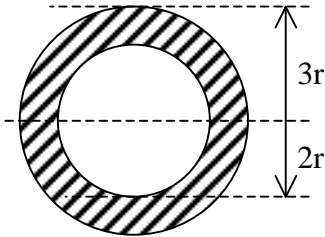


W obustronnie utwierdzonym pręcie poddanym obciążeniom skręcającym:

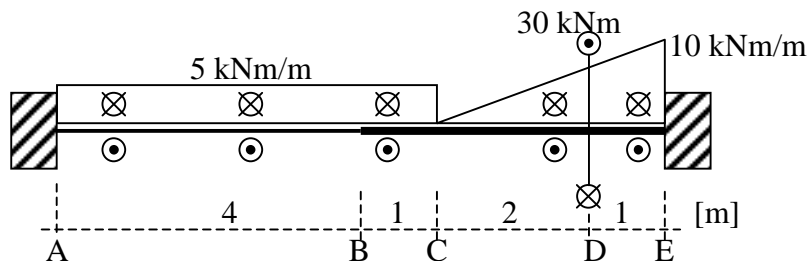
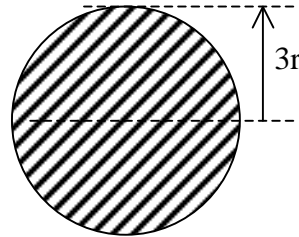
- wyznaczyć reakcje M_A i M_E
- określić wymiar r z dokładnością do 1 cm tak aby maksymalne naprężenie styczne nie przekraczało wytrzymałości na ścinanie $R_s=75$ MPa oraz aby maksymalna wartość jednostkowego kąta skręcenia nie przekraczała wartości dopuszczalnej $\theta_{dop}=0,3$ °/m
- narysować wykres momentów skręcających (sił przekrojowych) M_s
- narysować wykres jednostkowych kątów obrotu θ
- narysować wykres kątów obrotu ϕ względem przekroju A

Materiał o module $G=70$ GPa = $0,7 \cdot 10^8$ kN/m²

Przekrój poprzeczny na odcinku A-B:
o momencie bezwładności na skręcanie: J_1

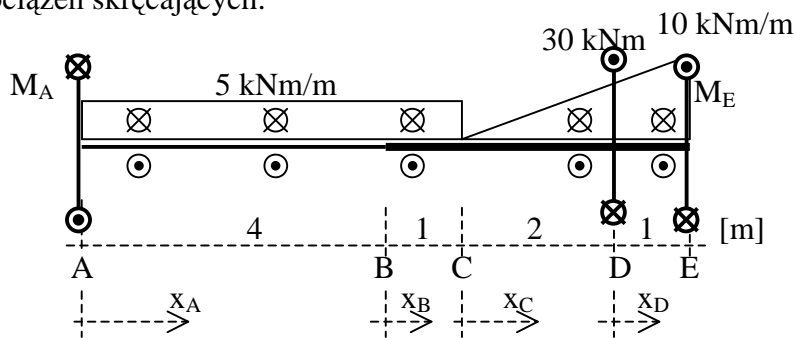


Przekrój poprzeczny na odcinku B-E:
o momencie bezwładności na skręcanie: J_2



Rozwiązanie:

Belka jest obustronnie utwierdzona, czyli statycznie niewyznaczalna. Z równania statyki można wywnioskować tylko że suma momentów utwierdzenia w przekrojach A oraz E równoważy wypadkowe od obciążeń skręcających.



$$\text{W układzie globalnym: } \Sigma M_s = 0 \Rightarrow -M_A - 5 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 + 30 + M_E = 0 \Rightarrow -M_A - 10 + M_E = 0$$

$$\text{Moment bezwładności na skręcanie: } J_1 = \frac{\pi}{2} [(3r)^4 - (2r)^4] = \frac{65 \pi}{2} r^4$$

$$\text{Moment bezwładności na skręcanie: } J_2 = \frac{\pi}{2} (3r)^4 = \frac{81 \pi}{2} r^4$$

$$\text{Stosunek: } \frac{J_2}{J_1} = \frac{3^4}{3^4 - 2^4} = \frac{81}{65} = 1,246 = \kappa$$

Funkcje momentów skręcających określimy zapisując je w układach lokalnych związanych z punktami charakterystycznymi.

Funkcja momentu skręcającego w przedziale AB to zredukowane obciążenia na lewo od przekroju opisanego współrzędną x_A :

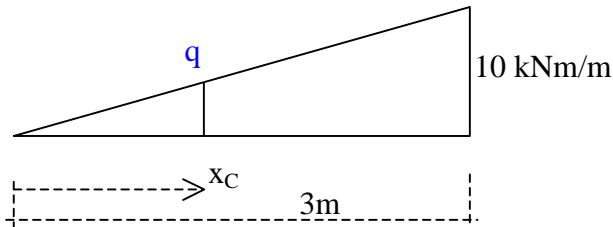
$$M_{sAB}(x_A) = M_A + 5kN \cdot x_A$$

Funkcja momentu skręcającego w przedziale BC to zredukowane obciążenia na lewo od przekroju opisanego współrzędną x_B :

$$M_{sBC}(x_B) = M_A + 5kN \cdot 4m + 5kN \cdot x_B = M_A + 20kNm + 5kN \cdot x_B$$

Funkcja momentu skręcającego w przedziale CD to zredukowane obciążenia na lewo od przekroju opisanego współrzędną x_C :

$$M_{sCD}(x_C) = M_A + 5kN \cdot 5m + \frac{1}{2} x_C \cdot \frac{10kN}{3m} x_C = M_A + 25kNm + \frac{5kN}{3m} x_C^2$$



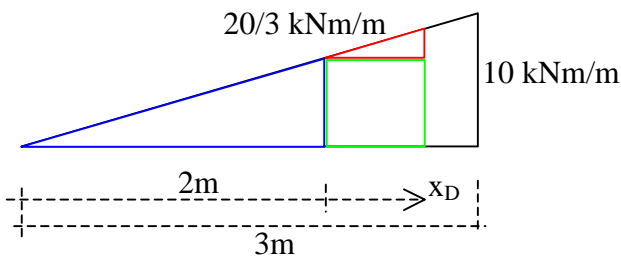
Z proporcji: $\frac{10kN}{3m} = \frac{q}{x_C}$

można określić intensywność obciążenia q w przekroju x_C

Funkcja momentu skręcającego w przedziale DE to zredukowane obciążenia na lewo od przekroju opisanego współrzędną x_D :

$$M_{sDE}(x_D) = M_A + 5kN \cdot 5m + \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \frac{10kN}{3m} \cdot 2m - 30kNm + \frac{20kNm}{3m} x_D + \frac{1}{2} x_D \cdot \frac{10kN}{3m} x_D =$$

$$= M_A + 1,667kNm + \frac{20kN}{3} x_D + \frac{5kN}{3m} x_D^2$$



Kolorami oznaczono wypadkowe od :

- trójkąta
- prostokąta
- trójkąta

Funkcję momentu skręcającego w przedziale DE można też zapisać przy pomocy współrzędnej x_C

$$M_{sDE}(x_C) = M_A + 25kNm + \frac{5kN}{3m} x_C^2 - 30kNm = M_A - 5kNm + \frac{5kN}{3m} x_C^2$$

Funkcje opisujące jednostkowe kąty skręcenia to odpowiednie funkcje momentów skręcających podzielone przez odpowiednie sztywności na skręcenie przekrojów:

$$\theta_{AB}(x_A) = M_{sAB}(x_A) / (G J_1)$$

$$\theta_{BC}(x_B) = M_{sBC}(x_B) / (G J_2)$$

$$\theta_{CD}(x_C) = M_{sCD}(x_C) / (G J_2)$$

$$\theta_{DE}(x_D) = M_{sDE}(x_D) / (G J_2)$$

Kąt obrotu p. B względem p. A obliczymy całkując odpowiedni jednostkowy kąt skręcenia:

$$\phi_{A/B} = \int_A^B \theta_{AB}(x_A) \partial x_A = \int_A^B \frac{M_{sAB}(x_A)}{G J_1} \partial x_A = \frac{1}{G J_1} \int_0^{4m} (M_A + 5kN x_A) \partial x_A =$$

$$\frac{1}{G J_1} \left(M_A \cdot 4m + 5kN \frac{x_A^2}{2} \Big|_0^{4m} \right) = \frac{1}{G J_1} (M_A \cdot 4m + 40 kNm^2)$$

Kąt obrotu p. C względem p. B obliczymy całkując odpowiedni jednostkowy kąt skręcenia:

$$\phi_{B/C} = \int_B^C \theta_{BC}(x_B) dx_B = \int_B^C \frac{M_{sBC}(x_B)}{G J_2} dx_B = \frac{1}{G J_2} \int_0^{1m} (M_A + 20kNm + 5kN x_B) dx_B =$$

$$\frac{1}{G J_2} \left(M_A \cdot 1m + 20kNm^2 + 5kN \frac{x_B^2}{2} \Big|_0^{1m} \right) = \frac{1}{G J_2} (M_A \cdot 1m + 22,5 kNm^2)$$

Kąt obrotu p. D względem p. C obliczymy całkując odpowiedni jednostkowy kąt skręcenia:

$$\phi_{C/D} = \int_C^D \theta_{CD}(x_C) dx_C = \int_C^D \frac{M_{sCD}(x_C)}{G J_2} dx_C = \frac{1}{G J_2} \int_0^{2m} \left(M_A + 25kNm + \frac{5kN}{3m} x_C^2 \right) dx_C =$$

$$\frac{1}{G J_2} \left(M_A \cdot 2m + 50kNm^2 + \frac{5kN}{3m} \cdot \frac{x_C^3}{3} \Big|_0^{2m} \right) = \frac{1}{G J_2} \left(M_A \cdot 2m + 50 kNm^2 + \frac{40}{9} kNm^2 \right)$$

Kąt obrotu p. E względem p. D obliczymy całkując odpowiedni jednostkowy kąt skręcenia:

$$\phi_{D/E} = \int_D^E \theta_{DE}(x_D) dx_D = \int_D^E \frac{M_{sDE}(x_D)}{G J_2} dx_D = \frac{1}{G J_2} \int_0^{1m} \left(M_A + 1,667kNm + \frac{20kN}{3} x_D + \frac{5kN}{3m} x_D^2 \right) dx_D =$$

$$\frac{1}{G J_2} \left(M_A \cdot 1m + 1,667kNm^2 + \frac{20kN}{3} \cdot \frac{x_D^2}{2} \Big|_0^{1m} + \frac{5kN}{3m} \cdot \frac{x_D^3}{3} \Big|_0^{1m} \right) = \frac{1}{G J_2} \left(M_A \cdot 1m + 5 kNm^2 + \frac{5}{9} kNm^2 \right)$$

Kąt obrotu p. E względem p. D można obliczyć inaczej. Jednostkowy kąt skręcenia w tym przedziale (czyli DE) można wyrazić poprzez współzrędną x_C :

$$\phi_{D/E} = \int_D^E \theta_{DE}(x_C) dx_C = \int_D^E \frac{M_{sDE}(x_C)}{G J_2} dx_C = \frac{1}{G J_2} \int_{2m}^{3m} \left(M_A + 25 kNm + \frac{5kN}{3m} x_C^2 - 30 kNm \right) dx_C =$$

$$\frac{1}{G J_2} \left(M_A \cdot 1m - 5kNm^2 + \frac{5kN}{3m} \cdot \frac{x_C^3}{3} \Big|_{2m}^{3m} \right) = \frac{1}{G J_2} \left(M_A \cdot 1m - 5 kNm^2 + \frac{5 \cdot (27 - 8)}{9} kNm^2 \right)$$

Po przekształceniach wynik jest ten sam co poprzednio

Reakcję M_A wyznaczmy wykorzystując warunek kinematyczny: $\phi_{A/E}=0$, obrót utwierdzenia E względem utwierdzenia A musi wynosić zero.

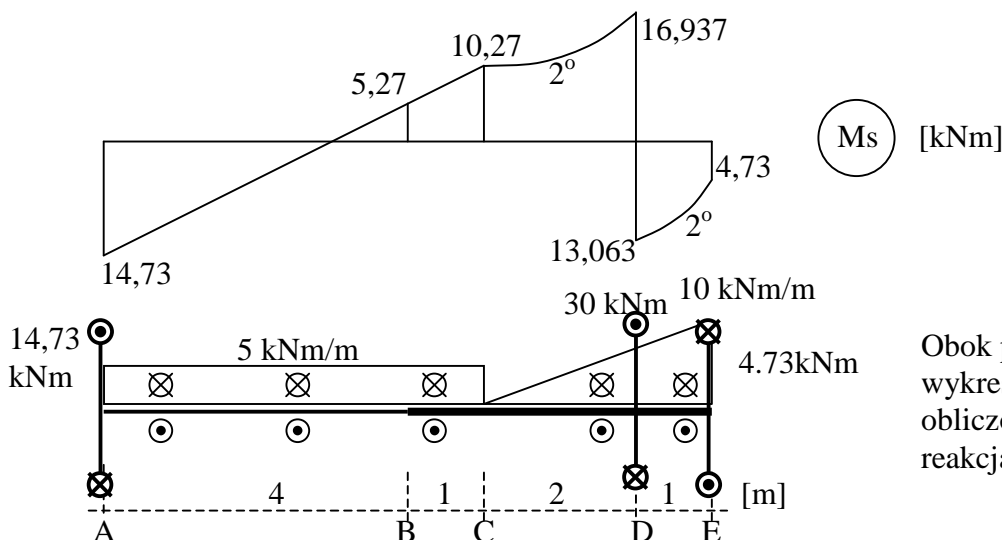
Z warunku kinematycznego $\phi_{A/E}=0$: mamy: $\phi_{A/B} + \phi_{B/C} + \phi_{C/D} + \phi_{D/E} = 0$

Powyższe równanie pomnożone przez: $G J_2 / m$ daje:

$$\kappa M_A 4 + \kappa 40 kNm + M_A + 22,5kNm + M_A 2 + 50kNm + (40/9)kNm + M_A + 5kNm + (5/9)kNm = 0$$

Reakcja $M_A = -14,73kNm$

Teraz można narysować wykres momentów skręcających - sił przekrojowych



Obok przypominano wykres obciążeń z obliczonymi już reakcjami.

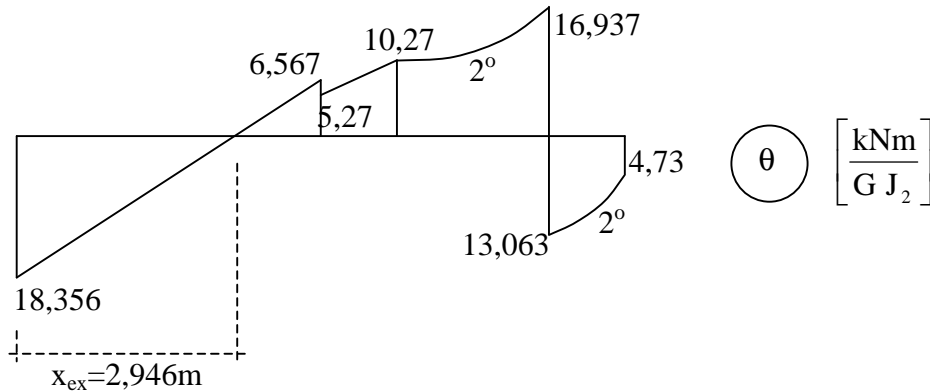
Wykres jednostkowych kątów obrotu uzyskamy dzieląc wartości momentów skręcających - sił przekrojowych przez odpowiednie wartości sztywności na skręcanie

$$\theta_A = \frac{-14,73 \text{ kNm}}{G J_1} = \frac{-14,73 \text{ kNm}}{G J_1} \cdot \frac{J_2}{J_2} = \frac{-18,356 \text{ kNm}}{G J_2}$$

Jednostkowy kąt obrotu na lewo od przekroju B:

$$\theta_{B-} = \frac{5,27 \text{ kNm}}{G J_1} = \frac{5,27 \text{ kNm}}{G J_1} \cdot \frac{J_2}{J_2} = \frac{6,567 \text{ kNm}}{G J_2}$$

Pozostałe rzędne są na wykresie:



Na powyższym wykresie zaznaczono też miejsce w którym wystąpi ekstremum funkcji kątów obrotów, obliczono je przyrównując do zera: $\theta_{AB}(x_A)=0$ czyli: $M_{sAB}(x_A)=0$

Mając powyższe wykresy można odczytać maksymalne wartości momentów skręcających i jednostkowych kątów obrotu na odcinku AB i BE

$$\begin{aligned} \max |M_{sAB}| &= 14,73 \text{ kNm} & , & & \max |\theta_{AB}| &= 18,356 \text{ kNm}/(GJ_2) \\ \max |M_{sBE}| &= 16,937 \text{ kNm} & , & & \max |\theta_{BE}| &= 16,937 \text{ kNm}/(GJ_2) \end{aligned}$$

Maksymalne naprężenie styczne na odcinku AB nie może przekraczać wytrzymałości materiału na ścinanie, czyli:

$$\max |\tau_{AB}| = \frac{\max |M_{sAB}|}{J_1} 3r \leq R_s \Rightarrow \frac{\max |M_{sAB}|}{R_s} \leq \frac{J_1}{3r} \Rightarrow \frac{14730 \text{ Nm}}{75 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2} \leq \frac{65 \pi}{6} r^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{14730}{75} 10^{-6} \text{ m}^3 \frac{6}{65 \pi}} \leq r \Rightarrow 1,794 \text{ cm} \leq r$$

To jest wymiar r który zapewnia że

naprężenia styczne na odcinku AB nie przekroczą wytrzymałości materiału na ścinanie.

Maksymalne naprężenie styczne na odcinku BE nie może przekraczać wytrzymałości materiału na ścinanie, czyli:

$$\max |\tau_{BE}| = \frac{\max |M_{sBE}|}{J_2} 3r \leq R_s \Rightarrow \frac{\max |M_{sBE}|}{R_s} \leq \frac{J_2}{3r} \Rightarrow \frac{16937 \text{ Nm}}{75 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2} \leq \frac{81 \pi}{6} r^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{16937}{75} 10^{-6} \text{ m}^3 \frac{6}{81 \pi}} \leq r \Rightarrow 1,746 \text{ cm} \leq r$$

To jest wymiar r który zapewnia że

naprężenia styczne na odcinku BE nie przekroczą wytrzymałości materiału na ścinanie.

Jednostkowy kąt skręcenia na odcinku AB nie może przekroczyć dopuszczalnego jednostkowego kąta skręcenia, czyli:

$$\max |\theta_{AB}| \leq \theta_{dop} \Rightarrow \frac{18,356 \text{ kNm}}{G J_2} \leq \theta_{dop} \Rightarrow \frac{18,356 \text{ kNm}}{G \theta_{dop}} \leq \frac{81 \pi}{2} r^4$$

$$\sqrt[4]{\frac{18,356 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{0,7 \cdot 10^8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \cdot 0,3^\circ / \text{m} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}} \cdot \frac{2}{81 \pi}} \leq r \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{18,356 \cdot 180}{0,7 \cdot 0,3 \cdot \pi} \cdot \frac{2}{81 \pi}} \cdot 10^{-2} \text{ m} \leq r$$

Uwaga: Trzeba przeliczyć stopnie na radiany (patrz powyżej).

$$2,505 \text{ cm} \leq r$$

To jest wymiar r który zapewnia że jednostkowy kąt skręcenia na odcinku AB nie przekroczy dopuszczalnego jednostkowego kąta skręcenia.

Jednostkowy kąt skręcenia na odcinku BE nie może przekroczyć dopuszczalnego jednostkowego kąta skręcenia, czyli:

$$\max |\theta_{BE}| \leq \theta_{\text{dop}} \Rightarrow \frac{16,937 \text{ kNm}}{G J_2} \leq \theta_{\text{dop}} \Rightarrow \frac{16,937 \text{ kNm}}{G \theta_{\text{dop}}} \leq \frac{81 \pi}{2} r^4$$

$$\sqrt[4]{\frac{16,937 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{0,7 \cdot 10^8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \cdot 0,3^\circ / \text{m} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}} \cdot \frac{2}{81 \pi}} \leq r \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{16,937 \cdot 180}{0,7 \cdot 0,3 \cdot \pi} \cdot \frac{2}{81 \pi}} \cdot 10^{-2} \text{ m} \leq r$$

$$2,455 \text{ cm} \leq r$$

To jest wymiar r który zapewnia że jednostkowy kąt skręcenia na odcinku BE nie przekroczy dopuszczalnego jednostkowego kąta skręcenia.

Wszystkie powyższe cztery nierówności muszą być spełnione. Ostatecznie przyjęto $r = 3 \text{ cm}$, wtedy:

$$J_1 = 8270,2 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = 10306 \text{ cm}^4$$

$$1/(G J_1) = 0,17274 \cdot 10^{-3} / (\text{kNm}^2)$$

$$1/(G J_2) = 0,13862 \cdot 10^{-3} / (\text{kNm}^2)$$

Następnie obliczono ostateczne wartości względnych kątów obrotu:

$$\phi_{A/B} = 0,17274 \cdot 10^{-3} \cdot (-14,73 \cdot 4 + 40) = -3,268 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\phi_{B/C} = 0,13862 \cdot 10^{-3} \cdot (-14,73 + 22,5) = 1,077 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\phi_{C/D} = 0,13862 \cdot 10^{-3} \cdot (-14,73 \cdot 2 + 50 + 40/9) = 3,463 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\phi_{D/E} = 0,13862 \cdot 10^{-3} \cdot (-14,73 + 5 + 5/9) = -1,272 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Kąty obrotu względem przekroju A:

$$\phi_{A/C} = \phi_{A/B} + \phi_{B/C} = -2,191 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\phi_{A/D} = \phi_{A/C} + \phi_{C/D} = 1,272 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

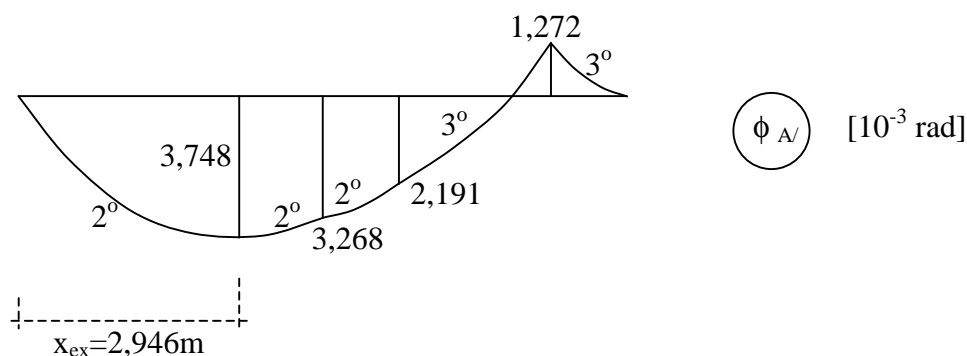
$$\phi_{A/E} = \phi_{A/D} + \phi_{D/E} = 0 \quad (\text{sprawdzenie ok.})$$

Ekstremalny kąt jaki wystąpi na odcinku AB:

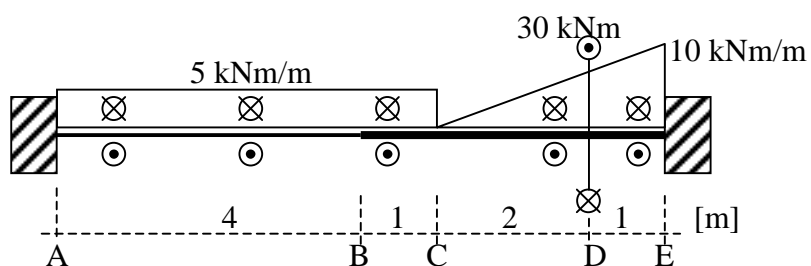
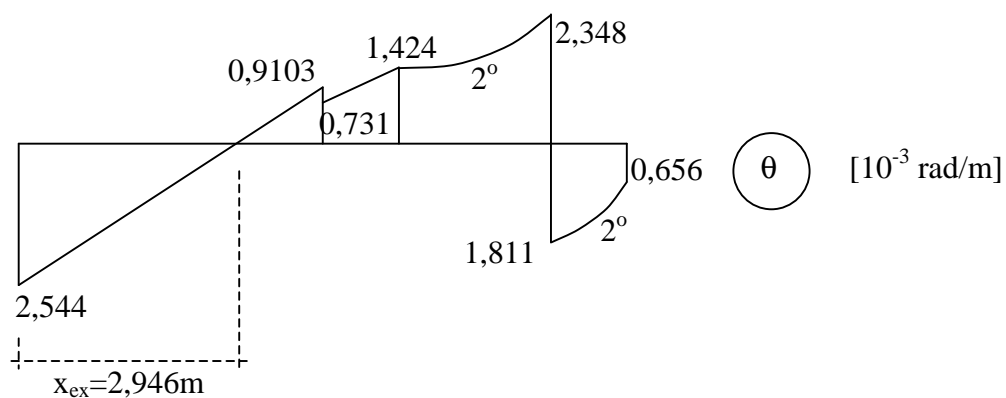
$$\phi_{\text{exAB}} = \int_0^{x_{\text{ex}}} \theta_{AB} \, dx_A = -0,13862 \cdot 10^{-3} / (\text{kNm}^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,946 \text{ m} \cdot 18,356 \text{ kNm} = -3,748 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

został obliczony jako pole pod wykresem θ na odcinku od zera do $x_{\text{ex}} = 2,946 \text{ m}$ (pole trójkąta).

Powyższe wartości pozwalają na narysowanie wykresu kątów obrotu przekrojów względem przekroju A.



Poniżej przedstawiono wykres jednostkowych kątów obrotu, tym razem rzędne są opisane w [10^{-3} rad/m]



Obok przypominano wykres obciążeń.