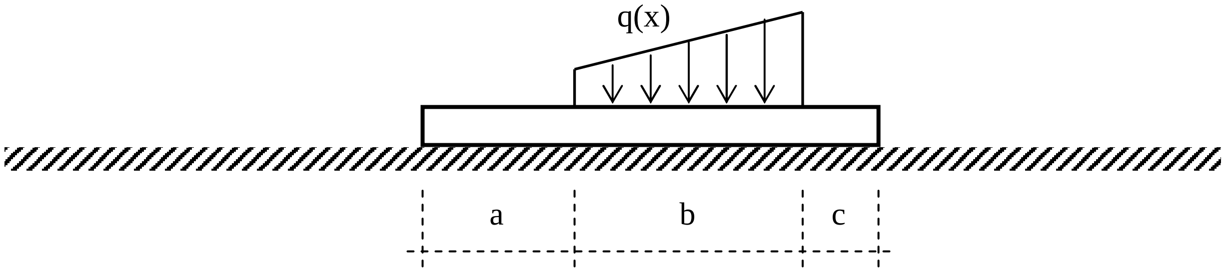
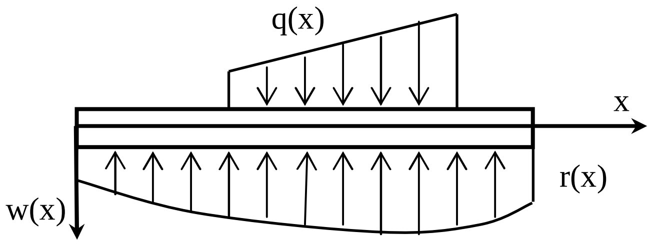
Belka na sprężystym podłożu.
Belka o całkowitej długości a+b+c spoczywa na sprężystym podłożu.
Belka ta wykonana jest z materiału sprężystego i obciążona jest obciążeniem ciągłym q(x) na odcinku o długości b.



Można się spodziewać że podłoże oddziaływać będzie na belkę nieznanym w tej chwili odporem r(x) na całej jej długości: a+b+c.



Zależność różniczkowa wiążąca funkcję momentu zginającego M(x) i sumaryczne obciążenie działające na belkę:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x) + r(x)$$

Z kolei moment zginający M(x) w danym przekroju jest proporcjonalny do modułu Younga materiału: E, momentu bezwładności przekroju poprzecznego belki: J_y , oraz krzywizny belki – czyli (w przybliżeniu) drugiej pochodnej funkcji ugięcia w(x).

$$M(x) = -\, E \cdot J_y \, \frac{d^2w(x)}{dx^2}$$

Wstawiając drugie z równań do pierwszego otrzymamy:

$$-\, E \cdot J_y \, \frac{d^4w(x)}{dx^4} = -q(x) + r(x)$$

Założenia dotyczące podłoża:
1) więzy są gładkie – bez tarcia,
2) odpór jest proporcjonalny do ugięcia: $r(x) = k \cdot w(x)$
gdzie współczynnik proporcjonalności (k) jest iloczynem szerokości belki (b_1) i
modułu sztywności podłoża (c_p)
$k = b_1 \cdot c_p$
Współczynnik c_p określa potencjalne ugięcie podłoża pod wpływem obciążenia, przykładowo – jeśli c_p wynosi:
c_p = 700MN/m^3 = 700MPa/m = 700kPa/mm, to podłoże ugnie się o 1mm jeśli na podłoże oddziałuje ciśnienie 700 kPa
Im większa wartość c_p tym podłoże jest sztywniejsze.

Teraz równanie różniczkowe przyjmie postać:

$$E \cdot J_y \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + k \cdot w(x) = q(x)$$

Po podzieleniu przez (E J_y) i wprowadzeniu definicji: $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ_y}}$ otrzymamy

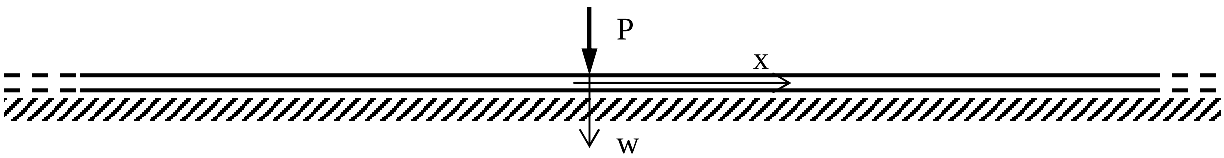
$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 4\,\alpha^4\, w(x) = \frac{q(x)}{E \cdot J_y}$$

Całka ogólna równania jednorodnego to:

$$w_o(x) = e^{-\alpha x}\left(A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)\right) + e^{\alpha x}\left(C \cdot \sin(\alpha x) + D \cdot \cos(\alpha x)\right)$$

gdzie A,B,C,D to nieznane w tej chwili stałe.

Belka nieskończenie długa obciążona siłą skupioną P w miejscu x=0:



W tym przypadku q(x)=0 więc rozwiązanie równania różniczkowego składa się tylko z całki ogólnej. Dla x>0 stałe C oraz D muszą wynosić zero bo bez tego człon zawierający $e^{\alpha x}$ dążyłby do nieskończoności. Czyli dla x>0 mamy:

$$w(x) = e^{-\alpha x}\left(A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)\right)$$

Funkcja określająca kąt ugięcia – w przybliżeniu pochodna funkcji ugięcia:

$$w'(x) = e^{-\alpha x}(-\alpha)\left(A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)\right) + e^{-\alpha x}\left(A \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha x) - B \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha x)\right)$$

Z uwagi na symetrię zadania kąt ugięcia w przekroju x=0 musi wynosić zero, czyli:

$w'(x=0) = -\alpha \cdot B + A \cdot \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B$

Po uporządkowaniu pierwsza, druga i trzecia pochodna funkcji ucięć przyjmą postacie:

$w'(x) = -2\,\alpha \cdot A \cdot e^{-\alpha x} \sin(\alpha x)$

$w''(x) = 2\,\alpha^2 \cdot A \cdot e^{-\alpha x}\left(\sin(\alpha x) - \cos(\alpha x)\right)$

$w'''(x) = 4\,\alpha^3 \cdot A \cdot e^{-\alpha x} \cos(\alpha x)$

W funkcji sil poprzecznych Q(x) w miejscu przyłożenia siły P pojawi się tzw. „skok" o wartości P, czyli dx na lewo od siły P: Q=P/2 natomiast dx na prawo od siły P: Q=–P/2

$Q(x=0+dx) = -P/2$

$M'(x=0+dx) = -P/2$

$-E \cdot J_y \cdot w'''(x=0+dx) = -P/2$

czyli:

$$w'''(x=0+dx) = 4\,\alpha^3 \cdot A \cdot = \frac{P}{2\,E\,J_y}$$

stąd: $A = \frac{P}{8\,\alpha^3\,E\,J_y} = \frac{P\,\alpha}{2\,k} = \frac{P\,\alpha}{2\,b_1 \cdot c_p}$

Dla x<0 można postąpić analogicznie.