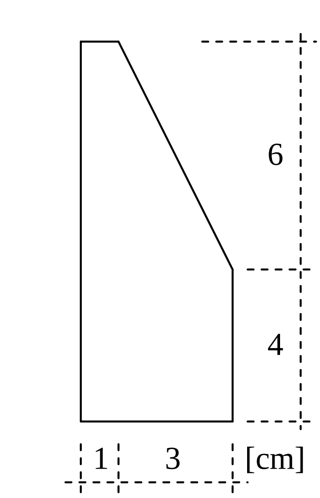
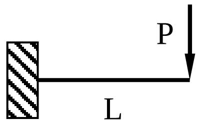
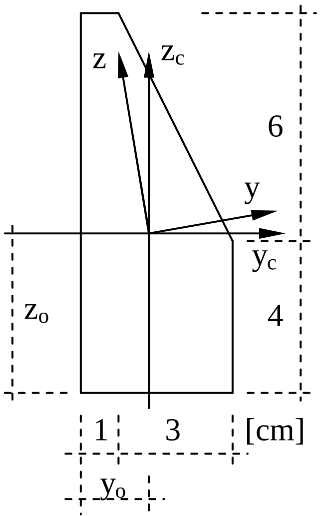
Wspornik o długości L=2m obciążono na końcu pionową siłą P=5kN , leżącą na prostej przechodzącej przez środek ciężkości przekroju. W przekroju utwierdzenia (rysunek) określ położenie osi obojętnej naprężeń normalnych σ_x . W tym przekroju oblicz największe naprężenie rozciągające oraz największe co do wartości bezwzględnej naprężenie ściskające.



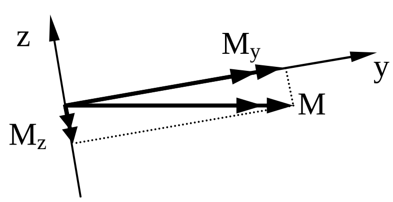


W treści zadania pojawiło się zastrzeżenie że prosta działania siły przechodzi przez środek ciężkości przekroju. Gdy tak jest, to nie pojawia się moment skręcający.
W przekroju utwierdzenia obciążenie P redukuje się do pionowej siły poprzecznej Q o wartości P, oraz do momentu zginającego o wartości M = P L = 10 kNm . Wektor momentu może być obliczony jako iloczyn wektorowy wektorów P i wektora określającego ramię siły – wektory te wyznaczają płaszczyznę pionową (P-L). Całkowity moment zginający M jest prostopadły do tej płaszczyzny.



Charakterystyki geometryczne przekroju:
Położenie środka ciężkości: y_o=53/31 cm=1,7097cm
z_o=128/31 cm=4,129cm
Centralne (ale nie główne) momenty bezwładności i dewiacji:
J_{yc}=210,82cm^4
J_{zc}=37,22cm^4
J_{yczc}=D=-30,34cm^4
Główne centralne momenty bezwładności: J_y=J_1=215,97cm^4
J_z=J_2=32,07cm^4
Położenie głównych centralnych osi bezwładności:
tg α_1 = 0,16973
tg α_2 = -5,8917
Kąt α_1 zawarty jest pomiędzy osiami y_c i y.

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta α_1 wynoszą: cos α_1 = 0,9859 = c
sin α_1 = 0,16734 = s
Całkowity moment zginający M jest prostopadły do płaszczyzny (P-L), czyli jest równoległy do osi y_c i rozciąga włókna górne. Musimy go rozłożyć na składowe w osiach głównych centralnych.



M_y = M c = 9,859 kNm , M_z = M s =1,6734 kNm
Powyżej zastosowano konwencję znakowania momentów zginających: moment M_y jest dodatni jeżeli rozciąga punkty które mają dodatnie współrzędne z , moment M_z jest dodatni jeżeli rozciąga punkty które mają dodatnie współrzędne y. W tym zadaniu taka sytuacja ma miejsce.

W przypadku zastosowania powyższej konwencji znakowania momentów, musimy zastosować wzór:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} \cdot z + \frac{M_z}{J_z} \cdot y \qquad \text{(I)}$$

We wzorze (I) momenty zginające M_y i M_z , momenty bezwładności J_y i J_z oraz współrzędne y i z muszą być określone w osiach centralnych głównych.

> Gdyby zastosowano konwencję znakowania momentów zginających: moment M_y jest dodatni jeżeli jest zgodnie równoległy do osi y , moment M_z jest dodatni jeżeli jest zgodnie równoległy do osi z , to należałoby przyjąć: M_y = 9,859 kNm , M_z = - 1,673 kNm .
> W przypadku zastosowania takiej konwencji znakowania momentów, musimy zastosować wzór
>
> $$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} \cdot z - \frac{M_z}{J_z} \cdot y \qquad \text{(II)}$$
>
> We wzorze (II) momenty zginające M_y i M_z , momenty bezwładności J_y i J_z oraz współrzędne y i z też muszą być określone w osiach centralnych głównych.

Niezależnie czy użyjemy wzoru (I) czy (II) z odpowiednimi momentami zginającymi, to w naszym zadaniu otrzymamy:

$$\sigma_x = \frac{9859\,\text{Nm}}{215{,}966\,\text{cm}^4} \cdot z + \frac{1673{,}4\,\text{Nm}}{32{,}071\,\text{cm}^4} \cdot y \qquad \text{(III)}$$

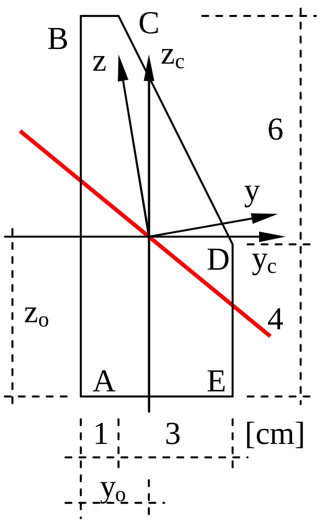
Określenie położenia osi obojętnej.
Przyrównując do zera wyrażenia występujące we wzorze (I) otrzymamy:

$$z = -\frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{J_y}{J_z} \cdot y$$

Podstawiając momenty zginające z odpowiednimi znakami, mamy:

$$z = -\frac{1{,}6734}{9{,}859} \cdot \frac{215{,}966}{32{,}071} \cdot y \ = -\ 1{,}143\ y$$

Prostą o takim równaniu, należy narysować w układzie osi centralnych głównych – czerwona linia.



Z rysunku wynika, że najbardziej oddalonymi od osi obojętnej są punkty A i C. Należy określić ich współrzędne w osiach centralnych głównych.
Najpierw określimy współrzędne tych punktów w osiach centralnych y_c , z_c

Punkt A: y_{cA}=-1,7097cm
z_{cA}=-4,129cm

Punkt C: y_{cC}=1-1,7097cm=-0,7097cm
z_{cC}=10-4,129cm=5,871cm

Transformacja z układu (y_c , z_c) do układu (y , z) polega na obrocie o kąt α_1.
Aby móc obliczyć współrzędne centralne główne, należy współrzędne centralne przemnożyć przez odpowiednie elementy macierzy przejścia.

$$\begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{ci} \\ z_{ci} \end{pmatrix}$$

Punkt A: y_A=c (-1,7097)+s (-4,129) = -2,377 cm
z_A=-s (-1,7097)+c (-4,129) = -3,785 cm

Punkt C: y_C=c (-0,7097)+s (5,871) = 0,2828 cm
z_C=-s (-0,7097)+c (5,871) = 5,907 cm

Naprężenia normalne w punktach A i C otrzymamy wstawiając powyżej obliczone współrzędne do wzoru (III):

$$\sigma_{xA} = \frac{9859\,\text{Nm}}{215{,}966\,\text{cm}^4} \cdot (-3{,}785)\text{cm} + \frac{1673{,}4\,\text{Nm}}{32{,}071\,\text{cm}^4} \cdot (-2{,}377)\text{cm} = -296{,}8\,\text{MPa}$$

W punkcie A mamy największe naprężenia ściskające.

$$\sigma_{xC} = \frac{9859\,\text{Nm}}{215{,}966\,\text{cm}^4} \cdot (5{,}907)\text{cm} + \frac{1673{,}4\,\text{Nm}}{32{,}071\,\text{cm}^4} \cdot (0{,}2828)\text{cm} = 284{,}8\,\text{MPa}$$

W punkcie C mamy największe naprężenia rozciągające.
W powyższych rachunkach pojawiają się jednostki:

$$\frac{\text{Nm}}{\text{cm}^4} \cdot \text{cm} = \frac{\text{Nm}}{\text{cm}^3} = \frac{\text{Nm}}{10^{-6}\,\text{m}^3} = \frac{10^6\,\text{N}}{\text{m}^2} = \text{MPa}$$