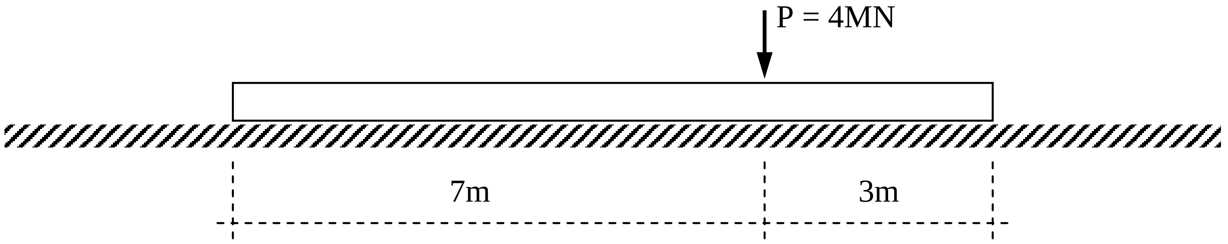
Belka na sprężystym podłożu o długości 10m obciążona jest siłą skupioną P = 4MN w odległości 7m od jednego z końców. Metodą Bleicha oblicz moment zginający w połowie krótszego przedziału charakterystycznego. Moduł sztywności (podatności) podłoża: $c = 50MN/m^3 = 50MPa/m = 50kPa/mm$. Belka o przekroju prostokątnym o szerokości b=1m , wysokości h=0,5m wykonana z materiału o module sprężystości: E = 19,2 GPa.



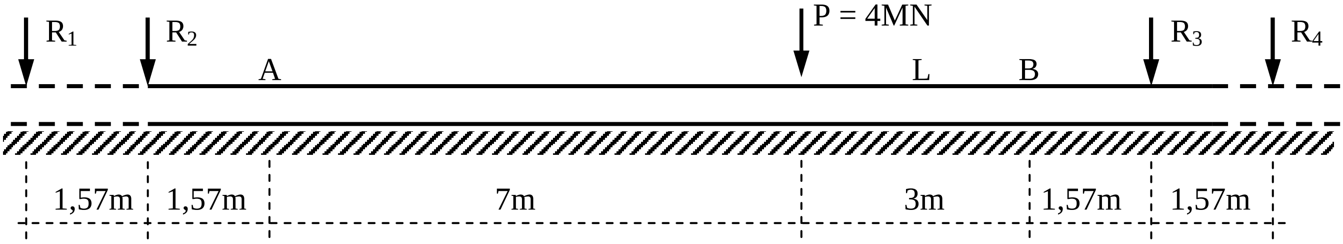
Rozwiązanie.

Współczynnik: $k = c \cdot b = 50MPa$

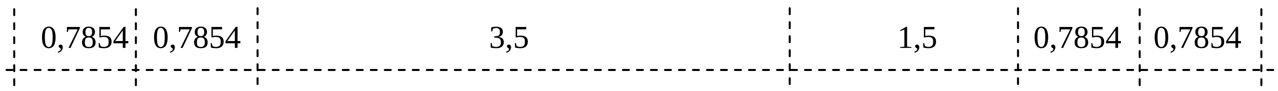
Moment bezwładności: $J_y = \dfrac{b \cdot h^3}{12} = 0{,}010417 m^4$

Współczynnik: $\alpha = \sqrt[4]{\dfrac{k}{4EJ_y}} = \sqrt[4]{\dfrac{50\ MPa}{4 \cdot 19200\ MPa \cdot 0{,}010417 m^4}} = 0{,}5/m$

Metoda Bleicha polega na rozwiązaniu nieskończonej belki obciążonej siłą P i niewiadomymi siłami R_i takimi aby momenty zginające i siły poprzeczne w punktach odpowiadających końcom rzeczywistej belki skończonej (punkty A i B) były równe zero. Siły R_i są przyłożone w odległości $\pi/(4\alpha) = \pi m/2 = 1{,}5708m$ od końców belki rzeczywistej i od siebie.



Wprowadzając bezwymiarową współrzędną $\xi = \alpha x$ można przy jej pomocy określić długości poszczególnych przedziałów:



Tak określona odległość od R_1 do A oraz od R_4 do B wynosi $\pi/2$, natomiast odległość od R_2 do A oraz od R_3 do B wynosi $\pi/4$

Moment zginający w punkcie A wynika z równoczesnego działania siły P oraz sił R_i

$M_A = 0 = M_A(R_1) + M_A(R_2) + M_A(P) + M_A(R_3) + M_A(R_4)$

Wykorzystując wzory dla belki nieskończonej mamy:

$$M_A(R_1) = \frac{R_1}{4\alpha} e^{-\pi/2}\left(\cos \pi/2 - \sin \pi/2\right) = \frac{R_1}{4\alpha}\left(-0{,}20788\right)$$

$$M_A(R_2) = \frac{R_2}{4\alpha} e^{-\pi/4}\left(\cos \pi/4 - \sin \pi/4\right) = 0$$

$$M_A(P) = \frac{P}{4\alpha} e^{-3{,}5}\left(\cos(-3{,}5) + \sin(-3{,}5)\right) = \frac{P}{4\alpha}\left(-0{,}0176858\right)$$

$$M_A(R_3) = \frac{R_3}{4\alpha} e^{-5{,}7854}\left(\cos(-5{,}7854) + \sin(-5{,}7854)\right) \approx 0$$

$$M_A(R_4) = \frac{R_4}{4\alpha} e^{-6{,}5708}\left(\cos(-6{,}5708) + \sin(-6{,}5708)\right) \approx 0$$

czyli: $M_A = 0 = \frac{R_1}{4\alpha}(-0{,}20788) + \frac{P}{4\alpha}(-0{,}0176858)$
stąd: $R_1 = -0{,}085077\ P = -0{,}34031$ MN

Siła poprzeczna w punkcie A wynika z równoczesnego działania siły P oraz sił R_i
$Q_A = 0 = Q_A(R_1) + Q_A(R_2) + Q_A(P) + Q_A(R_3) + Q_A(R_4)$
Wykorzystując wzory dla belki nieskończonej mamy:
$Q_A(R_1) = \frac{-R_1}{2} e^{-\pi/2} \cos \pi/2 = 0$
$Q_A(R_2) = \frac{-R_2}{2} e^{-\pi/4} \cos \pi/4 = \frac{-R_2}{2} 0{,}3224$
$Q_A(P) = \frac{P}{2} e^{-3{,}5} \cos(-3{,}5) = \frac{P}{2}(-0{,}02828)$
$Q_A(R_3) \approx 0$
$Q_A(R_4) \approx 0$
czyli: $Q_A = 0 = -R_2 \cdot 0{,}3224 + P \cdot (-0{,}02828)$
stąd: $R_2 = -0{,}08771\ P = -0{,}3509$ MN

Moment zginający w punkcie B wynika z równoczesnego działania siły P oraz sił R_i
$M_B = 0 = M_B(R_1) + M_B(R_2) + M_B(P) + M_B(R_3) + M_B(R_4)$
Wykorzystując wzory dla belki nieskończonej mamy:
$M_B(R_1) \approx 0$
$M_B(R_2) \approx 0$
$M_B(P) = \frac{P}{4\alpha} e^{-1{,}5}(\cos 1{,}5 - \sin 1{,}5) = \frac{P}{4\alpha}(-0{,}20679)$
$M_B(R_3) = \frac{R_3}{4\alpha} e^{-\pi/4}\left(\cos\left(-\pi/4\right) + \sin\left(-\pi/4\right)\right) = 0$
$M_B(R_4) = \frac{R_4}{4\alpha} e^{-\pi/2}\left(\cos\left(-\pi/2\right) + \sin\left(-\pi/2\right)\right) = \frac{R_4}{4\alpha}(-0{,}20788)$
czyli: $M_B = 0 = \frac{R_4}{4\alpha}(-0{,}20788) + \frac{P}{4\alpha}(-0{,}20679)$
stąd: $R_4 = -0{,}9947\ P = -3{,}979$ MN

Siła poprzeczna w punkcie B wynika z równoczesnego działania siły P oraz sił R_i
$Q_B = 0 = Q_B(R_1) + Q_B(R_2) + Q_B(P) + Q_B(R_3) + Q_B(R_4)$
Wykorzystując wzory dla belki nieskończonej mamy:
$Q_B(R_1) \approx 0$
$Q_B(R_2) \approx 0$
$Q_B(P) = \frac{-P}{2} e^{-1{,}5} \cos 1{,}5 = \frac{-P}{2} 0{,}01578$
$Q_B(R_3) = \frac{R_3}{2} e^{-\pi/4} \cos\left(-\pi/4\right) = \frac{R_3}{2} 0{,}3224$
$Q_B(R_4) = \frac{R_4}{2} e^{-\pi/2} \cos\left(-\pi/2\right) = 0$
czyli: $Q_B = 0 = R_3 \cdot 0{,}3224 + P \cdot (-0{,}01578)$
stąd: $R_3 = 0{,}0489\ P = 0{,}1958$ MN

Moment zginający w środku krótszego przedziału (czyli pomiędzy punktami P i B) obliczymy sumując momenty zginające pochodzące od siły P oraz sił R_i. Nazwijmy środek krótszego przedziału jako punkt L

$M_L = M_L(R_1) + M_L(R_2) + M_L(P) + M_L(R_3) + M_L(R_4)$
Wykorzystując wzory dla belki nieskończonej mamy:
$M_L(R_1) \approx 0$
$M_L(R_2) \approx 0$
Powyższe wartości są niewielkie ponieważ punkt L jest stosunkowo daleko od sił R_1 i R_2.

$$M_L(P) = \frac{P}{4\alpha} e^{-0,75}(\cos 0,75 - \sin 0,75) = \frac{P}{4\alpha}(0,02364)$$

$$M_L(R_3) = \frac{R_3}{4\alpha} e^{-1,5354}(\cos(-1,5354) + \sin(-1,5354)) = 0,0489 \frac{P}{4\alpha}(-0,2076)$$

$$M_L(R_4) = \frac{R_4}{4\alpha} e^{-2,3208}(\cos(-2,3208) + \sin(-2,3208)) = -0,9947 \frac{P}{4\alpha}(-0,1388)$$

Sumarycznie:

$$M_L = \frac{P}{4\alpha}(0,02364 - 0,01015 + 0,1381) = \frac{P}{4\alpha}(0,1516) = 0,3032 \text{ MNm}$$

Moment zginający w przekroju pod siłą P można obliczyć sumując momenty zginające pochodzące od siły P oraz sił R_i. Tak wyliczony moment wyniesie:
$M_P = 2,082$ MNm
Wartość ta niewiele się różni od wartości momentu zginającego w przekroju pod siłą P obliczonego przy uwzględnieniu tylko siły P a pominięciu sił R_i. Taka przybliżona wartość wyniesie: $\frac{P}{4\alpha} = 2$ MNm
Wartość maksymalnego naprężenia normalnego w przekroju pod siłą P obliczymy dzieląc moment zginający przez wskaźnik wytrzymałości przy zginaniu:

$$\sigma_{max} = \frac{M_P}{W_y} = \frac{2,082 \text{ MNm}}{\frac{1}{24}\text{ m}^3} = 49,968 \text{ MPa}$$

gdzie wskaźnik wytrzymałości przy zginaniu $W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{1}{24} \text{m}^3$