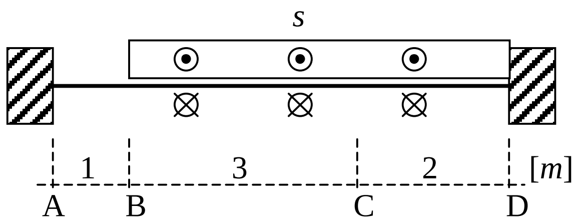
Określić wartość obciążenia w postaci rozłożonego na długości momentu skręcającego s, tak by ekstremalny kąt obrotu żadnego przekroju poprzecznego nie przekroczył 0,001 radiana, czyli $\varphi \le 0{,}001$

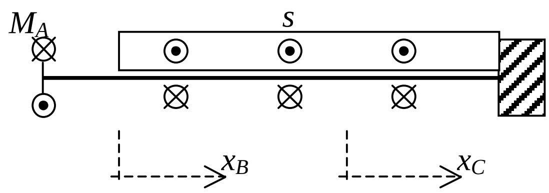
Pozostałe dane: moduł ścinania materiału: G = 70GPa
momenty bezwładności przy skręcaniu: J_1=3000 cm^4 na odcinku A-C
J_2=2000 cm^4 na odcinku C-D



Rozwiązanie:

Belka jest obustronnie utwierdzona, czyli statycznie niewyznaczalna. Z równania statyki można wywnioskować tylko że suma momentów utwierdzenia w przekrojach A oraz D równoważy wypadkową od obciążenia ciągłego która wynosi: s·5m

Reakcję M_A wyznaczymy wykorzystując warunek kinematyczny: $\varphi_{A/D} = 0$, obrót utwierdzenia D względem utwierdzenia A musi wynosić zero.



Zapiszemy równania momentów skręcających (sił przekrojowych) oraz jednostkowych kątów obrotu Θ w kolejnych przedziałach charakterystycznych:

	$M_s(x)$=	$\Theta(x)$=
A-B:	M_A	$M_A /(G\ J_1)$
B-C:	$M_A - s\ x_B$	$(M_A - s\ x_B)/(G\ J_1)$
C-D:	$M_A - s\ 3m - s\ x_C$	$(M_A - s\ 3m - s\ x_C)/(G\ J_2)$

W przedziale B-C i C-D funkcję momentów skręcających można by zapisać tak samo. Wprowadzenie współrzędnych lokalnych x_B i x_C formalnie zmienia zapis, ale później ułatwi całkowanie (dolna granica całkowania równa zero).

Obliczamy względne kąty obrotu pojawiające się na kolejnych przedziałach charakterystycznych.

Kąt obrotu przekroju B względem A wynosi: $\varphi_{A/B} = M_A\ 1m /(G\ J_1)$

Kąt obrotu przekroju C względem B wynosi:

$$\varphi_{B/C} = \frac{1}{G\ J_1}\int_0^{3m}(M_A - s\ x_B)dx_B = \frac{1}{G\ J_1}\left(M_A\ 3m - s\ \frac{x_B^2}{2}\Big|_0^{3m}\right) = \frac{1}{G\ J_1}\left(M_A\ 3m - s\ 4{,}5m^2\right)$$

Kąt obrotu przekroju D względem C wynosi:

$$\varphi_{C/D} = \frac{1}{G\ J_2}\int_0^{2m}(M_A - s\ 3m - s\ x_C)dx_C = \frac{1}{G\ J_2}\left(M_A\ 2m - s\ 3m\ 2m - s\ \frac{x_C^2}{2}\Big|_0^{2m}\right) = \frac{1}{G\ J_2}\left(M_A\ 2m - s\ 8m^2\right)$$

Z warunku kinematycznego $\varphi_{A/D} = 0$ mamy: $\varphi_{A/B} + \varphi_{B/C} + \varphi_{C/D} = 0$

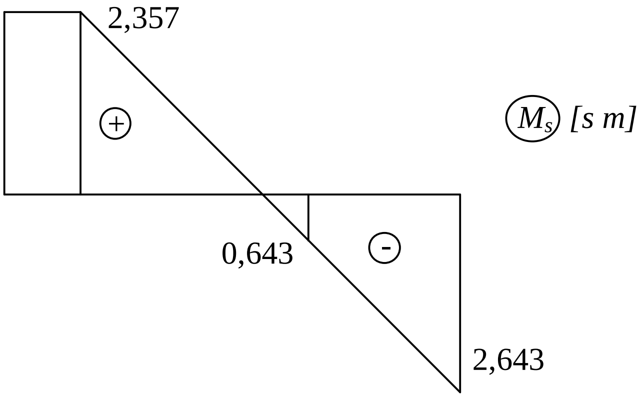
Powyższe równanie pomnożone razy $G\ J_1$ daje:

$$M_A\ 1m + M_A\ 3m - s\ 4{,}5m^2 + \frac{J_1}{J_2}\left(M_A\ 2m - s\ 8m^2\right) = 0$$

czyli: $M_A\ 1 + M_A\ 3 - s\ 4{,}5m + \frac{3}{2}\left(M_A\ 2 - s\ 8m\right) = 0$

a stąd: $M_A = \frac{16{,}5}{7} s\ m = 2{,}357\ s\ m$

Teraz można sporządzić wykres momentów skręcających – sił przekrojowych.

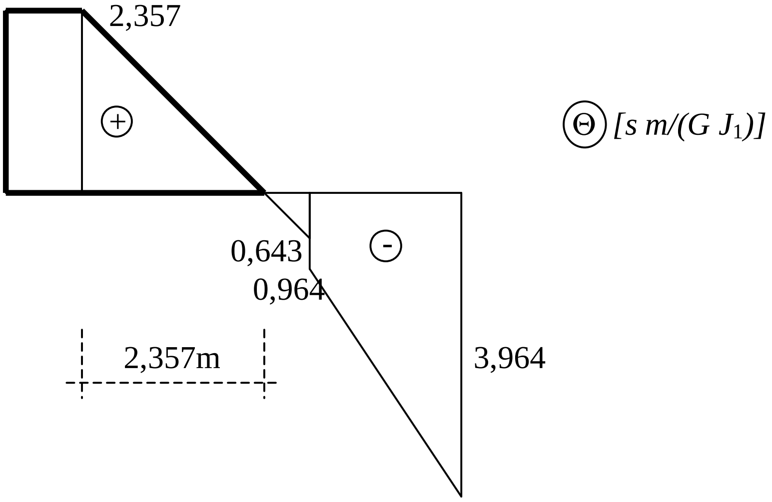


Patrząc na wykres widzimy miejsce zerowe $M_s(x)$, tam też zeruje się jednostkowy kąt obrotu $\Theta(x)$, czyli tam – na odcinku B-C wystąpi ekstremum funkcji kąta obrotu φ

Obliczymy współrzędną x_B dla której zeruje się $M_s(x_B)$

$$M_A - s\, x_B = 0 \quad \Rightarrow \quad x_B = \frac{M_A}{s} = \frac{2{,}357 s\, m}{s} = 2{,}357 m$$

Wykres jednostkowych kątów obrotu otrzymamy dzieląc rzędne wykresu $M_s(x)$ przez **odpowiednie** $G\,J$



Wykres jest opisany przy pomocy jednostki $[s\, m/(G\, J_1)]$. W przekroju D wartość jednostkowego kąta obrotu wynosi: $\Theta_D = \dfrac{2{,}643\; s\; m}{G\; J_2} = \dfrac{2{,}643\; s\; m}{G\; J_2}\dfrac{J_1}{J_1} = \dfrac{3{,}964\; s\; m}{G\; J_1}$

Analogicznie na prawo od przekroju C: $\Theta_{C+} = \dfrac{0{,}643\; s\; m}{G\; J_2} = \dfrac{0{,}643\; s\; m}{G\; J_2}\dfrac{J_1}{J_1} = \dfrac{0{,}964\; s\; m}{G\; J_1}$

Teraz ekstremalny kąt obrotu możemy obliczyć jako całkę oznaczoną funkcji Θ na odcinku od A do miejsca zerowego funkcji Θ , czyli jako pole pod „dodatnią" częścią wykresu Θ (zaznaczono grubą linią)

$$\varphi_{extr} = 1m\, \frac{2{,}357\; s\; m}{G\; J_1} + \frac{1}{2} 2{,}357m\, \frac{2{,}357\; s\; m}{G\; J_1} = \frac{5{,}1352\; s\; m^2}{G\; J_1}$$

Jako sprawdzenie można potraktować obliczenie pozostałej części całki, to znaczy od miejsca zerowego Θ do przekroju D (czyli pole „ujemnej" części wykresu Θ). Rezultatem jest ta sama wartość co poprzednio, tylko że ze znakiem ujemnym.

Oczywiście suma tych dwu pól: „dodatniego" i „ujemnego" to nic innego jak $\varphi_{\mathrm{A/D}}$

Teraz φ_{extr} porównujemy z ograniczeniem podanym w temacie zadania.

$$\varphi_{extr} = \frac{5{,}1352\; s\; m^2}{G\; J_1} \le 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad s \le 10^{-3} \frac{G\; J_1}{5{,}1352\; m^2} = 10^{-3} \frac{70 \cdot 10^9 \,\frac{N}{m^2}\, 3 \cdot 10^3\, 10^{-8} m^4}{5{,}1352\; m^2} = 408{,}94 N = 0{,}409 \frac{kNm}{m}$$