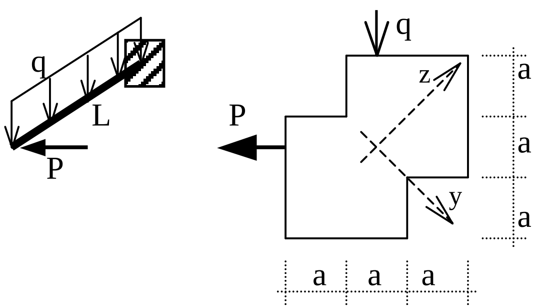
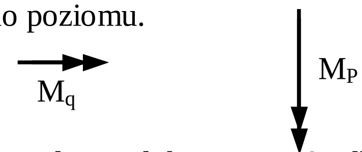
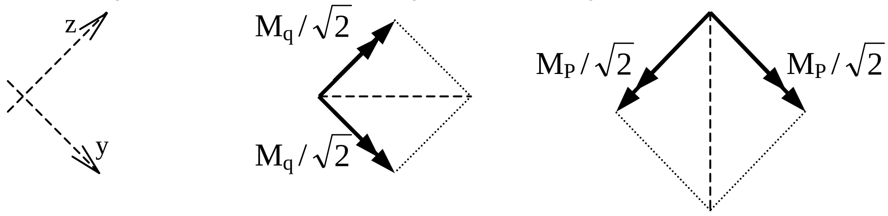


Wspornik o przekroju pokazanym obok - wymiar a=4cm, o długości L=2m, obciążono na końcu poziomą siłą P=2kN leżącą na prostej przechodzącej przez środek ciężkości i pionowym obciążeniem ciągłym o wartości q=1kN/m przyłożonym na całej długości. Wyznacz naprężenia normalne w przekroju utwierdzenia.

Przekrój posiada osie symetrii, więc są to osie centralne główne tego przekroju. Jak widać osie te są pod kątem 45^o do poziomu.



Obciążenie ciągłe q redukuje się w środku ciężkości przekroju utwierdzenia do momentu o wartości $M_q = q\,L^2 / 2 = 2$ kNm . Wektor tego momentu jest skierowany poziomo w prawo, bo musi być prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez pionową wypadkową q L i równoległe do osi pręta ramię wypadkowej.
Siła P redukuje się w środku ciężkości przekroju utwierdzenia do momentu o wartości $M_P = P\,L = 4$ kNm . Wektor tego momentu jest skierowany pionowo w dół, bo musi być prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez poziomą siłę P i równoległe do osi pręta ramię tej siły.
Kierunki działania momentów M_q i M_P nie pokrywają się z osiami centralnymi głównymi przekroju utwierdzenia (y,z), więc trzeba obliczyć składowe tych momentów na kierunkach y i z.

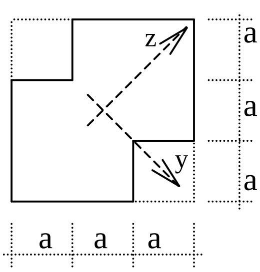


Teraz można zsumować składowe momentów na kierunkach y i z.

$$M_y = M_P/\sqrt{2} + M_q/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\ \text{kNm}$$

$$M_z = M_P/\sqrt{2} - M_q/\sqrt{2} = \sqrt{2}\ \text{kNm}$$

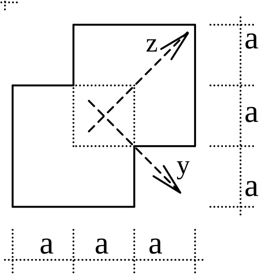
Zastosowano konwencję znakowania, według której moment dodatni "rozciąga" punkty o współrzędnych (y lub z) dodatnich.
W celu obliczenia głównych centralnych momentów bezwładności, można zauważyć że przekrój jest kwadratem 3a×3a z dwoma obciętymi narożami w formie kwadratu a×a . Oś y jest osią centralną główną dla każdego z tych trzech kwadratów.



$$J_y = \frac{(3a)^4}{12} - 2\frac{a^4}{12} = \frac{79}{12}a^4 = 1685{,}33\ \text{cm}^4$$

$$J_z = \frac{(3a)^4}{12} - 2\left[\frac{a^4}{12} + a^2\left(a\sqrt{2}\right)^2\right] = \frac{31}{12}a^4 = 661{,}33\ \text{cm}^4$$

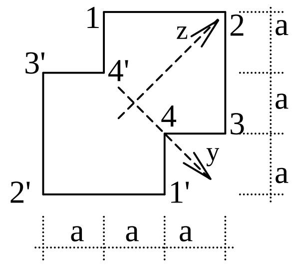
Obliczając J_z zastosowano twierdzenie Steinera.
Oś z jest centralną główną dla kwadratu 3a×3a , ale nie dla kwadratów a×a, ich środki ciężkości są odległe od osi z o $a\sqrt{2}$.
Można przekrój potraktować jako dwa kwadraty 2a×2a i usunąć jeden środkowy a×a . Przy takim podziale środki ciężkości tych kwadratów leżą na osi z



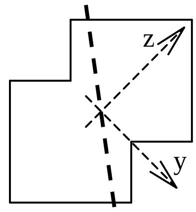
więc: $J_z = 2\frac{(2a)^4}{12} - \frac{a^4}{12} = \frac{31}{12}a^4 = 661{,}33\ \mathrm{cm}^4$

Mając obliczone momenty bezwładności i momenty zginające w układzie osi centralnych głównych, można zastosować wzór określający naprężenia normalne: $\sigma_x = \frac{M_y}{J_y}z + \frac{M_z}{J_z}y$ które obliczymy w narożach przekroju. Współrzędne tych punktów też muszą być określone w układzie osi centralnych głównych, można je odczytać z rysunku.

Punkt	y	z	σ_x [MPa]
1	$-a\sqrt{2}$	$0.5\,a\sqrt{2}$	-4.98
2	0	$1.5\,a\sqrt{2}$	21.36
3	$a\sqrt{2}$	$0.5\,a\sqrt{2}$	19.22
4	$0.5\,a\sqrt{2}$	0	6.05



Punkty o numerach i ' ("z primami"), mają obie współrzędne przeciwne w stosunku do punktów o numerach i . Naprężenia normalne w punktach i ' będą przeciwne do naprężeń normalnych w punktach i : $\sigma_{x(i')} = -\sigma_{x(i)}$.



Wyznaczymy oś obojętną naprężeń normalnych, czyli zbiór punktów dla których $\sigma_x = 0$.

Przekształcając wzór: $\sigma_x = \frac{M_y}{J_y}z + \frac{M_z}{J_z}y = 0$

otrzymamy: $z = -\frac{M_z}{M_y}\frac{J_y}{J_z}y = -0.85\,y$

Tę prostą trzeba narysować w układzie osi centralnych głównych.