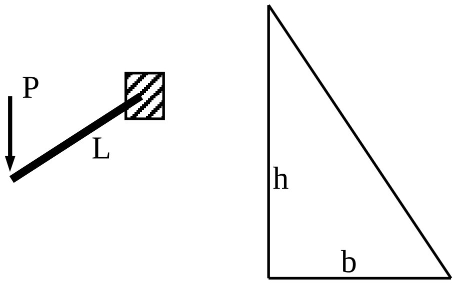
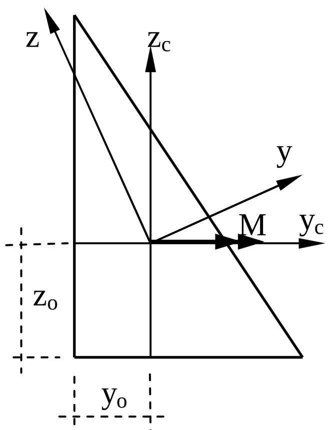


Wspornik o przekroju pokazanym obok - wymiary b=12cm, h=18cm, o długości L=2m, obciążono na końcu pionową siłą P=5kN leżącą na prostej przechodzącej przez środek ciężkości przekroju. Wyznacz naprężenia normalne oraz położenie osi obojętnej w przekroju utwierdzenia.

W treści zadania pojawiło się zastrzeżenie, że prosta działania siły przechodzi przez środek ciężkości przekroju. Gdy tak jest, to nie pojawia się moment skręcający.
W przekroju utwierdzenia obciążenie P redukuje się do pionowej siły poprzecznej Q o wartości P, oraz do momentu zginającego o wartości: $M = P\,L = 10$ kNm . Wektor momentu może być obliczony jako iloczyn wektorowy wektorów P i wektora określającego ramię siły – wektory te wyznaczają płaszczyznę pionową (P-L). Całkowity moment zginający M jest prostopadły do tej płaszczyzny.



Charakterystyki geometryczne przekroju:
Położenie środka ciężkości: $y_o=b/3=4$cm
$z_o=h/3=6$cm
Centralne (ale nie główne) momenty bezwładności i dewiacji:
$J_{yc}= h^3\, b/36 = 9 \cdot 6^3 cm^4 = 1944\ cm^4$
$J_{zc}= b^3\, h/36 = 4 \cdot 6^3 cm^4 = 864\ cm^4$
$J_{yczc}= - h^2\, b^2/72 = -3 \cdot 6^3 cm^4 = - 648\ cm^4 = D$
Główne centralne momenty bezwładności: $J_y=J_1=2247{,}5 cm^4$
$J_z=J_2=560{,}5 cm^4$

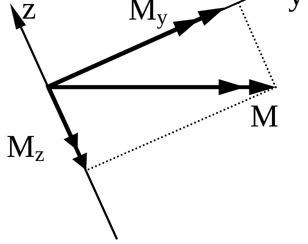
$$J_{1,2} = \frac{J_{yc}+J_{zc}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(J_{yc}-J_{zc}\right)^2 + 4D^2}$$

Położenie głównych centralnych osi bezwładności: $\operatorname{tg}\alpha_i = \dfrac{J_{yc}-J_i}{D} = \dfrac{D}{J_{zc}-J_i}$

$\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}4684$
$\operatorname{tg}\alpha_2 = -2{,}1351$
Kąt $\alpha_1 = 25{,}1^o$ zawarty jest pomiędzy osiami y_c i y.
Kąt α_2 zawarty jest pomiędzy osiami y_c i z.
Uwaga: kąt α_2 wyliczony jako arc tg(-2,1351) dałby wynik $-64{,}9^o$. Gdyby tak odmierzyć kąt α_2 od osi poziomej y_c , to oś 2 czyli z , byłaby skierowana w ten sposób, że układy osi (y_c,z_c) i (y,z) miałyby inną skrętność. Aby tego uniknąć należy przyjąć kąt $\alpha_2 = 180^o-64{,}9^o=115{,}1^o$ jak to pokazano na powyższym rysunku. Tangens kąta $115{,}1^o$ też daje -2,1351 . Teraz widać że układ osi (y,z) powstaje przez obrót osi (y_c,z_c) o kąt α_1 . Postępując prościej można wyznaczyć oś z przez obrót osi y o 90^o przeciwnie do wskazówek zegara.

Sprawdzenia: $J_{yc}+J_{zc} = J_1+J_2$, $\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 = -1$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta α_1 wynoszą: $\cos\alpha_1 = 0{,}9056 = c$
$\sin\alpha_1 = 0{,}4242 = s$
Całkowity moment zginający M jest prostopadły do płaszczyzny (P-L), czyli jest równoległy do osi y_c i rozciąga włókna górne. Musimy go rozłożyć na składowe w osiach głównych centralnych.



$M_y = M\,c = 9{,}056$ kNm , $M_z = M\,s = 4{,}242$ kNm
Powyżej zastosowano konwencję znakowania momentów zginających: moment M_y jest dodatni jeżeli rozciąga punkty które mają dodatnie współrzędne z , moment M_z jest dodatni jeżeli rozciąga punkty które mają dodatnie współrzędne y. W tym zadaniu taka sytuacja ma miejsce.

W przypadku zastosowania powyższej konwencji znakowania momentów, musimy zastosować wzór:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} \cdot z + \frac{M_z}{J_z} \cdot y \qquad \text{(I)}$$

We wzorze (I) momenty zginające M_y i M_z , momenty bezwładności J_y i J_z oraz współrzędne y i z muszą być określone w osiach centralnych głównych.

> Gdyby zastosowano konwencję znakowania momentów zginających: moment M_y jest dodatni jeżeli jest zgodnie równoległy do osi y , moment M_z jest dodatni jeżeli jest zgodnie równoległy do osi z , to należałoby przyjąć: M_y = 9,056 kNm , M_z = - 4,242 kNm .
> W przypadku zastosowania takiej konwencji znakowania momentów, musimy zastosować wzór
>
> $$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} \cdot z - \frac{M_z}{J_z} \cdot y \qquad \text{(II)}$$
>
> We wzorze (II) momenty zginające M_y i M_z , momenty bezwładności J_y i J_z oraz współrzędne y i z też muszą być określone w osiach centralnych głównych.

Niezależnie czy użyjemy wzoru (I) czy (II) z odpowiednimi momentami zginającymi, to w naszym zadaniu otrzymamy:

$$\sigma_x = \frac{9056\,\mathrm{Nm}}{2247{,}5\,\mathrm{cm}^4} \cdot z + \frac{4242\,\mathrm{Nm}}{560{,}5\,\mathrm{cm}^4} \cdot y \qquad \text{(III)}$$

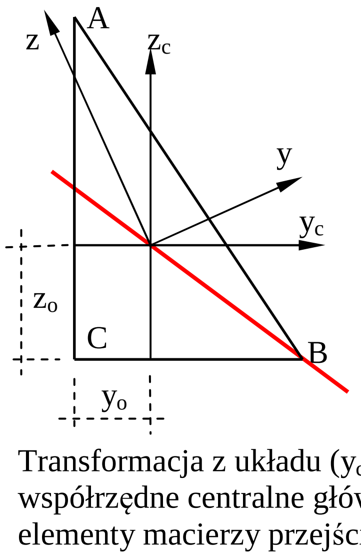
Określenie położenia osi obojętnej.
Przyrównując do zera wyrażenia występujące we wzorze (I) otrzymamy:

$$z = -\frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{J_y}{J_z} \cdot y$$

Podstawiając momenty zginające z odpowiednimi znakami, mamy:

$$z = -\frac{4{,}242}{9{,}056} \cdot \frac{2247{,}5}{560{,}5} \cdot y \;= - 1{,}878\ y$$

Prostą o takim równaniu, należy narysować w układzie osi centralnych głównych – czerwona linia.



Z rysunku wynika, że najbardziej oddalonymi od osi obojętnej są punkty A i C. Należy określić współrzędne punktów w osiach centralnych głównych. Najpierw określimy ich współrzędne w osiach centralnych y_c,z_c

Punkt A:	y_{cA} = -4cm
	z_{cA} = 12cm
Punkt B:	y_{cB} = 8cm
	z_{cB} = -6cm
Punkt C:	y_{cC} = -4cm
	z_{cC} = -6cm

Transformacja z układu (y_c , z_c) do układu (y , z) polega na obrocie o kąt α_1. Aby móc obliczyć współrzędne centralne główne, należy współrzędne centralne przemnożyć przez odpowiednie elementy macierzy przejścia.

$$\begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{ci} \\ z_{ci} \end{pmatrix}$$

Punkt A:	y_A= c (-4)+s (12) = 1,468 cm
	z_A= -s (-4)+c (12) = 12,564 cm
Punkt B:	y_B= c (8)+s (-6) = 4,7 cm
	z_B= -s (8)+c (-6) = -8,827 cm
Punkt C:	y_C= c (-4)+s (-6) = -6,168 cm
	z_C= -s (-4)+c (-6) = -3,737 cm

Naprężenia normalne w punktach A , B i C otrzymamy wstawiając powyżej obliczone współrzędne do wzoru (III):

$$\sigma_{xA} = \frac{9056\,\mathrm{Nm}}{2247{,}5\,\mathrm{cm}^4} \cdot (12{,}564)\mathrm{cm} + \frac{4242\,\mathrm{Nm}}{560{,}5\,\mathrm{cm}^4} \cdot (1{,}468)\mathrm{cm} = 61{,}73\,\mathrm{MPa}$$

W punkcie A mamy największe naprężenia rozciągające.

$$\sigma_{xB} = \frac{9056\,\mathrm{Nm}}{2247{,}5\,\mathrm{cm}^4} \cdot (-8{,}827)\mathrm{cm} + \frac{4242\,\mathrm{Nm}}{560{,}5\,\mathrm{cm}^4} \cdot (4{,}7)\mathrm{cm} = 0$$

$$\sigma_{xC} = \frac{9056\,\mathrm{Nm}}{2247{,}5\,\mathrm{cm}^4} \cdot (-3{,}737)\mathrm{cm} + \frac{4242\,\mathrm{Nm}}{560{,}5\,\mathrm{cm}^4} \cdot (-6{,}168)\mathrm{cm} = -61{,}73\,\mathrm{MPa}$$

W punkcie C mamy największe naprężenia ściskające.

W powyższych rachunkach pojawiają się jednostki:

$$\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{cm}^4} \cdot \mathrm{cm} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{cm}^3} = \frac{\mathrm{Nm}}{10^{-6}\,\mathrm{m}^3} = \frac{10^6\,\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{MPa}$$