Dla danego pola przemieszczeń wyznaczyć w punkcie A: tensor odkształceń, odkształcenie liniowe włókna równoległego do wektora **a**

$u_1 = 1 + 0{,}01\, x_1 x_2 + 0{,}005\, x_3$

$u_2 = 0{,}5 - 0{,}005\, x_1 + 0{,}01\, x_2 x_3$

$u_3 = 1 - 0{,}01\, x_1 x_2 x_3$

Uwaga dotycząca jednostek: Lewe strony równań to przemieszczenia a one są wyrażane w metrach [m]. W tych samych jednostkach powinny być prawe strony równań. Współrzędne położenia punktu x_i są też w [m]. Aby uporządkować jednostki, niektóre człony powyższych równań należałoby pomnożyć przez [m] w odpowiedniej potędze. Po uporządkowaniu jednostek równania określające pole przemieszczeń wyglądają następująco:

$u_1 = 1\text{m} + 0{,}01\, x_1 x_2 /\text{m} + 0{,}005\, x_3$

$u_2 = 0{,}5\text{m} - 0{,}005\, x_1 + 0{,}01\, x_2 x_3 /\text{m}$

$u_3 = 1\text{m} - 0{,}01\, x_1 x_2 x_3 /\text{m}^2$

Pamiętając o tym że u oraz x wyrażone są w metrach można stosować pierwszą postać równań (bez jednostek).

Współrzędne p. A: $\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ wektor $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie:

Pole odkształceń (dla każdego punktu) określamy wykorzystując równania geometryczne Cauchy'ego

$\varepsilon_{11} = \partial u_1/\partial x_1 = 0{,}01\, x_2$

$\varepsilon_{22} = \partial u_2/\partial x_2 = 0{,}01\, x_3$

$\varepsilon_{33} = \partial u_3/\partial x_3 = -\, 0{,}01\, x_1 x_2$

$\varepsilon_{12} = 0{,}5\, (\partial u_1/\partial x_2 + \partial u_2/\partial x_1) = 0{,}5\, (0{,}01\, x_1 - 0{,}005)$

$\varepsilon_{13} = 0{,}5\, (\partial u_1/\partial x_3 + \partial u_3/\partial x_1) = 0{,}5\, (0{,}005 - 0{,}01\, x_2 x_3)$

$\varepsilon_{23} = 0{,}5\, (\partial u_2/\partial x_3 + \partial u_3/\partial x_2) = 0{,}5\, (0{,}01\, x_2 - 0{,}01\, x_1 x_3)$

Wstawiając do powyższych równań współrzędne punktu A, określimy w tym punkcie stan odkształceń reprezentowany przez tensor : $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

$\varepsilon_{11} = -\, 0{,}01$

$\varepsilon_{22} = 0$

$\varepsilon_{33} = 0{,}005$

$\varepsilon_{12} = 0{,}5\, (0{,}01{*}0{,}5 - 0{,}005) = 0$

$\varepsilon_{13} = 0{,}5\, (0{,}005) = 0{,}0025$

$\varepsilon_{23} = 0{,}5\, (0{,}01{*}(-1)) = -0{,}005$

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0 & 0{,}0025 \\ 0 & 0 & -0{,}005 \\ 0{,}0025 & -0{,}005 & 0{,}005 \end{bmatrix}$$

Wektor **a** określa kierunek który można związać z nowym układem współrzędnych x'

Wersor równoległy do nowej osi x_1' to unormowany wektor **a**

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{bmatrix}$$

Odkształcenie liniowe włókna równoległego do wektora **a**, jest odkształceniem liniowym włókna równoległego do nowej osi x_1' , czyli jest to ε_{11}'

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}' = \alpha_{1i}\, \alpha_{1j}\, \varepsilon_{ij} = \quad & \alpha_{11}\, \alpha_{11}\, \varepsilon_{11} + \alpha_{11}\, \alpha_{12}\, \varepsilon_{12} + \alpha_{11}\, \alpha_{13}\, \varepsilon_{13} + \\ & \alpha_{12}\, \alpha_{11}\, \varepsilon_{21} + \alpha_{12}\, \alpha_{12}\, \varepsilon_{22} + \alpha_{12}\, \alpha_{13}\, \varepsilon_{23} + \\ & \alpha_{13}\, \alpha_{11}\, \varepsilon_{31} + \alpha_{13}\, \alpha_{12}\, \varepsilon_{32} + \alpha_{13}\, \alpha_{13}\, \varepsilon_{33} + \end{aligned}$$

Powyżej zastosowano wzór transformacyjny dla tensora 2-go rzędu

Po wykonaniu rachunków otrzymamy:

$\varepsilon_{11}' = \alpha_{11}^2\ \varepsilon_{11} = (9/25){*}(-0{,}01) = -3{,}6{*}10^{-3}$