dla wartości: $\sigma_2 = -3{,}10977$ MPa poszukujemy wersora $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix}$

Wstawiając powyższe do równania: $(\mathbf{T_\sigma} - \mathbf{I}\,\sigma_2)\,\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$, otrzymamy:

$(5+3{,}11)\,\alpha_{21} + 3\,\alpha_{22} = 0$

$3\,\alpha_{21} + (-2+3{,}11)\,\alpha_{22} = 0$

Powyższe dwa równania są liniowo zależne, z każdego z nich można wywnioskować że:

$\alpha_{21} = -0{,}369924\,\alpha_{22}$

Wektor $\mathbf{v_2}$ ma mieć długość =1 , czyli: $\alpha_{21}{}^2 + \alpha_{22}{}^2 = 1 \;\Rightarrow\; (0{,}369924^2 + 1)\,\alpha_{22}{}^2 = 1$, więc:

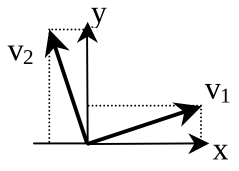
$\alpha_{22} = 1/\sqrt{0{,}369924^2 + 1} = 0{,}937886$, oraz $\alpha_{21} = -0{,}369924 \cdot 0{,}937886 = -0{,}34695$

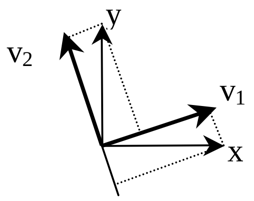
Ostatecznie wersor $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}34695 \\ 0{,}937886 \end{bmatrix}$

Zapisując wersory $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_2}$ wierszami otrzymamy macierz przejścia z układu wyjściowego do układu kierunków głównych:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}937886 & 0{,}34695 \\ -0{,}34695 & 0{,}937886 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

Symbolami c i s oznaczono cosinus i sinus kąta zawartego pomiędzy osią x a pierwszym kierunkiem głównym. Miara tego kąta wynosi $20{,}3^\circ$ (taki sam kąt jest zawarty pomiędzy osią y a drugim kierunkiem głównym).





Obok pokazano kierunki główne reprezentowane przez wersory $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_2}$. Na pierwszym rysunku widać interpretację graficzną <u>wierszy</u> macierzy przejścia $\boldsymbol{\alpha}$: w wierszach tej macierzy są umieszczone współrzędne wersorów określających („nowe”) kierunki główne w układzie („starych”) osi x i y. Na drugim rysunku widać interpretację graficzną <u>kolumn</u> macierzy przejścia $\boldsymbol{\alpha}$: w kolumnach tej macierzy są umieszczone współrzędne wersorów określających położenie(„starych”) osi x i y. w układzie („nowych”) kierunków głównych.

Macierz przejścia $\boldsymbol{\alpha}$ nazywa się też macierzą kosinusów kierunkowych, elementy tej macierzy to kosinusy kątów pomiędzy odpowiednimi parami osi:

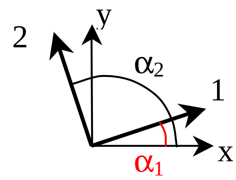
$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x, v_1) & \cos(y, v_1) \\ \cos(x, v_2) & \cos(y, v_2) \end{bmatrix}$$

Kierunki główne można też znaleźć wykorzystując wzory pozwalające obliczyć wartości tangensów kątów pomiędzy tymi kierunkami a osią x: $\operatorname{tg}\alpha_i = \dfrac{-\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_i}$

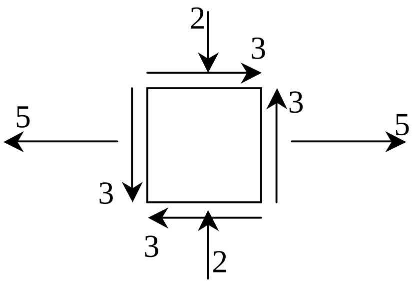
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_1} = \frac{-3}{-2-6{,}11} = 0{,}369924 \quad , \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_2} = \frac{-3}{-2+3{,}11} = -2{,}70326$$

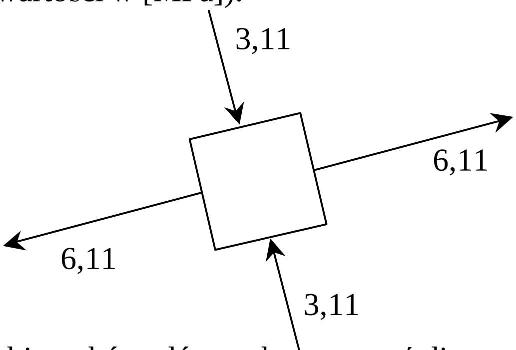
arc tg (0,369924) = $20{,}3^{\circ}$, arc tg (-2,70326) = $-69{,}7^{\circ}$ ale tak określony drugi kierunek główny, powodowałby że układy (x,y) i (1,2) miałyby inne skrętności. Aby tego uniknąć należy przyjąć kąt

$\alpha_2 = -69{,}7^{\circ} + 180^{\circ} = 110{,}3^{\circ}$, bo: $\operatorname{tg}(110{,}3^{\circ})$ też daje -2,70326



Reprezentacja graficzna macierzy naprężeń w układzie wyjściowym i w układzie kierunków głównych została przedstawiona na poniższych rysunkach (wartości w [MPa]).





Aby sprawdzić czy macierz naprężeń w układzie kierunków głównych ma postać diagonalną, należy macierz $\mathbf{T_\sigma}$ przetransformować do tych kierunków, czyli macierz naprężeń w układzie kierunków głównych ma postać: $\mathbf{T_\sigma}' = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{T_\sigma}\, \boldsymbol{\alpha}^T = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (5c+3s) & , & (-5s+3c) \\ (3c-2s) & , & (-3s-2c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5c^2+3sc+3sc-2s^2) & , & (-5sc+3c^2-3s^2-2sc) \\ (-5sc-3s^2+3c^2-2sc) & , & (5s^2-3sc-3sc-2c^2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6{,}10977 & 0 \\ 0 & -3.10977 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Na przekątnej głównej tej macierzy pojawiły się naprężenia główne, a poza przekątną są naprężenia styczne równe zero.

<u>Wektor naprężenia przy przecięciu płaszczyzną o normalnej **a**</u> : $\mathbf{p_{va}}$

Wersor normalny do płaszczyzny: $\mathbf{v_a} = \mathbf{a} / |\mathbf{a}| = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{p_{va}} = \mathbf{T_\sigma}\ \mathbf{v_a} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}5 & 3\\3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}5+6\\3-4\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}11\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4.91935\\-0,44721\end{bmatrix}$ MPa

Miara rzutu wektora $\mathbf{p_{va}}$ na kierunek $\mathbf{v_a}$

$\mathbf{p_{va}}\ \mathbf{v_a} = \frac{1}{5}$ (11-2) = 1,8 MPa

Składowa normalna wektora naprężenia $\mathbf{p_{va}}$

$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{na}} = (\mathbf{p_{va}}\ \mathbf{v_a})\ \mathbf{v_a} = 1{,}8\ \text{MPa}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}805\\1{,}610\end{bmatrix}$ MPa

Składowa styczna wektora naprężenia $\mathbf{p_{va}}$

$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{sa}} = \mathbf{p_{va}} - \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{na}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}11-1{,}8\\-1-3{,}6\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}9{,}2\\-4{,}6\end{bmatrix} = \frac{4{,}6}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4{,}1144\\-2{,}0572\end{bmatrix}$ MPa

Długość składowej stycznej: $|\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{sa}}| = 4.6$ MPa

W układzie kierunków głównych mamy:

- wersor normalny do płaszczyzny: $\mathbf{v_a}' = \boldsymbol{\alpha}\ \mathbf{v_a} = \begin{bmatrix}c & s\\-s & c\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}c+2s\\-s+2c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}72975\\0{,}68371\end{bmatrix}$

- wektor naprężenia: $\mathbf{p_{va}}' = \boldsymbol{\alpha}\ \mathbf{p_{va}} = \begin{bmatrix}c & s\\-s & c\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}11\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}11c-s\\-11s-c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4{,}4586\\-2{,}1262\end{bmatrix}$ MPa

Miara rzutu wektora $\mathbf{p_{va}}'$ na kierunek $\mathbf{v_a}'$

$\mathbf{p_{va}}'\ \mathbf{v_a}' = \frac{1}{5}\ [(c+2s)(11c-s)+(-s+2c)(-11s-c)] = \frac{1}{5}\ [11(c^2+s^2)-2(c^2+s^2)] = \frac{9}{5} = 1{,}8$ MPa

Oczywiście wynik jest taki sam jak w układzie kierunków wyjściowych..

<u>Wektor naprężenia przy przecięciu płaszczyzną o normalnej **b**</u> : $\mathbf{p_{vb}}$

Wersor normalny do płaszczyzny: $\mathbf{v_b} = \mathbf{b} / |\mathbf{b}| = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

$\mathbf{p_{vb}} = \mathbf{T_\sigma}\ \mathbf{v_b} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}5 & 3\\3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-10+3\\-6-2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-7\\-8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3{,}13\\-3{,}578\end{bmatrix}$ MPa

Miara rzutu wektora $\mathbf{p_{vb}}$ na kierunek $\mathbf{v_b}$

$\mathbf{p_{vb}}\ \mathbf{v_b} = \frac{1}{5}$ (14-8) = 1,2 MPa

Składowa normalna wektora naprężenia $\mathbf{p_{vb}}$

$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{nb}} = (\mathbf{p_{vb}}\ \mathbf{v_b})\ \mathbf{v_b} = 1{,}2\ \text{MPa}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1{,}0733\\0{,}5367\end{bmatrix}$ MPa

Składowa styczna wektora naprężenia $\mathbf{p_{vb}}$

$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{sb}} = \mathbf{p_{vb}} - \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{nb}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-7+2{,}4\\-8-1{,}2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-4{,}6\\-9{,}2\end{bmatrix} = \frac{-4{,}6}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2{,}0572\\-4{,}1144\end{bmatrix}$ MPa

Długość tej składowej stycznej: $|\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{sb}}| = 4.6$ MPa

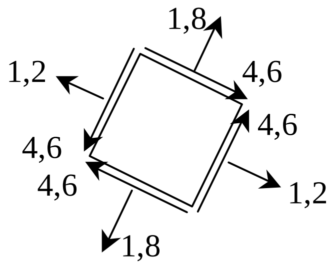
To że długość składowej stycznej $|\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{sa}}| = |\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{sb}}| = 4.6$ MPa nie jest przypadkiem. Kierunki wyznaczone przez wektory **a** i **b** są prostopadłe. Wersory $\mathbf{v_a}$ i $\mathbf{v_b}$ zapisane wierszami stworzą macierz przejścia z układu kierunków wyjściowych (x,y) do układu kierunków wyznaczonych przez wektory **a** i **b** .

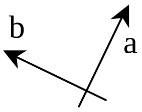
Nazwiemy tą macierz $\boldsymbol{\beta}$: $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}$

Macierz naprężeń zapisaną w układzie kierunków $\mathbf{v_a}$ i $\mathbf{v_b}$ znajdziemy dokonując transformacji macierzy $\mathbf{T_\sigma}$ z układu kierunków wyjściowych (x,y) do układu kierunków wyznaczonych przez wektory **a** i **b** .

$\mathbf{T_\sigma}'' = \boldsymbol{\beta}\ \mathbf{T_\sigma}\ \boldsymbol{\beta}^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3\\3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11 & -7\\-1 & -8\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}9 & -23\\-23 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}8 & -4{,}6\\-4{,}6 & 1{,}2\end{bmatrix}$ MPa

Elementy tej macierzy poza przekątną główną to naprężenia styczne na ściankach wzajemnie prostopadłych.

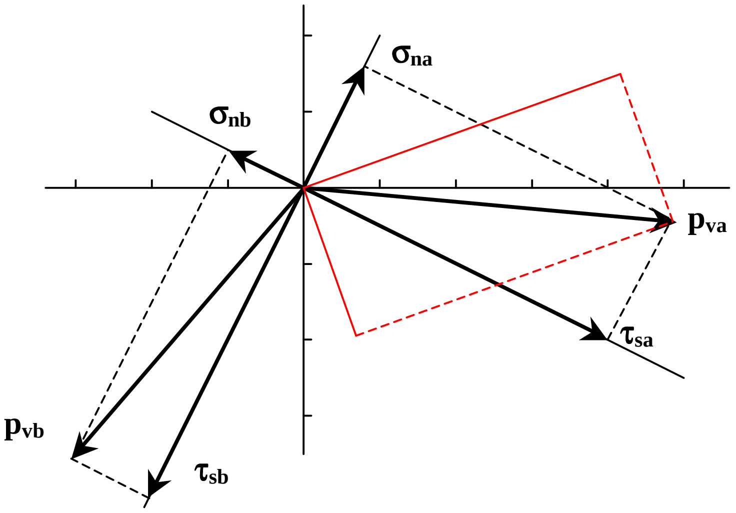




Obok przedstawiono reprezentację graficzną macierzy naprężeń w układzie kierunków wyznaczonych przez wektory **a** i **b** . Zwróćmy uwagę że naprężenia styczne są ujemne: na ściankach o normalnych zewnętrznych zgodnie równoległych do wektorów **a** lub **b**, same naprężenia styczne są przeciwne do tych wektorów.

Na kolejnej ilustracji wektory $\mathbf{p_{va}}$ i $\mathbf{p_{vb}}$ i ich składowe narysowane są z zachowaniem skali. Czerwonymi liniami pokazano składowe wektora $\mathbf{p_{va}}$ w układzie kierunków głównych. Przypomnimy że:

$$\mathbf{p_{va}}' = \boldsymbol{\alpha}\ \mathbf{p_{va}} = \begin{bmatrix} 4,4586 \\ -2,1262 \end{bmatrix} \text{MPa}$$



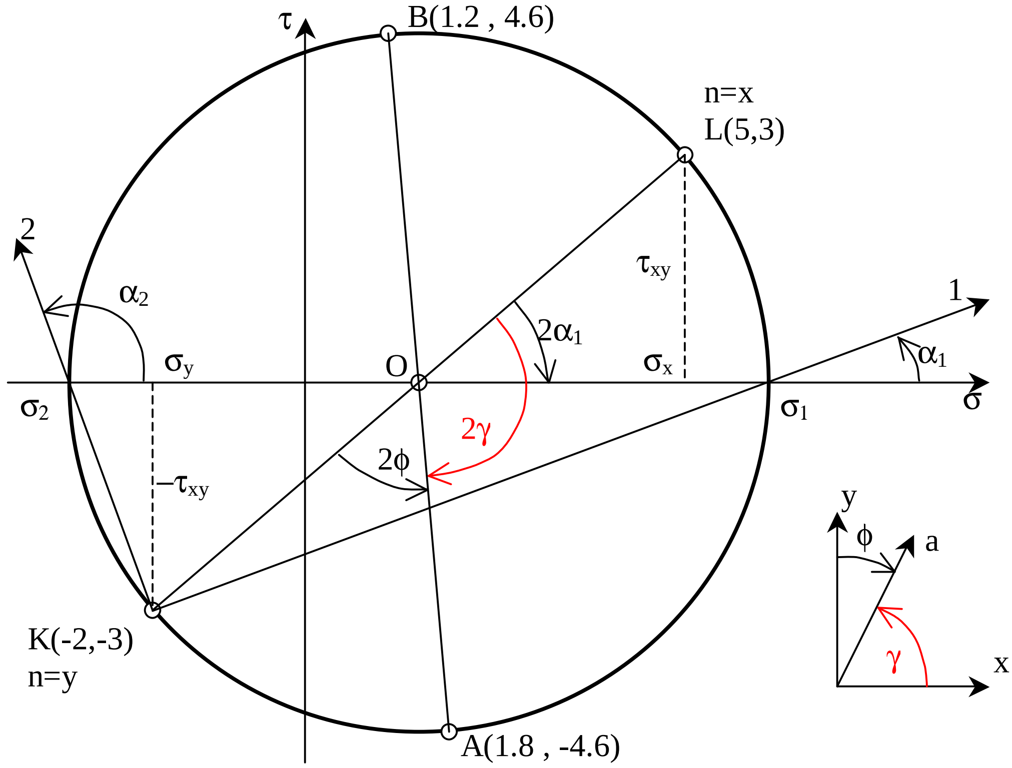
<u>Koła Mohra</u>

Równanie wiążące ze sobą miarę składowej normalnej σ_n i długość składowej stycznej τ_s ma postać:

$$\left[\sigma_n - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 + \tau_s^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

Dla tego zadania otrzymamy: $[\sigma_n - 1{,}5\ \text{MPa}]^2 + \tau_s^2 = 21{,}25\ \text{MPa}^2$

Interpretacją graficzną tego równania w układzie współrzędnych (σ_n , τ_s) jest okrąg o środku „O" którego współrzędne to (σ_n = 1,5 MPa , τ_s =0) ,
promień okręgu wynosi R = $\sqrt{21{,}25}$ MPa = 4,60977 MPa



Konstrukcję okręgu rozpoczynamy od wyznaczenia środka O i punktu K o współrzędnych (σ_y , -τ_{xy}), punkt ten reprezentuje wektor naprężenia przy przecięciu płaszczyzną o normalnej y. Po przeciwnej stronie mamy punkt L o współrzędnych (σ_x , τ_{xy}), punkt ten reprezentuje wektor naprężenia przy przecięciu płaszczyzną o normalnej x. Po narysowaniu okręgu widzimy jakie mogą być ekstremalne naprężenia normalne: σ_1 , σ_2 oraz jaką maksymalną wielkość mogą mieć naprężenia styczne: $\tau_{max} = R = \sqrt{21{,}25}$ MPa = 4,60977 MPa