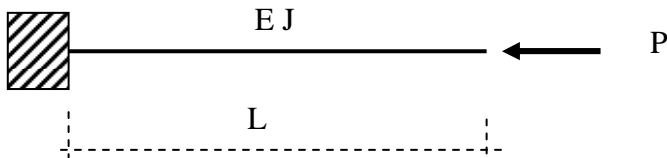


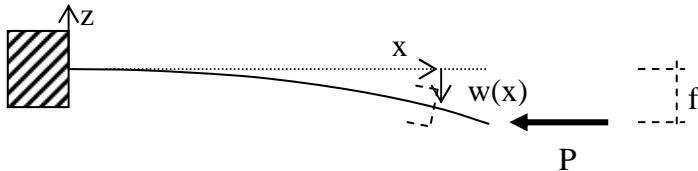
Wyznaczyć Eulerowską siłę krytyczną dla wspornika.



Dane: E, J, L

Szukane: P powodujące wyboczenie wspornika

Uwaga: W zadaniu płaskim w płaszczyźnie (x-z): $J=J_y$
 W zadaniu przestrzennym : $J=J_{\min}$



Jak wcześniej wspomniano szukamy wartości siły ściskającej powodującej wyboczenie wspornika, czyli dopuszczamy przyjęcie przez pręt giętej postaci równowagi. Odstępując od zasady zeszywnienia postulujemy, że pojawiające się ugięcia mają wpływ na siły przekrojowe, więc w miejscu o współrzędnej x moment zginający M w środku przekroju poprzecznego ugiętego pręta („klamerka”) wynosi:

$$M(x) = -P [f-w(x)] \quad \text{gdzie: } f - \text{ugięcie na końcu wspornika} \quad (1)$$

Uproszczoną zależność pomiędzy krzywizną a momentem zginającym zapiszemy:

$$w''(x) = -M(x)/(EJ) \quad (2)$$

Wstawiając wzór (1) do (2) i przenosząc na jedną stronę mamy:

$$w''(x) - P/(EJ) [f-w(x)] = 0 \quad (3)$$

$$\text{Zdefiniujemy: } k^2 = P/(EJ) \quad (4)$$

$$w''(x) - k^2 [f-w(x)] = 0 \quad (5)$$

Wprowadzając pomocniczą funkcję: $\xi(x) = f-w(x)$

równanie (5) zapiszemy: $-\xi''(x) - k^2 \xi(x) = 0$, $\xi''(x) = -w''(x)$ Jest to jednorodne równanie różniczkowe 2-go

stopnia które ma rozwiązanie w postaci: $\xi(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$ czyli: (6)

$$w(x) = f - \xi(x) = f - C_1 \sin(kx) - C_2 \cos(kx) \quad (6)$$

$$w'(x) = -C_1 k \cos(kx) + C_2 k \sin(kx)$$

Stałe całkowania wyznaczmy z warunków kinematycznych:

$$w(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f - C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = f$$

$$w'(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -C_1 k = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

Znaleźliśmy funkcję ugięcia osi pręta (z tym że f nie jest znane)

$$w(x) = f [1 - \cos(kx)] \quad (7)$$

Wykorzystajmy informację że ugięcie na końcu wynosi f:

$$w(x=L) = f \quad \Rightarrow \quad f - f \cos(kL) = f \quad \Rightarrow \quad \cos(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = \pi^2 / (2L)^2 \quad \Rightarrow \quad P/(EJ) = \pi^2 / (2L)^2$$

Z ostatniej równości wyliczymy siłę P i nazwiemy ją siłą Eulerowską P_E

$$P_E = \pi^2 EJ / (2L)^2$$

Definując długość wyboczeniową dla wspornika: $L_w = 2L$ mamy:

$$P_E = \pi^2 EJ / L_w^2 \quad (8)$$