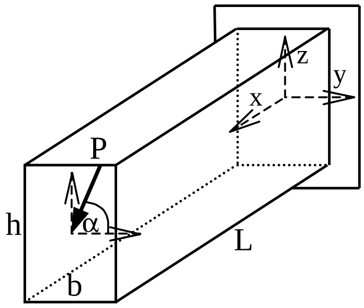
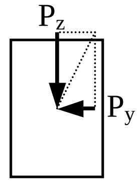
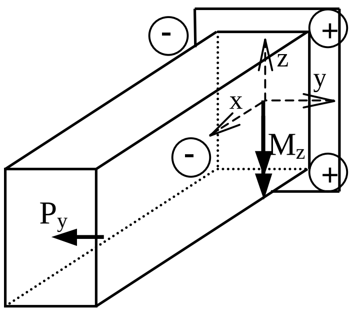


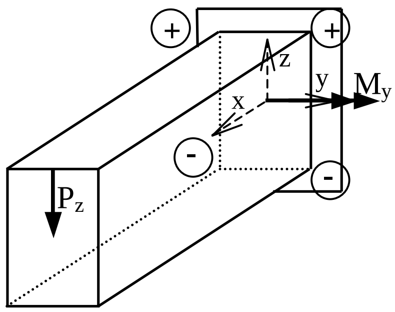
Wspornik o przekroju prostokątnym, o długości L=1.6m, szerokości b=24cm, wysokości h=36cm, obciążono na końcu siłą P=20kN prostopadłą do osi pręta przyłożoną w środku ciężkości pod kątem $\alpha=64^{o}$ liczonym od poziomej osi symetrii (y) przekroju czołowego. Wyznacz naprężenia normalne w przekroju utwierdzenia.



Siłę P rozłożymy na składowe równoległe do osi centralnych głównych przekroju czołowego - w przypadku prostokąta osie te są osiami symetrii. Od każdej składowej z osobna można wyznaczyć rozkład naprężeń jak w przypadku zginania prostego, a następnie dokonać superpozycji wcześniejszych rozwiązań.

$\cos\alpha = 0.43837$, $\sin\alpha = 0.89879$, $P_y = P\cos\alpha = 8.7674$ kN , $P_z = P\sin\alpha = 17.976$ kN





Działająca w przekroju czołowym poziomo w lewo siła o wartości P_y , spowoduje powstanie w przekroju utwierdzenia momentu zginającego który rozciągać będzie prawą część tego przekroju a ściskać lewą, czyli dodatnie naprężenie normalne σ_x powstanie w punktach o współrzędnych y dodatnich a ujemne naprężenie normalne σ_x powstanie w punktach o współrzędnych y ujemnych. Zgodnie z zasadą śruby prawoskrętnej (albo prawej dłoni) tak działający moment można oznaczyć w postaci wektora skierowanego w dół, czyli równoległego do osi z, więc nazwiemy go M_z .
Wartość bezwzględna tego momentu wynosi: $|M_z| = P_y L = 14.028$ kNm
W celu odróżnienia wektora momentu od wektora siły, użyjemy dwóch strzałek oznaczając wektor momentu a jednej oznaczając wektor siły.
Działająca w przekroju czołowym pionowo w dół siła o wartości P_z , spowoduje powstanie w przekroju utwierdzenia momentu zginającego który rozciągać będzie górną część tego przekroju a ściskać dolną, czyli dodatnie naprężenie normalne σ_x powstanie w punktach o współrzędnych z dodatnich a ujemne naprężenie normalne σ_x powstanie w punktach o współrzędnych z ujemnych. Zgodnie z zasadą śruby prawoskrętnej (albo prawej dłoni) tak działający moment można oznaczyć w postaci wektora skierowanego w prawo, czyli równoległego do osi y, więc nazwiemy go M_y .
Wartość bezwzględna tego momentu wynosi: $|M_y| = P_z L = 28.7614$ kNm
Naprężenia normalne w narożach przekroju utwierdzenia można wyliczyć ze wzoru:

$$\sigma_x = \pm\frac{|M_y|}{W_y} \pm \frac{|M_z|}{W_z}$$

ponieważ naroża prostokąta to punkty oddalone najdalej **zarówno** od osi y jak i z.

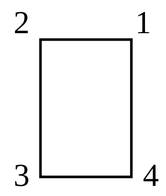
Wzoru powyższego nie można by zastosować np. dla przekroju teowego, ponieważ punkty najbardziej oddalone od osi y nie byłyby najbardziej oddalone od osi z, natomiast punkty najbardziej oddalone od osi z nie byłyby najbardziej oddalone od osi y. Z kolei dla przekroju np. dwuteowego mającego dwie osie symetrii można zastosować powyższy wzór bo naroża takiego przekroju to punkty oddalone najdalej **zarówno** od osi y jak i z.

W definicji wskaźnika wytrzymałości na zginanie względem osi y: $W_y = \dfrac{J_y}{\max|z|}$ występuje max |z| czyli odległość punktów najbardziej oddalonych od osi y, natomiast w definicji wskaźnika wytrzymałości na zginanie względem osi z: $W_z = \dfrac{J_z}{\max|y|}$ występuje max |y| czyli odległość punktów najbardziej oddalonych od osi z.

Dla przekroju prostokątnego o wymiarach h* b mamy: $J_y = b{*}h^3 / 12$, $J_z = h{*}b^3 / 12$,
max |z| = h / 2 , max |y| = b / 2 czyli: $W_y = b{*}h^2 / 6 = 5184\ cm^3$, $W_z = h{*}b^2 / 6 = 3456\ cm^3$.

Naprężenia normalne w kolejnych narożach przekroju utwierdzenia wyniosą:

$$\sigma_{x(1)} = +\frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = (5.5481 + 4.059)\ \text{MPa} = 9.6071\ \text{MPa}$$



$$\sigma_{x(2)} = +\frac{|M_y|}{W_y} - \frac{|M_z|}{W_z} = (5.5481 - 4.059)\ \text{MPa} = 1.4891\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{x(3)} = -\frac{|M_y|}{W_y} - \frac{|M_z|}{W_z} = (-5.5481 - 4.059)\ \text{MPa} = -9.6071\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{x(4)} = -\frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = (-5.5481 + 4.059)\ \text{MPa} = -1.4891\ \text{MPa}$$

Aby móc obliczyć naprężenia normalne w dowolnym punkcie przekroju a nie tylko w narożach, trzeba zastosować ogólny wzór dla zginania ukośnego:

$\sigma_x = \dfrac{M_y}{J_y} z + \dfrac{M_z}{J_z} y$ - gdzie z , y oznaczają współrzędne punktu w którym chcemy obliczyć σ_x ,

współrzędne te **muszą** być określone w układzie osi centralnych głównych. To samo dotyczy składowych momentu zginającego M_y i M_z i oczywiście momentów bezwładności J_y i J_z

Uwaga: ogólny wzór dla zginania ukośnego w powyższej formie, możemy zastosować jeżeli znaki momentów zginających wynikać będą z następującej **konwencji znakowania**:

Za **dodatni** moment M_y uważać będziemy taki, który powoduje powstanie naprężeń rozciągających (**dodatnich**) w punktach o współrzędnych z **dodatnich**.

Taki - **dodatni** moment M_y powoduje też powstanie naprężeń ściskających (**ujemnych**) w punktach o współrzędnych z **ujemnych**.

Można zauważyć, że działa tu zasada: "plus razy plus daje plus" oraz "minus razy minus daje plus"

Kolejne możliwe przypadki można określić przez analogię:

Za **ujemny** moment M_y uważać będziemy taki, który powoduje powstanie naprężeń rozciągających (**dodatnich**) w punktach o współrzędnych z **ujemnych**.

Taki - **ujemny** moment M_y powoduje też powstanie naprężeń ściskających (**ujemnych**) w punktach o współrzędnych z **dodatnich**.

Można zauważyć, że działa tu zasada: "plus razy minus daje minus" oraz "minus razy plus daje minus"

Ta sama zasada będzie zastosowana do określenia znaku momentu M_z :

Za **dodatni** moment M_z uważać będziemy taki, który powoduje powstanie naprężeń rozciągających (**dodatnich**) w punktach o współrzędnych y **dodatnich**.

Taki - **dodatni** moment M_z powoduje też powstanie naprężeń ściskających (**ujemnych**) w punktach o współrzędnych y **ujemnych**.

Tak jak poprzednio: "plus razy plus daje plus" oraz "minus razy minus daje plus"

Za **ujemny** moment M_z uważać będziemy taki, który powoduje powstanie naprężeń rozciągających (**dodatnich**) w punktach o współrzędnych y **ujemnych**.

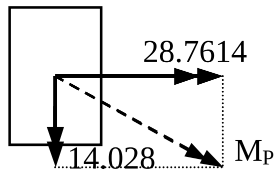
Taki - **ujemny** moment M_z powoduje też powstanie naprężeń ściskających (**ujemnych**) w punktach o współrzędnych y **dodatnich**.
Tu działa zasada: "plus razy minus daje minus" oraz "minus razy plus daje minus"
Zapiszmy symbolicznie konwencję znakowania momentów zginających przy której będziemy używać

wzór: $\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y$

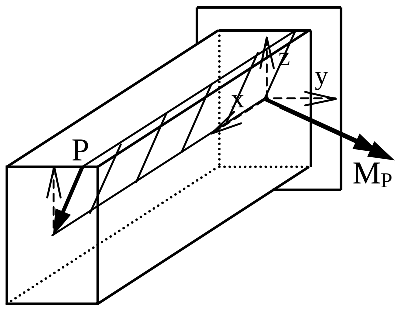
$\boxed{M_y(+) \;\Leftrightarrow\; \sigma_x(+)\,,\, z(+)} \;\Leftrightarrow\; \sigma_x(-)\,,\, z(-)$
$M_y(-) \;\Leftrightarrow\; \sigma_x(+)\,,\, z(-) \;\Leftrightarrow\; \sigma_x(-)\,,\, z(+)$
$M_z(+) \;\Leftrightarrow\; \sigma_x(+)\,,\, y(+) \;\Leftrightarrow\; \sigma_x(-)\,,\, y(-)$
$M_z(-) \;\Leftrightarrow\; \sigma_x(+)\,,\, y(-) \;\Leftrightarrow\; \sigma_x(-)\,,\, y(+)$

Z pierwszej zasady (umieszczonej w ramce) wynikają wszystkie pozostałe.

W tym przykładzie M_y oraz M_z według powyższej konwencji znakowania są dodatnie.
$M_y = 28.7614$ kNm , $M_z = 14.028$ kNm
Działanie siły P, w przekroju utwierdzenia redukuje się do tych momentów (rysunek obok),



wypadkowa od nich to wektor M_P leżący na prostej prostopadłej do płaszczyzny wyznaczonej przez wektor siły P i ramię tej siły. Wartość M_P wynosi 32 kNm .

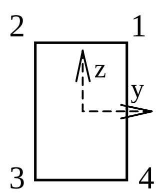


Możliwe było inne postępowanie w celu wyznaczenia momentów M_y i M_z . Obliczenie wartości momentu M_P = 20 kN * 1.6 m = 32 kNm , następnie rozłożenie go na składowe i określenie znaków według powyżej objaśnionej konwencji znakowania. Wynik jest oczywiście taki sam jak uzyskany wcześniej.

Ostatecznie do wzoru $\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y$ podstawimy : $M_y = 28.7614$ kNm , $M_z = 14.028$ kNm

$J_y = b*h^3 / 12 = 93312\ cm^4$, $J_z = h*b^3 / 12 = 41472\ cm^4$

Dla sprawdzenia zastosujemy ten wzór i obliczymy jeszcze raz naprężenia normalne w punktach narożnych przekroju utwierdzenia.



$$\sigma_{x(1)} = \frac{M_y}{J_y} z_1 + \frac{M_z}{J_z} y_1 = \left(\frac{28.7614}{93312} 0.18 + \frac{14.028}{41472} 0.12 \right) \frac{kNm}{10^{-8} m^4} m = 9.6071\ MPa$$

$$\sigma_{x(2)} = \frac{M_y}{J_y} z_2 + \frac{M_z}{J_z} y_2 = \left(\frac{28.7614}{93312} 0.18 + \frac{14.028}{41472} (-0.12) \right) \frac{kNm}{10^{-8} m^4} m = 1.4891\ MPa$$

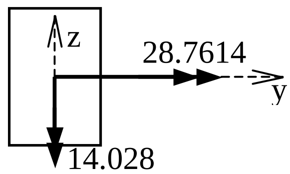
$$\sigma_{x(3)} = \frac{M_y}{J_y} z_3 + \frac{M_z}{J_z} y_3 = \left(\frac{28.7614}{93312} (-0.18) + \frac{14.028}{41472} (-0.12) \right) \frac{kNm}{10^{-8} m^4} m = -9.6071\ MPa$$

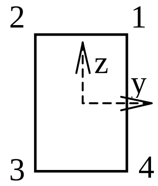
$$\sigma_{x(4)} = \frac{M_y}{J_y} z_4 + \frac{M_z}{J_z} y_4 = \left(\frac{28.7614}{93312} (-0.18) + \frac{14.028}{41472} 0.12 \right) \frac{kNm}{10^{-8} m^4} m = -1.4891\ MPa$$

Na koniec podam inną formę wzoru pozwalającego obliczyć naprężenia normalne i stowarzyszoną z nim konwencję znakowania:

Jeśli: $\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y$ to wtedy za dodatni moment zginający **musimy** uznać taki którego wektor jest zgodnie równoległy do osi układu centralnego głównego przekroju poprzecznego. Oczywiście – według tej konwencji - ujemny moment będzie skierowany przeciwnie do osi układu centralnego głównego przekroju poprzecznego.

W tym przykładzie momenty według powyższej konwencji wyniosą:
M_y = 28.7614 kNm , M_z = - 14.028 kNm
Obliczając naprężenia normalne w narożach przekroju utwierdzenia otrzymamy końcowe wyniki takie same jak poprzednio:





$$\sigma_{x(1)} = \frac{M_y}{J_y} z_1 - \frac{M_z}{J_z} y_1 = \left(\frac{28.7614}{93312} 0.18 - \frac{(-14.028)}{41472} 0.12 \right) \frac{\text{kNm}}{10^{-8}\text{m}^4} \text{m} = 9.6071\,\text{MPa}$$

$$\sigma_{x(2)} = \frac{M_y}{J_y} z_2 - \frac{M_z}{J_z} y_2 = \left(\frac{28.7614}{93312} 0.18 - \frac{(-14.028)}{41472} (-0.12) \right) \frac{\text{kNm}}{10^{-8}\text{m}^4} \text{m} = 1.4891\,\text{MPa}$$

$$\sigma_{x(3)} = \frac{M_y}{J_y} z_3 - \frac{M_z}{J_z} y_3 = \left(\frac{28.7614}{93312} (-0.18) - \frac{(-14.028)}{41472} (-0.12) \right) \frac{\text{kNm}}{10^{-8}\text{m}^4} \text{m} = -9.6071\,\text{MPa}$$

$$\sigma_{x(4)} = \frac{M_y}{J_y} z_4 - \frac{M_z}{J_z} y_4 = \left(\frac{28.7614}{93312} (-0.18) - \frac{(-14.028)}{41472} 0.12 \right) \frac{\text{kNm}}{10^{-8}\text{m}^4} \text{m} = -1.4891\,\text{MPa}$$