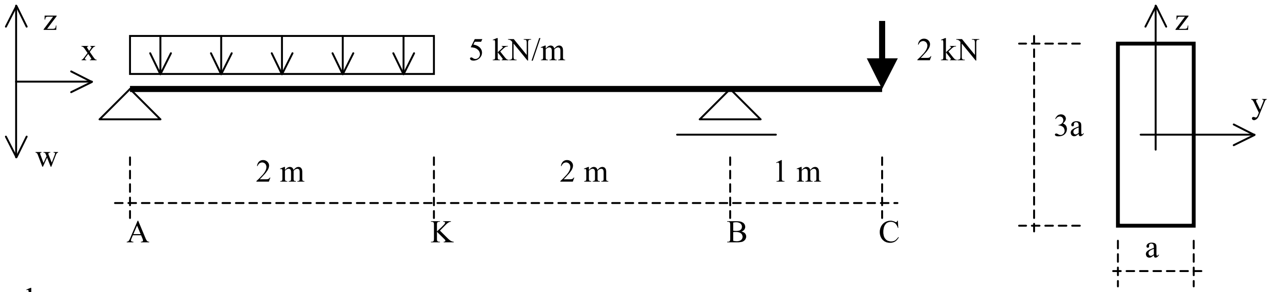
Zaprojektować przekrój poprzeczny belki tak aby ugięcie w przekroju K nie przekroczyło w_{dop} = 6 cm. Przekrój ma być prostokątem o wysokości 3 razy większej niż szerokość. Materiał o module E=2,1 GPa



Szukane: a

Początek układu współrzędnych x-z i x-w jest w środku przekroju A.

Rozwiązanie:

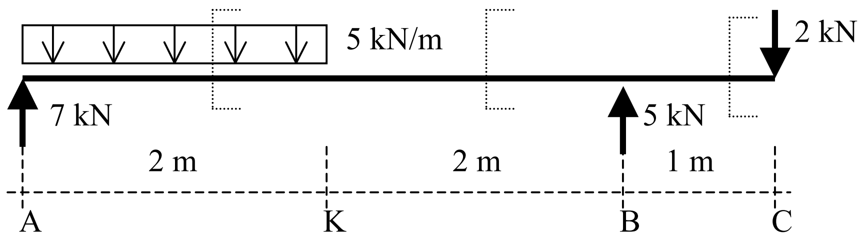
Wektory momentu zginającego w każdym przekroju poprzecznym są równoległe do osi y ("zginanie wokół osi y"). Trzeba określić moment bezwładności J_y : $J_y = \frac{a(3a)^3}{12} = \frac{27}{12}a^4$

Określenie ugięcia w p.K (w_K) poprzez J_y i dane.

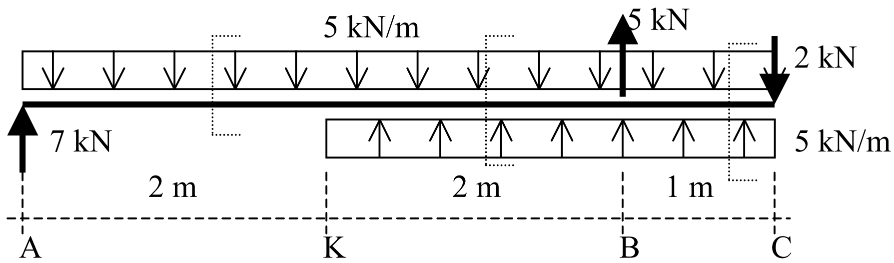
Obliczenie reakcji: $\Sigma M(B) = 0 \Rightarrow 4\,R_A - 5*2*3 + 2*1 = 0 \Rightarrow R_A = 7$ kN

$\Sigma Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 5*2 + 2 \Rightarrow R_B = 5$ kN

Metoda analityczna (Clebscha):



Zapisując równanie momentu M(x) w pierwszym przedziale charakterystycznym (A-K) otrzymamy: $M(x) = 7*x - 5*x^2/2$, ten zapis będzie obowiązywał w dalszych przedziałach: K-B, B-C, czyli trzeba zwiększyć zakres oddziaływania obciążenia 5 kN/m poza przekrój K. Żeby całe obciążenie przyłożone do belki było takie jak na powyższym rysunku, to na odcinku K-C trzeba przyłożyć obciążenie 5 kN/m działające w górę, aby zniwelować działanie "przedłużonego" obciążenia 5 kN/m w dół:



Obciążenia przedstawione na ostatnich dwu rysunkach są statycznie równoważne.

Teraz można zapisać we wszystkich przedziałach charakterystycznych: równania momentów, zmieniając znak: $E\,J_y\,w''(x)$, całkując: $E\,J_y\,w'(x)$, oraz $E\,J_y\,w(x)$.

$M(x) =$	$7kN*x - 5kN/m*x^2/2$	$\vert + 5kN/m*(x-2)^2/2$	$\vert + 5\,kN*(x-4)$	$\vert$
$E\,J_y\,w''(x) =$	$-7kN*x + 5kN/m*x^2/2$	$\vert - 5kN/m*(x-2)^2/2$	$\vert - 5\,kN*(x-4)$	$\vert$
$E\,J_y\,w'(x) =$	$C - 7kN*x^2/2 + 5kN/m*x^3/6$	$\vert - 5kN/m*(x-2)^3/6$	$\vert - 5\,kN*(x-4)^2/2$	$\vert$
$E\,J_y\,w(x) =$	$D + C*x - 7kN*x^3/6 + 5kN/m*x^4/24$	$\vert - 5kN/m*(x-2)^4/24$	$\vert - 5\,kN*(x-4)^3/6$	$\vert$
		|(AK)	|(KB)	|(BC)

Do wyznaczenia stałych całkowania C i D określimy kinematyczne warunki brzegowe. W przekrojach A i B są podpory przegubowe, więc ugięcia muszą być tam równe zero.

$w_A = w(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D+0-0+0 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$ (przekrój A $\in$ przedziału AK)

$w_B = w(x=4m) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4m*C - 7kN*(4m)^3/6 + 5kN/m*(4m)^4/24 - 5kN/m*(2m)^4/24 = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad C = 6{,}1667 kNm^2$ (przekrój B $\in$ przedziału KB lub BC)

Teraz można wyznaczyć ugięcie w p.K . Uwaga: p.K $\in$ przedziału AK (lub KB), czyli x=2m należy podstawić do odpowiedniego wzoru – czyli „skończyć na kresce AK"

$E\, J_y\, w(x=2m) = 6{,}1667kNm^2 * 2m - 7kN*(2m)^3/6 + 5kN/m*(2m)^4/24 = (19/3)*kNm^3$

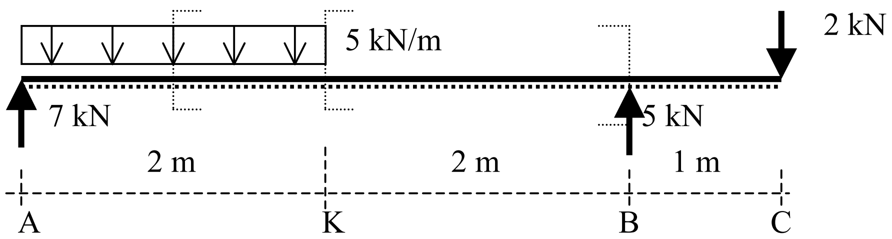
Czyli: $w_K = \dfrac{19\ kNm^3}{3 \cdot E \cdot J_y} \le w_{dop} = 0{,}06\ m \quad \Rightarrow \quad J_y = \dfrac{27}{12} a^4 \ge \dfrac{19\ kNm^3}{3 \cdot E \cdot w_{dop}}$

$$a \ge \sqrt[4]{\frac{12}{27} \cdot \frac{19\ kNm^3}{3 \cdot E \cdot w_{dop}}} = \sqrt[4]{\frac{4}{27} \cdot \frac{19 \cdot 10^3\ Nm^3}{2{,}1 \cdot 10^9\ N/m^2 \cdot 6 \cdot 10^{-2}\ m}} = \sqrt[4]{\frac{4}{27} \cdot \frac{19}{2{,}1 \cdot 6}} \cdot 10^{-1} m = 0{,}6875 \cdot 10^{-1} m = 6{,}875\ cm$$

Przyjęto: a = 7cm , wysokość przekroju 21cm.

Ugięcie w_K obliczymy jeszcze raz metodą analityczno-graficzną (Mohra).

Aby sporządzić wykres momentów zginających (rzeczywistych) przypomnijmy obciążenia i reakcje:



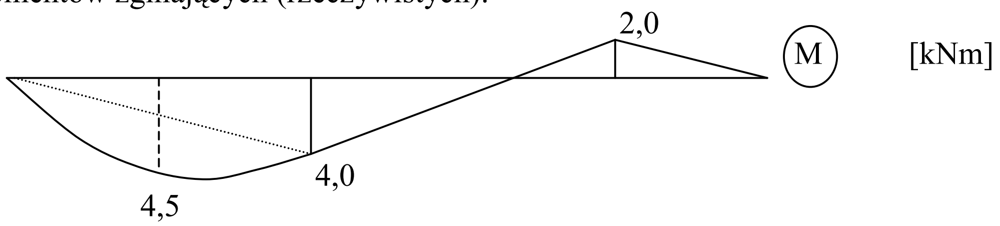
Obliczenie wartości momentów zginających: w środku przedziału AK i w p. charakterystycznych:

$M(x=1m) = 7*1 – 5*1*0{,}5 = 4{,}5\ kNm$ (to nie jest ekstremum)

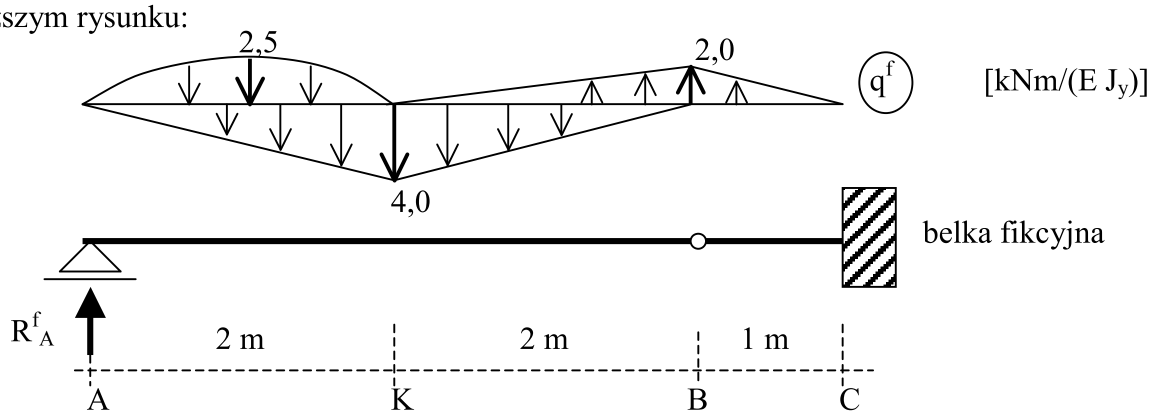
$M_K = M(x=2m) = 7*2 – 5*2*1 = 4\ kNm$

$M_B = M(x=4m) = - 2*1 = - 2\ kNm$

Wykres momentów zginających (rzeczywistych):



Dzieląc rzędne M przez $(E \cdot J_y)$ otrzymamy wykres obciążenia fikcyjnego. Niektóre fragmenty wykresu można podzielić na części. Obciążenie fikcyjne działa na belkę fikcyjną, więc też tak to przedstawiono na poniższym rysunku:

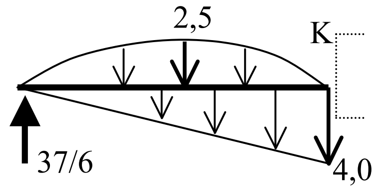


Belka fikcyjna jest belką przegubową, część AB jest belką górną. Obliczymy reakcję fikcyjną R^f_A

$\Sigma M^f(B)_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad R^f_A*4m + \{-(2/3)*2{,}5*2*3 - (1/2)*4*4*2 + (1/2)*2*2*(2/3)\}kNm^3/(E\, J_y) = 0$

czyli: $\quad R^f_A = \{2{,}5 + 4 - (1/3)\}kNm^2/(E\, J_y) = (37/6)\ kNm^2/(E\, J_y)$

Teraz można obliczyć moment fikcyjny w p.K czyli ugięcie w_K



$w_K = M^f_K = \{(37/6)*2 - (2/3)*2,5*2*1 - (1/2)*4*2*(2/3)\}\ kNm^3/(E\ J_y) = (19/3)\ kNm^3/(E\ J_y)$

Wynik w_K jest taki sam jak znaleziony poprzednio metodą Clebscha.

Obliczając wypadkową części obciążenia fikcyjnego "z pod paraboli" wykorzystano wzór:

$W = (2/3)\ h\ a$ Prosta działania wypadkowej przechodzi przez środek.