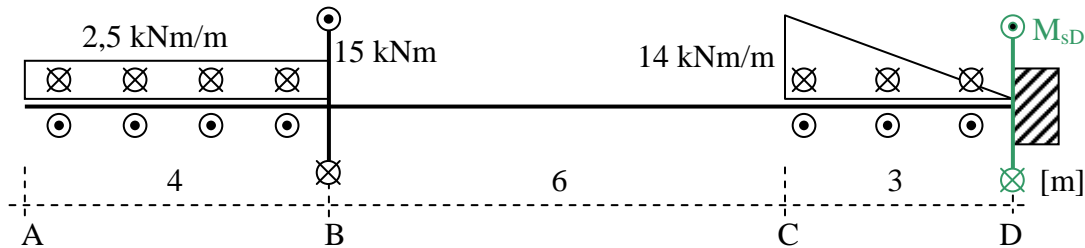


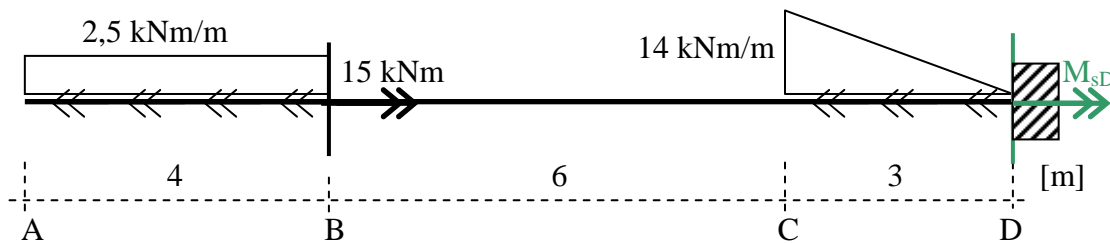
W jednostronnie utwierdzonym pręcie poddanym obciążeniom skręcającym:

- wyznaczyć reakcje M_{sD}
- narysować wykres momentów skręcających (sił przekrojowych): $M_s(x)$
- narysować wykres jednostkowych kątów obrotu: $\theta(x)$
- narysować wykres kątów obrotu: $\phi_{D/x}$ - względem utwierdzenia D

Dane: - materiał o module ścinania: G
 - przekrój poprzeczny ma moment bezwładności na ścinanie: J_s



Inna forma przedstawienia obciążeń skręcających:



Rozwiązanie:

Belka jest jednostronnie utwierdzona, czyli statycznie wyznaczalna. Z równania statyki można wywnioskować, że moment utwierdzenia w przekroju D i wypadkowe od obciążeń skręcających w sumie dają zero.

W układzie globalnym: $\sum M_s = 0 \Rightarrow$

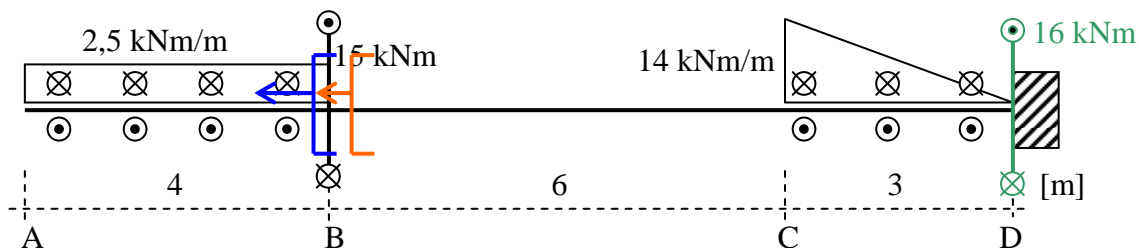
$$-2,5 \text{ kNm/m} \cdot 4 \text{ m} + 15 \text{ kNm} - \frac{1}{2} \cdot 14 \text{ kNm/m} \cdot 3 \text{ m} + M_{sD} = 0 \Rightarrow M_{sD} = 16 \text{ kNm}$$

Funkcje momentów skręcających – sił przekrojowych.

Funkcja momentu skręcającego w przedziale AB będzie funkcją liniową – na każdym odcinku o długości 1 metra moment skręcający zmienia się o 2,5 kNm

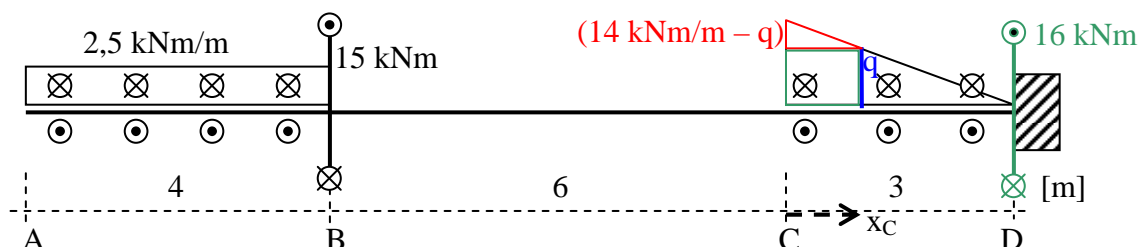
$$M_{sAB}(x_A) = 2,5 \text{ kN} \cdot x_A$$

Na końcu przedziału AB – czyli przed przekrojem B, wartość momentu skręcającego przyjmie wartość: $2,5 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} = 10 \text{ kNm}$. Wartość ta jest dodatnia, ponieważ w układzie lokalnym w przekroju przed punktem B (dx na lewo od punktu B) skierowanym w lewo (czyli tam gdzie redukujemy obciążenie prostokątne) „widzimy” 10 kNm „kręcące” zgodnie ze wskazówkami zegara, albo strzałkę z podwójnym grotem skierowaną w tą samą stronę co układ lokalny – czyli w tym przypadku w lewo.



W przekroju B pojawi się „skok” w wykresie momentów skręcających – sił przekrojowych o 15 kNm. Na początku przedziału BC – czyli za przekrojem B, wartość momentu skręcającego przyjmie wartość: $2,5 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} - 15 \text{ kNm} = -5 \text{ kNm}$. Wartość ta jest ujemna, ponieważ w układzie lokalnym w przekroju za punktem B (dx na prawo od punktu B) skierowanym w lewo (czyli tam gdzie redukujemy obciążenie prostokątne i moment skupiony), „widzimy” w sumie 5 kNm „kręące” przeciwnie do wskazówek zegara, albo strzałkę z podwójnym grotem skierowaną w przeciwną stronę co układ lokalny.

Funkcja momentu skręcającego w przedziale BC przyjmie stałą wartość: -5 kNm .



Funkcja momentu skręcającego w przedziale CD to zredukowane obciążenia na lewo od przekroju opisanego współrzędną x_C : czyli zredukowane wcześniej -5 kNm oraz trapezowe, czyli **trójkątne i prostokątne**:

$$M_{sCD}(x_C) = 2,5 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} - 15 \text{ kNm} + \frac{1}{2} x_C (14 \text{ kN} - q) + x_C \cdot q$$

- gdzie q to intensywność obciążenia skręcającego w przekroju określonym współrzędną x_C .

Z proporcji: $\frac{14 \text{ kN}}{3 \text{ m}} = \frac{q}{(3 \text{ m} - x_C)}$ można określić intensywność tego obciążenia, czyli:

$$q = \frac{14 \text{ kN}}{3 \text{ m}} (3 \text{ m} - x_C)$$

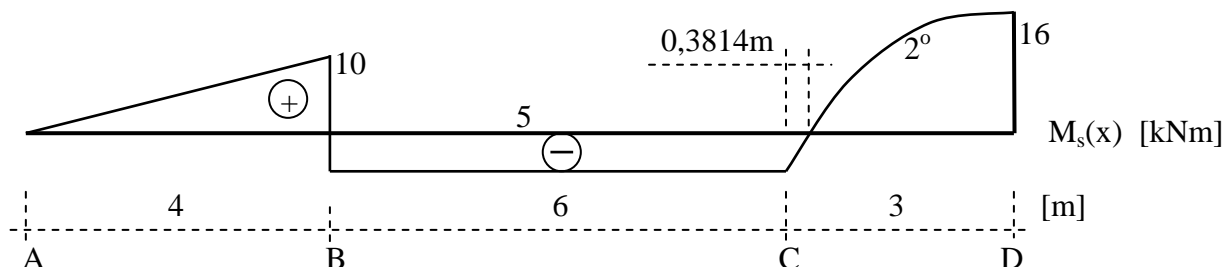
Po uporządkowaniu otrzymamy:

$$M_{sCD}(x_C) = \frac{-7 \text{ kN}}{3 \text{ m}} x_C^2 + 14 \text{ kN} \cdot x_C - 5 \text{ kNm}$$

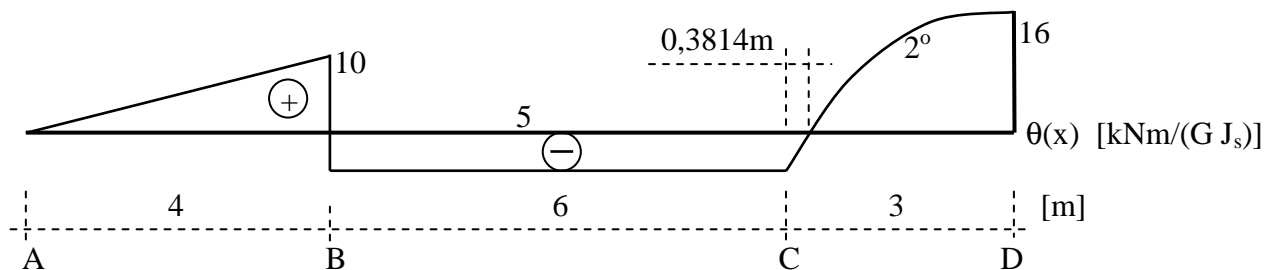
Powyższa funkcja przejmie wartość zero dla $x_C = 0,3814 \text{ m}$

Dla dla $x_C = 3 \text{ m}$ czyli w przekroju D otrzymamy: $M_{sCD}(x_C = 3 \text{ m}) = 16 \text{ kNm}$, co oczywiście odpowiada wartości wcześniej obliczonego momentu utwierdzenia w przekroju D.

Teraz można narysować wykres momentów skręcających – sił przekrojowych.



Ze względu na to, że na całej długości pręta wartość modułu ścinania G oraz momentu bezwładności na ścinanie jest taka sama, to wykres jednostkowych kątów obrotu $\theta(x)$ będzie wyglądał analogicznie jak wykres $M_s(x)$, tylko wartości $\theta(x)$ będą opisane przy pomocy jednostek: $[\text{kNm}/(G J_s)]$



Wykres kątów obrotu: ϕ .

Najpierw jako punkt odniesienia weźmiemy przekrój A, czyli sporządzimy wykres kątów obrotu:

$\phi_{A/x}$ - względem przekroju A

Wykorzystując fakt że funkcja jednostkowych kątów obrotu $\theta(x)$ jest pochodną funkcji kątów obrotu ϕ , to funkcję kątów obrotu ϕ otrzymamy całkując funkcję jednostkowych kątów obrotu $\theta(x)$.

W przedziale AB funkcja jednostkowych kątów obrotu $\theta(x)$ jest liniowa, czyli funkcja kątów obrotu ϕ będzie funkcją drugiego stopnia. Całkując graficznie otrzymamy wartość kąta obrotu przekroju B względem przekroju A jako pole części wykresu $\theta(x)$ na odcinku AB czyli trójkąta:

$$\phi_{A/B} = \frac{1}{2} \cdot 4\text{m} \cdot 10 \text{ kNm}/(\text{G J}_s) = 20 \text{ kNm}^2/(\text{G J}_s)$$

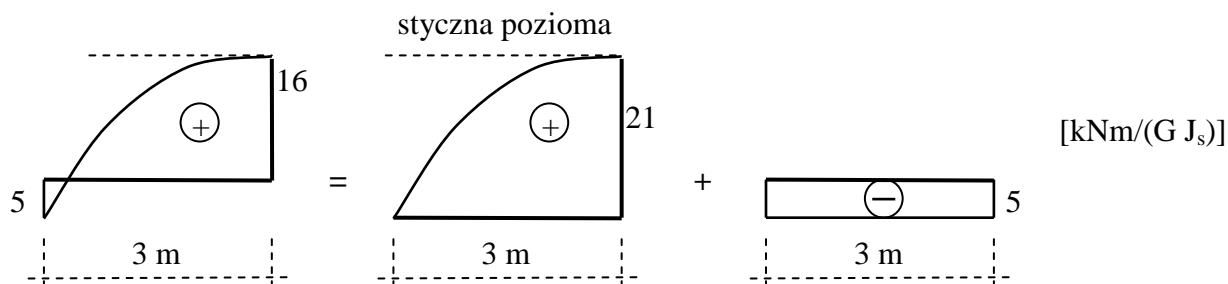
W przedziale BC funkcja jednostkowych kątów obrotu $\theta(x)$ jest stała, czyli funkcja kątów obrotu ϕ będzie funkcją liniową. Całkując graficznie otrzymamy wartość kąta obrotu przekroju C względem przekroju B jako pole części wykresu $\theta(x)$ na odcinku BC czyli prostokąta:

$$\phi_{B/C} = 6\text{m} \cdot (-5 \text{ kNm}/(\text{G J}_s)) = -30 \text{ kNm}^2/(\text{G J}_s)$$

Kąt obrotu przekroju C względem przekroju A obliczymy jako sumę:

$$\phi_{A/C} = \phi_{A/B} + \phi_{B/C} = -10 \text{ kNm}^2/(\text{G J}_s)$$

W przedziale CD funkcja jednostkowych kątów obrotu $\theta(x)$ jest funkcją drugiego stopnia, czyli funkcja kątów obrotu ϕ będzie funkcją trzeciego stopnia. Całkując graficznie otrzymamy wartość kąta obrotu przekroju D względem przekroju C jako pole części wykresu $\theta(x)$ na odcinku CD czyli figury pod parabolą. Aby ułatwić rachunki kształt części wykresu $\theta(x)$ na odcinku CD „rozbijemy” na dwie figury których pole da się prościej obliczyć



Obliczając pole dwóch ostatnich figur i uwzględniając znaki otrzymamy:

$$\frac{2}{3} \cdot 3\text{m} \cdot 21 \text{ kNm}/(\text{G J}_s) - 3\text{m} \cdot 5 \text{ kNm}/(\text{G J}_s) = (42 - 15) \text{ kNm}^2/(\text{G J}_s) = 27 \text{ kNm}^2/(\text{G J}_s) = \phi_{C/D}$$

Do obliczenia pola pod wycinkiem paraboli można było użyć wzoru: $\frac{2}{3}$ podstawa razy wysokość, pod warunkiem że nad punktem D mamy styczną poziomą – ten warunek jest spełniony.

Kąt obrotu przekroju C względem przekroju A obliczymy jako sumę:

$$\phi_{A/D} = \phi_{A/C} + \phi_{C/D} = (-10 + 27) \text{ kNm}^2/(\text{G J}_s) = 17 \text{ kNm}^2/(\text{G J}_s)$$

Na odcinku CD pojawi się ekstremalna wartość kąta obrotu, ponieważ na tym odcinku w miejscu $x_C=0,3814\text{m}$ funkcja jednostkowego kąta obrotu czyli funkcja pochodna kąta obrotu przyjmuje wartość zero. Aby znaleźć tę ekstremalną wartość obliczymy to tym razem analitycznie a nie graficznie. Funkcja jednostkowego kąta obrotu na odcinku CD:

$$\theta_{CD}(x_C) = M_{sCD}(x_C)/(G J_s) = \frac{1}{G J_s} \left[\frac{-7\text{kN}}{3\text{m}} x_c^2 + 14\text{kN} \cdot x_c - 5\text{kNm} \right]$$

Całkując powyższe równanie od punktu C do dowolnego miejsca określonego współrzędną x_C , otrzymamy funkcję określającą kąt obrotu przekroju x_C względem przekroju C:

$$\phi_{C/x_C} = \int_0^{x_C} \theta_{CD}(x_C) \partial x_C = \frac{1}{G J_s} \left[\frac{-7\text{kN}}{9\text{m}} x_c^3 + \frac{14\text{kN}}{2} x_c^2 - 5\text{kNm} \cdot x_c \right]$$

W powyższej całce dolna granica całkowania wynosi zero ponieważ w punkcie C współrzędna $x_C=0$. Podstawiając do ostatniego wyrażenia: $x_C=0,3814\text{m}$, otrzymamy wartość określającą ekstremalny kąt obrotu względem przekroju C.

$$\phi_{C/ekstr.} = \phi_{C/x_C=0,3814\text{m}} = -0,9319 \frac{\text{kNm}^2}{G J_s}$$

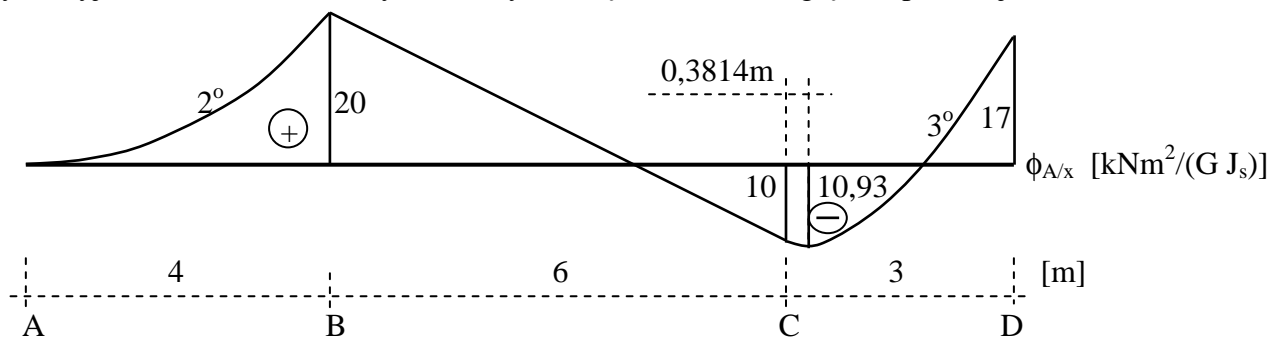
Jeżeli do ostatniego wyrażenia podstawimy współrzędną punktu D, czyli $x_C=3\text{m}$, otrzymamy wartość określającą kąt obrotu przekroju D względem przekroju C, czyli wcześniej obliczonej graficznie: $\phi_{C/D}$

$$\phi_{C/D} = \phi_{C/x_C=3\text{m}} = 27 \frac{\text{kNm}^2}{G J_s}$$

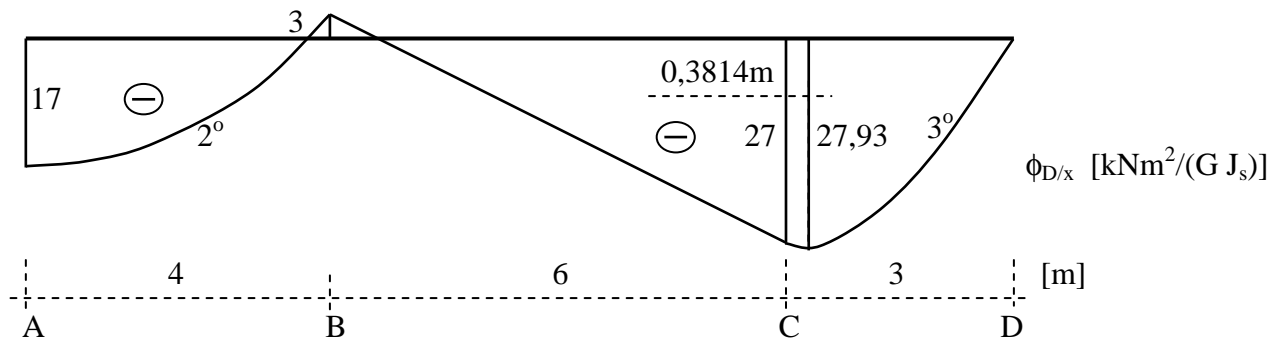
Kąt obrotu przekroju, w którym pojawi się ekstremum, względem przekroju A, obliczymy jako sumę:

$$\phi_{A/ekstr.} = \phi_{A/C} + \phi_{C/ekstr.} = -10,9319 \text{ kNm}^2/(G J_s)$$

Po tych wyjaśnieniach można narysować wykres kątów obrotu względem przekroju A:



Aby móc narysować wykres kątów obrotu względem przekroju D (utwierdzenie), przyjmujemy jako punkt odniesienia przekrój D. Wykorzystując fakt że: $\phi_{D/A} = -\phi_{A/D} = -17 \text{ kNm}^2/(G J_s)$, wystarczy wszystkie rzędne z wykresu $\phi_{A/x}$ zmniejszyć o $17 \text{ kNm}^2/(G J_s)$:



Na koniec przypomniano wykres jednostkowych kątów obrotu $\theta(x)$, który jest funkcją pochodną funkcji kątów obrotów:

