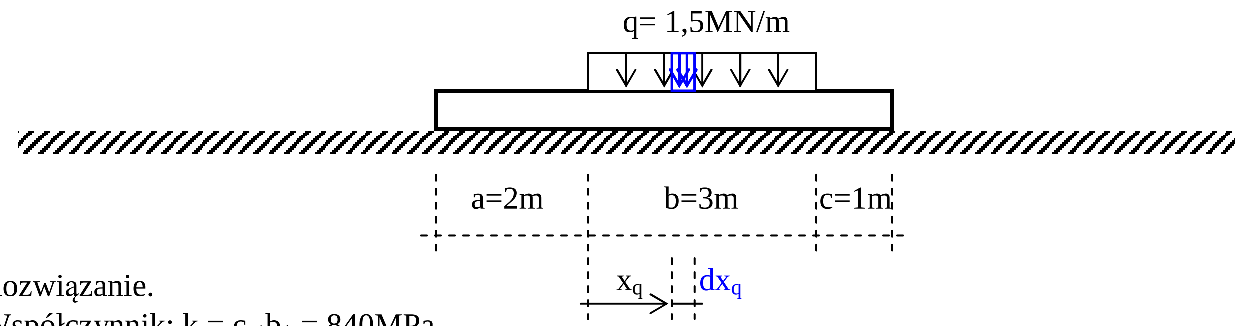
Belka na sprężystym podłożu o długości a+b+c obciążona jest obciążeniem ciągłym q na odcinku o długości b. Metodą Bleicha rozwiąż tą belkę. Moduł sztywności (podatności) podłoża: c_p = 700MN/m^3 = 700MPa/m = 700kPa/mm. Belka o przekroju prostokątnym o szerokości b_1=1,2m , wysokości h=0,55m wykonana z materiału o module sprężystości: E = 30 GPa.



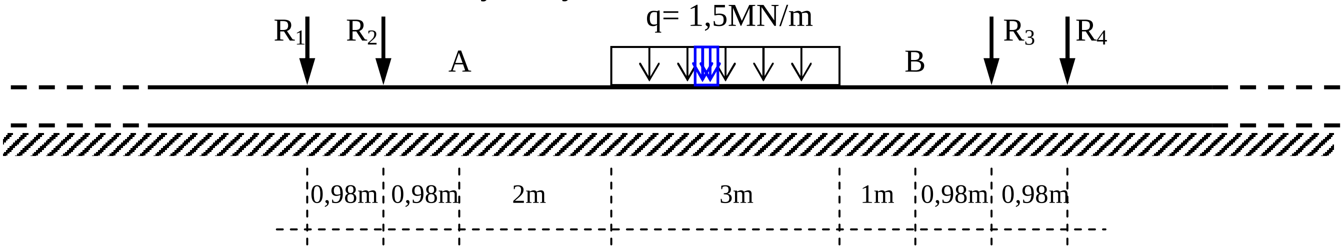
Rozwiązanie.

Współczynnik: $k = c_p \cdot b_1$ = 840MPa

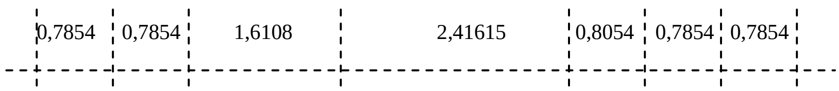
Moment bezwładności: $J_y = \dfrac{b_1 \cdot h^3}{12} = 0{,}0166375\,\mathrm{m}^4$

Współczynnik: $\alpha = \sqrt[4]{\dfrac{k}{4EJ_y}} = \sqrt[4]{\dfrac{840\ \mathrm{MPa}}{4 \cdot 30000\ \mathrm{MPa} \cdot 0{,}0166375\mathrm{m}^4}}$ = 0,805383/m

Metoda Bleicha polega na rozwiązaniu nieskończonej belki obciążonej obciążeniem q i niewiadomymi siłami R_i takimi aby momenty zginające i siły poprzeczne w punktach odpowiadających końcom rzeczywistej belki skończonej (punkty A i B) były równe zero. Siły R_i są przyłożone w odległości $\pi/(4\alpha)$ = 0,975185m od końców belki rzeczywistej i od siebie.



Wprowadzając bezwymiarową współrzędną $\xi = \alpha\ x$ można przy jej pomocy określić długości poszczególnych przedziałów:



Tak określona odległość od R_1 do A oraz od R_4 do B wynosi $\pi/2$, natomiast odległość od R_2 do A oraz od R_3 do B wynosi $\pi/4$

Moment zginający w punkcie A wynika z równoczesnego działania obciążenia q oraz sil R_i

$M_A = 0 = M_A(R_1) + M_A(R_2) + M_A(q) + M_A(R_3) + M_A(R_4)$

Wykorzystując wzory dla belki nieskończonej mamy:

$$M_A(R_1) = \frac{R_1}{4\alpha} e^{-\pi/2}\left(\cos \pi/2 - \sin \pi/2\right) = \frac{R_1}{4\alpha}(-0{,}20788)$$

$$M_A(R_2) = \frac{R_2}{4\alpha} e^{-\pi/4}\left(\cos \pi/4 - \sin \pi/4\right) = 0$$

$M_A(q) = \Sigma\, M_A(q\ dx_q)$

$$M_A(R_3) = \frac{R_3}{4\alpha} e^{-5{,}6178}\left(\cos(-5{,}6178) + \sin(-5{,}6178)\right) \approx 0$$

$$M_A(R_4) = \frac{R_4}{4\alpha} e^{-6{,}4032}\left(\cos(-6{,}4032) + \sin(-6{,}4032)\right) \approx 0$$

Moment zginający w punkcie A pochodzący od „siły skupionej”: $q\ dx_q$, czyli od wypadkowej zebranej z odcinka dx_q od obciążenia q działającego w odległości x_q od początku obciążenia ciągłego, wynosi:

$M_A(q\,dx_q) = \dfrac{q\,dx_q}{4\alpha} e^{-\alpha(a+x_q)}\left[\cos(-\alpha(a+x_q)) + \sin(-\alpha(a+x_q))\right]$

Moment zginający w punkcie A pochodzący od całego obciążenia q, to sumaryczne działanie „sił skupionych”: $q\,dx_q$, które są przyłożone na odcinku o długości b, czyli:

$$M_A(q) = \Sigma M_A(q\,dx_q) = \int_0^b \frac{q}{4\alpha} e^{-\alpha(a+x_q)}\left[\cos(-\alpha(a+x_q)) + \sin(-\alpha(a+x_q))\right] dx_q =$$

$$= \frac{q}{4\alpha^2}\left[e^{-\alpha(a+x_q)} \sin(\alpha(a+x_q))\right]_0^b = \frac{q}{4\alpha^2}\left[e^{-\alpha(a+b)} \sin(\alpha(a+b)) - e^{-\alpha a} \sin(\alpha a)\right] \qquad \text{(wzór „Mqbla”)}$$

W ogólnym przypadku powyższy wzór pozwala określić wartość momentu zginającego od obciążenia ciągłego q działającego na odcinku o długości **b** w punkcie oddalonym o **a** na lewo od tego obciążenia - w belce nieskończenie długiej.

Po podstawieniu wartości liczbowych mamy:

$$M_A(q) = \frac{q}{4\alpha}\frac{1}{\alpha}\left[e^{-4{,}027} \sin(4{,}027) - e^{-1{,}6108} \sin(1{,}6108)\right] = \frac{q}{4\alpha}\frac{1}{\alpha}\left[-0{,}21334\right] = \frac{q}{4\alpha}[-0{,}2649\text{ m}]$$

$$M_A = 0 = \frac{R_1}{4\alpha}(-0{,}20788) + \frac{q}{4\alpha}[-0{,}2649\text{ m}]$$

stąd: $R_1 = -1{,}2748\text{ q m} = -1{,}9114\text{ MN}$

Siła poprzeczna w punkcie A wynika z równoczesnego działania obciążenia q oraz sil R_i

$Q_A = 0 = Q_A(R_1) + Q_A(R_2) + Q_A(q) + Q_A(R_3) + Q_A(R_4)$

Wykorzystując wzory dla belki nieskończonej mamy:

$$Q_A(R_1) = \frac{-R_1}{2} e^{-\pi/2} \cos \pi/2 = 0$$

$$Q_A(R_2) = \frac{-R_2}{2} e^{-\pi/4} \cos \pi/4 = \frac{-R_2}{2} 0{,}3224$$

$Q_A(q) = \Sigma Q_A(q\,dx_q)$

$Q_A(R_3) \approx 0$

$Q_A(R_4) \approx 0$

Siła poprzeczna w punkcie A pochodząca od „siły skupionej”: $q\,dx_q$, czyli od wypadkowej zebranej z odcinka dx_q od obciążenia q działającego w odległości x_q od początku obciążenia ciągłego, wynosi:

$$Q_A(q\,dx_q) = \frac{q\,dx_q}{2} e^{-\alpha(a+x_q)} \cos(-\alpha(a+x_q))$$

Siła poprzeczna w punkcie A pochodząca od całego obciążenia q, to sumaryczne działanie „sił skupionych”: $q\,dx_q$, które są przyłożone na odcinku o długości b, czyli:

$$Q_A(q) = \Sigma Q_A(q\,dx_q) = \int_0^b \frac{q}{2} e^{-\alpha(a+x_q)} \cos(-\alpha(a+x_q))\,dx_q =$$

$$= \frac{q}{4\alpha} e^{-\alpha(a+x_q)}\left[\sin(\alpha(a+x_q)) - \cos(\alpha(a+x_q))\right]_0^b =$$

$$= \frac{q}{4\alpha}\left[e^{-\alpha(a+b)}\left[\sin(\alpha(a+b)) - \cos(\alpha(a+b))\right] - e^{-\alpha a}\left[\sin(\alpha a) - \cos(\alpha a)\right]\right] \qquad \text{(wzór „Qqbla”)}$$

W ogólnym przypadku powyższy wzór pozwala określić wartość siły poprzecznej od obciążenia ciągłego q działającego na odcinku o długości **b** w punkcie oddalonym o **a** na lewo od tego obciążenia - w belce nieskończenie długiej.

Po podstawieniu wartości liczbowych mamy:

$$Q_A(q) = \frac{q}{4\alpha}\left[e^{-4{,}027}\left[\sin(4{,}027) - \cos(4{,}027)\right] - e^{-1{,}6108}\left[\sin(1{,}6108) - \cos(1{,}6108)\right]\right] = \frac{q}{4\alpha}[-0{,}21] = -0{,}0978\text{ MN}$$

$Q_A = 0 = - R_2 \cdot 0{,}1612 - 0{,}0978$ MN
stąd: $R_2 = -0{,}6066$ MN

Moment zginający w punkcie B wynika z równoczesnego działania obciążenia q oraz sil R_i
$M_B = 0 = M_B(R_1) + M_B(R_2) + M_B(q) + M_B(R_3) + M_B(R_4)$
Wykorzystując wzory dla belki nieskończonej mamy:
$M_B(R_1) \approx 0$
$M_B(R_2) \approx 0$
$M_B(q) = \Sigma M_B(q\, dx_q)$
$M_B(R_3) = \dfrac{R_3}{4\alpha} e^{-\pi/4}\left(\cos\left(-\pi/4\right) + \sin\left(-\pi/4\right)\right) = 0$
$M_B(R_4) = \dfrac{R_4}{4\alpha} e^{-\pi/2}\left(\cos\left(-\pi/2\right) + \sin\left(-\pi/2\right)\right) = \dfrac{R_4}{4\alpha}(-0{,}20788)$

Moment zginający w punkcie B pochodzący od „siły skupionej”: $q\, dx_q$, czyli od wypadkowej zebranej z odcinka dx_q od obciążenia q działającego w odległości x_q od początku obciążenia ciągłego, wynosi:

$M_B(q\, dx_q) = \dfrac{q\, dx_q}{4\alpha} e^{-\alpha(b+c-x_q)}\left[\cos(\alpha(b+c-x_q)) - \sin(\alpha(b+c-x_q))\right]$

Moment zginający w punkcie B pochodzący od całego obciążenia q, to sumaryczne działanie „sił skupionych”: $q\, dx_q$, które są przyłożone na odcinku o długości b, czyli:

$M_B(q) = \Sigma M_B(q\, dx_q) = \int_0^b \dfrac{q}{4\alpha} e^{-\alpha(b+c-x_q)}\left[\cos(\alpha(b+c-x_q)) - \sin(\alpha(b+c-x_q))\right] dx_q =$

$= \dfrac{-q}{4\alpha^2}\left[e^{-\alpha(b+c-x_q)} \sin(\alpha(b+c-x_q))\right]_0^b = \dfrac{q}{4\alpha^2}\left[e^{-\alpha(c+b)} \sin(\alpha(c+b)) - e^{-\alpha c} \sin(\alpha c)\right]$ (wzór „Mqbpc”)

W ogólnym przypadku powyższy wzór pozwala określić wartość momentu zginającego od obciążenia ciągłego q działającego na odcinku o długości **b** w punkcie oddalonym o **c** na prawo od tego obciążenia - w belce nieskończenie długiej.

Po podstawieniu wartości liczbowych mamy:

$M_B(q) = \dfrac{q}{4\alpha}\dfrac{1}{\alpha}\left[e^{-3{,}2215} \sin(3{,}2215) - e^{-0{,}8054} \sin(0{,}8054)\right] = \dfrac{q}{4\alpha}\dfrac{1}{\alpha}[-0{,}32545] = \dfrac{q}{4\alpha}[-0{,}4041 \text{ m}]$

$M_B = 0 = \dfrac{R_4}{4\alpha}(-0{,}20788) + \dfrac{q}{4\alpha}[-0{,}4041 \text{ m}]$

stąd: $R_4 = -1{,}944$ q m $= -2{,}9159$ MN

Siła poprzeczna w punkcie B wynika z równoczesnego działania obciążenia q oraz sil R_i
$Q_B = 0 = Q_B(R_1) + Q_B(R_2) + Q_B(q) + Q_B(R_3) + Q_B(R_4)$
Wykorzystując wzory dla belki nieskończonej mamy:
$Q_B(R_1) \approx 0$
$Q_B(R_2) \approx 0$
$Q_B(q) = \Sigma Q_B(q\, dx_q)$
$Q_B(R_3) = \dfrac{R_3}{2} e^{-\pi/4} \cos\left(-\pi/4\right) = \dfrac{R_3}{2} 0{,}3224$
$Q_B(R_4) = \dfrac{R_4}{2} e^{-\pi/2} \cos\left(-\pi/2\right) = 0$

Siła poprzeczna w punkcie B pochodząca od „siły skupionej”: $q\, dx_q$, czyli od wypadkowej zebranej z odcinka dx_q od obciążenia q działającego w odległości x_q od początku obciążenia ciągłego, wynosi:

$Q_B(q\,dx_q) = \dfrac{-q\,dx_q}{2} e^{-\alpha(b+c-x_q)} \cos(\alpha(b+c-x_q))$

Siła poprzeczna w punkcie A pochodząca od całego obciążenia q, to sumaryczne działanie „sił skupionych”: $q\,dx_q$, które są przyłożone na odcinku o długości b, czyli:

$$Q_B(q) = \Sigma\, Q_B(q\,dx_q) = \int_0^b \frac{-q}{2} e^{-\alpha(b+c-x_q)} \cos(\alpha(b+c-x_q))\,dx_q =$$

$$= \frac{q}{4\alpha} e^{-\alpha(b+c-x_q)} \left[\sin(\alpha(b+c-x_q)) - \cos(\alpha(b+c-x_q))\right]_0^b =$$

$$= \frac{q}{4\alpha}\left[e^{-\alpha c}\left[\sin(\alpha c) - \cos(\alpha c)\right] - e^{-\alpha(c+b)}\left[\sin(\alpha(c+b)) - \cos(\alpha(c+b))\right]\right] \qquad \text{(wzór „Qqbpc”)}$$

W ogólnym przypadku powyższy wzór pozwala określić wartość siły poprzecznej od obciążenia ciągłego q działającego na odcinku o długości **b** w punkcie oddalonym o **c** na prawo od tego obciążenia - w belce nieskończenie długiej.

Po podstawieniu wartości liczbowych mamy:

$$Q_B(q) = \frac{q}{4\alpha}\left[e^{-0,8054}\left[\sin(0,8054) - \cos(0,8054)\right] - e^{-3,2215}\left[\sin(3,2215) - \cos(3,2215)\right]\right] = \frac{q}{4\alpha}\left[-0,02403\right] =$$

$-0,01119$ MN

$Q_B = 0 = R_3 \cdot 0,1612 - 0,01119$ MN

stąd: $R_3 = 0,0694$ MN

Wykorzystując zasadę superpozycji wzory dla sił skupionych i wzory „Mqbla” , „Mqbpc” , „Qqbla” , „Qqbpc” można obliczyć wartości sił przekrojowych.