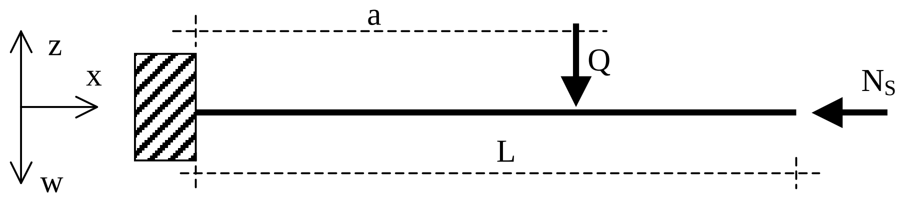
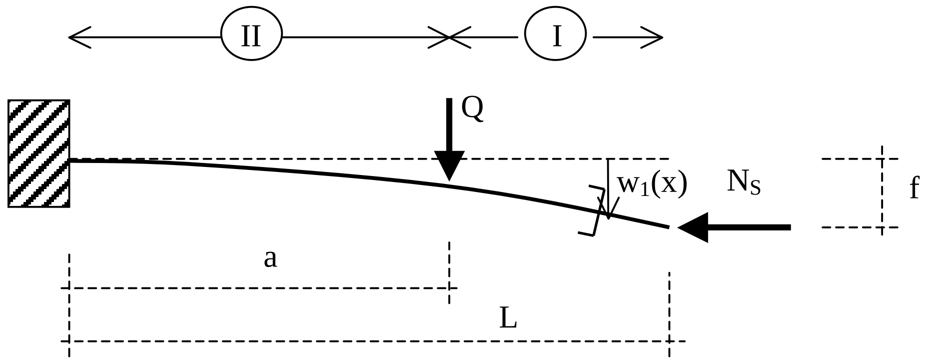
Odstępując od zasady zesztywnienia obliczyć maksymalne ugięcie i maksymalny moment zginający we wsporniku obciążonym siłą prostopadłą Q i siłą ściskającą N_S.
Dane: Q, N_S, E, J_y, L, a Szukane: f, M_{max}



Uwaga: Rozwiązanie będzie dotyczyło ściskania i zginania w płaszczyźnie x-z . Poza tym trzeba sprawdzić czy w płaszczyźnie x-y nie dojdzie do wyboczenia, – czyli czy obciążenie N_S jest mniejsze od siły krytycznej wyliczonej dla smukłości $\lambda = L_w / i_z$

Rozwiązanie:



Przedstawiony wspornik składa się z dwóch przedziałów charakterystycznych:
I–go: $x \in (a, L)$
II–go: $x \in (0, a)$

Odstępując od zasady zesztywnienia postulujemy, że pojawiające się ugięcia mają wpływ na siły przekrojowe, więc w miejscu o współrzędnej x moment zginający M w środku przekroju poprzecznego ugiętego pręta („klamerka") w przedziale I wynosi:

$$M_1(x) = -N_S\left(f - w_1(x)\right) \tag{1}$$

Indeks 1 w powyższym równaniu przy funkcji M i w – informuje, że funkcje te są określone dla pierwszego przedziału charakterystycznego.
Uproszczoną zależność pomiędzy krzywizną a momentem zginającym zapiszemy:

$$w_1''(x) = - M_1(x) / (E J_y) \tag{2}$$

Wstawiając wzór (1) do (2) i przenosząc $w_1''(x)$ i $w_1(x)$ na jedną stronę mamy:

$$w_1''(x) + \frac{N_S}{E\,J_y}\, w_1(x) = \frac{N_S}{E\,J_y}\, f \tag{3}$$

Zdefiniujemy: $k^2 = N_S / (E J_y)$ (4)

$$w_1''(x) + k^2\, w_1(x) = k^2\, f \tag{5}$$

Równanie (5) jest niejednorodnym równaniem różniczkowym 2-go stopnia, które ma rozwiązanie w postaci sumy całki ogólnej $w_{o1}(x)$ i szczególnej $w_{s1}(x)$:

$$w_{o1}(x) = A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx) \tag{6}$$

$$w_{s1}(x) = C_1\, x + D_1 \tag{7}$$

Jak widać całki szczególnej poszukujemy wśród wielomianów 1-go stopnia.
Wstawiamy (7) do (5):

$$k^2\left(C_1\, x + D_1\right) = k^2\, f \tag{8}$$

Porównując współczynniki wyrazu wolnego i przy pierwszej potędze x mamy:

$D_1 = f$ (9)

$C_1 = 0$ (10)

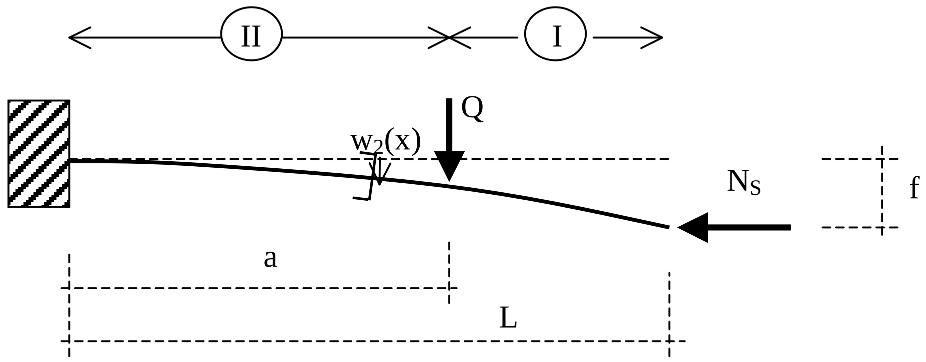
czyli

$w_1(x) = w_{o1}(x) + w_{s1}(x) = A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx) + f$ (11)

Funkcja określająca kąt ugięcia to pochodna powyższej funkcji po x:

$w_1'(x) = A_1 k \cos(kx) - B_1 k \sin(kx)$ (12)

Stałe całkowania A_1 i B_1 są na razie nie znane.



Odstępując od zasady zesztywnienia postulujemy, że pojawiające się ugięcia mają wpływ na siły przekrojowe, więc w miejscu o współrzędnej x moment zginający M w środku przekroju poprzecznego ugiętego pręta („klamerka”) w przedziale II wynosi:

$M_2(x) = -N_S \left(f - w_2(x)\right) - Q\left(a - x\right)$ (13)

Indeks 2 w powyższym równaniu przy funkcji M i w – informuje, że funkcje te są określone dla drugiego przedziału charakterystycznego.

Uproszczoną zależność pomiędzy krzywizną a momentem zginającym zapiszemy:

$w_2''(x) = - M_2(x) / (E J_y)$ (14)

Wstawiając wzór (13) do (14) i przenosząc $w_2''(x)$ i $w_2(x)$ na jedną stronę mamy:

$$w_2''(x) + \frac{N_S}{E J_y} w_2(x) = \frac{N_S}{E J_y} f + \frac{Q}{E J_y}\left(a - x\right) \quad (15)$$

Zdefiniujemy: $\alpha = Q / N_S$ (16)

$w_2''(x) + k^2 w_2(x) = k^2 f + k^2 \alpha a - k^2 \alpha x$ (17)

Równanie (17) jest niejednorodnym równaniem różniczkowym 2-go stopnia, które ma rozwiązanie w postaci sumy całki ogólnej $w_{o2}(x)$ i szczególnej $w_{s2}(x)$:

$w_{o2}(x) = A_2 \sin(kx) + B_2 \cos(kx)$ (18)

$w_{s2}(x) = C_2 x + D_2$ (19)

Jak widać całki szczególnej poszukujemy wśród wielomianów 1-go stopnia.

Wstawiamy (19) do (17):

$k^2 \left(C_2 x + D_2\right) = k^2 f + k^2 \alpha a - k^2 \alpha x$ (20)

Porównując współczynniki wyrazu wolnego i przy pierwszej potędze x mamy:

$D_2 = f + \alpha a$ (21)

$C_2 = - \alpha$ (22)

czyli:

$w_2(x) = w_{o2}(x) + w_{s2}(x) = A_2 \sin(kx) + B_2 \cos(kx) - \alpha x + f + \alpha a$ (23)

Funkcja określająca kąt ugięcia to pochodna powyższej funkcji po x:

$w_2'(x) = A_2 k \cos(kx) - B_2 k \sin(kx) - \alpha$ (24)

W przekroju o współrzędnej x=0 mamy utwierdzenie, czyli:

$w_2(x{=}0) = 0 \;\Rightarrow\; B_2 + f + \alpha a = 0 \;\Rightarrow\; B_2 = - (f + \alpha a)$ (25)

$w_2' (x=0) = 0 \;\Rightarrow\; A_2\, k - \alpha = 0 \;\Rightarrow\; A_2 = \alpha / k$ (26)

Funkcja określająca ugięcie w drugim przedziale:

$$w_2(x) = \frac{\alpha}{k}\sin(kx) - (f + \alpha\, a)\cos(kx) - \alpha\, x + f + \alpha\, a \tag{27}$$

Funkcja określająca kąt ugięcia w drugim przedziale:

$$w_2'(x) = k\left[\frac{\alpha}{k}\cos(kx) + (f + \alpha\, a)\sin(kx)\right] - \alpha \tag{29}$$

Stałe całkowania występujące w funkcjach opisujących ugięcie i kąt ugięcia w pierwszym przedziale charakterystycznym wyznaczymy wykorzystując warunki zszycia, czyli:

$w_1(x=a) = w_2(x=a)$ (30)

$w_1'(x=a) = w_2'(x=a)$ (31)

Po rozpisaniu równań 30 i 31 otrzymamy układ równań w których niewiadomymi są stałe A_1 i B_1

$$A_1 \sin(ka) + B_1 \cos(ka) + f = \frac{\alpha}{k}\sin(ka) - (f + \alpha\, a)\cos(ka) - \alpha\, a + f + \alpha\, a \tag{32}$$

$$A_1\, k\cos(ka) - B_1\, k\sin(ka) = \alpha\cos(ka) + k\,(f + \alpha\, a)\sin(ka) - \alpha \tag{33}$$

Po rozwiązaniu układu równań 32 i 33 otrzymamy:

$$A_1 = \frac{\alpha}{k}(1 - \cos(ka)) \tag{34}$$

$$B_1 = \frac{\alpha}{k}\sin(ka) - \alpha\, a - f \tag{35}$$

Teraz można zapisać funkcję opisującą ugięcia w pierwszym przedziale charakterystycznym:

$$w_1(x) = \frac{\alpha}{k}(1 - \cos(ka))\sin(kx) + \left(\frac{\alpha}{k}\sin(ka) - \alpha\, a - f\right)\cos(kx) + f \tag{36}$$

Ugięcie dla dowolnego x w przedziale pierwszym można wyznaczyć ze wzoru 36, a w przedziale drugim ze wzoru 27, ale w obu tych wyrażeniach występuje nieznana jeszcze wielkość f - jest to ugięcie na końcu wspornika, czyli: $w_1(x=L) = f$ (37)

Zapisując wzór 37 otrzymamy warunek z którego można wyznaczyć f

$$\frac{\alpha}{k}(1 - \cos(ka))\sin(kL) + \left(\frac{\alpha}{k}\sin(ka) - \alpha\, a - f\right)\cos(kL) + f = f \tag{38}$$

Po przekształceniach mamy:

$$f = \frac{Q\, a}{N_S}\left[\frac{1 - \cos(ka)}{ka}\,\mathrm{tg}(kL) + \frac{\sin(ka)}{ka} - 1\right] \tag{39}$$

Teraz w wyrażeniach opisujących ugięcia (36 i 27) występują wielkości występujące wśród danych. Funkcje momentów można zapisać wykorzystując wzory 1 i 13. W szczególności można wyznaczyć moment maksymalny, czyli moment w przekroju utwierdzenia:

$$M_{max} = M_2(x=0) = -N_S\,(f - w_2(x=0)) - Q\, a = -N_S\, f - Q\, a = -Q\, a\left[\frac{1 - \cos(ka)}{ka}\,\mathrm{tg}(kL) + \frac{\sin(ka)}{ka}\right] \tag{40}$$