Dane jest pole przemieszczeń: $u_1 = 10 + 0{,}1\, x_1 x_2 + 0{,}05\, x_3$
$u_2 = 5 - 0{,}05\, x_1 + 0{,}1\, x_2 x_3$
$u_3 = 10 - 0{,}1\, x_1 x_2 x_3$

oraz stałe materiałowe: $E = 5 \cdot 10^9$ Pa $\quad \nu = \frac{1}{3}$

Wyznaczyć w punkcie A: tensor odkształceń i naprężeń w układzie wyjściowym oraz układzie kierunków głównych.

Współrzędne punktu A: $\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie:

Na podstawie równ. geometr. Cauchy'ego: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ wyznaczamy pole odkształceń:

$\varepsilon_{11} = \partial u_1/\partial x_1 = 0{,}1\, x_2$
$\varepsilon_{22} = \partial u_2/\partial x_2 = 0{,}1\, x_3$
$\varepsilon_{33} = \partial u_3/\partial x_3 = -\, 0{,}1\, x_1 x_2$
$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0{,}5\ (\ \partial u_1/\partial x_2 + \partial u_2/\partial x_1\ ) = 0{,}5\ (\ 0{,}1\, x_1 - 0{,}05\ )$
$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0{,}5\ (\ \partial u_1/\partial x_3 + \partial u_3/\partial x_1\ ) = 0{,}5\ (-0{,}1\, x_2 x_3 + 0{,}05\ )$
$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0{,}5\ (\ \partial u_2/\partial x_3 + \partial u_3/\partial x_2\ ) = 0{,}5\ (\ 0{,}1\, x_2 - 0{,}1\, x_1 x_3\ )$

Po podstawieniu do powyższych równań współrzędnych p. A otrzymujemy tensor $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ w tym punkcie

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -0{,}1 & 0 & 0{,}025 \\ 0 & 0 & -0{,}05 \\ 0{,}025 & -0{,}05 & 0{,}05 \end{bmatrix}$$

Na podstawie równań fizycznych Hooke'a: $\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$ wyznaczamy tens. napr. w p. A:

Stałe Lame'go wynoszą: $2G = \frac{E}{1+\nu} = 3{,}75 \cdot 10^9\ Pa \qquad \lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} = 3{,}75 \cdot 10^9\ Pa$

$\sigma_{11} = 2G\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = -562{,}5\ \text{[MPa]}$
$\sigma_{22} = 2G\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = -187{,}5\ \text{[MPa]}$
$\sigma_{33} = 2G\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 0\ \text{[MPa]}$
$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2G\varepsilon_{12} = 0\ \text{[MPa]}$
$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2G\varepsilon_{13} = 93{,}75\ \text{[MPa]}$
$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2G\varepsilon_{23} = -187{,}5\ \text{[MPa]}$

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} -562{,}5 & 0 & 93{,}75 \\ 0 & -187{,}5 & -187{,}5 \\ 93{,}75 & -187{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

Wartości własne tensora naprężeń $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}$ (naprężenia główne)

$$\det(\ T_\sigma - I\, \sigma_{(i)}\ ) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -562{,}5 - \sigma_i & 0 & 93{,}75 \\ 0 & -187{,}5 - \sigma_i & -1{,}875 \\ 93{,}75 & -187{,}5 & -\sigma_i \end{bmatrix} = 0$$

$\sigma_{(i)}^3 - I_1\, \sigma_{(i)}^2 + I_2\, \sigma_{(i)} - I_3 = 0$
$I_1 = -750$ MPa

$$I_2 = \begin{vmatrix} -562{,}5 & 0 \\ 0 & -187{,}5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -187{,}5 & -187{,}5 \\ -187{,}5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -562{,}5 & 90{,}75 \\ 90{,}75 & 0 \end{vmatrix} = 61523\ [\mathrm{MPa}]^2$$

$I_3 = \det T_\sigma = 21{,}42 \cdot 10^6\ [\mathrm{MPa}]^3$

Po rozwiązaniu równania $\sigma_{(i)}^3 - I_1\, \sigma_{(i)}^2 + I_2\, \sigma_{(i)} - I_3 = 0$ otrzymujemy:

$\sigma_1 = 125{,}19$ MPa
$\sigma_2 = -294{,}77$ MPa
$\sigma_3 = -580{,}42$ MPa

$$\mathbf{T_\sigma}' = \begin{bmatrix} 125{,}19 & 0 & 0 \\ 0 & -294{,}77 & 0 \\ 0 & 0 & -580{,}42 \end{bmatrix}$$

Wartości własne tensora odkształceń $\mathbf{T_\varepsilon}$ (odkształcenia główne)

$$\det(T\varepsilon - I\,\varepsilon_{(i)}) = 0 \qquad \begin{bmatrix} -0{,}1-\varepsilon_i & 0 & 0{,}0025 \\ 0 & -\varepsilon_i & -0{,}005 \\ 0{,}0025 & -0{,}005 & 0{,}005-\varepsilon_i \end{bmatrix} = 0$$

$\varepsilon_{(i)}^3 - I_1\, \varepsilon_{(i)}^2 + I_2\, \varepsilon_{(i)} - I_3 = 0$
$I_1 = -0{,}05$

$$I_2 = \begin{vmatrix} -0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}05 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -0{,}1 & 0{,}025 \\ 0{,}025 & 0{,}05 \end{vmatrix} = -0{,}008125$$

$I_3 = \det T\varepsilon = 0{,}00025$

Po rozwiązaniu równania: $\varepsilon_{(i)}^3 - I_1\, \varepsilon_{(i)}^2 + I_2\, \varepsilon_{(i)} - I_3 = 0$ otrzymujemy:

$\varepsilon_1 = 0{,}08340$
$\varepsilon_2 = -0{,}02861$
$\varepsilon_3 = -0{,}1048$

$$\mathbf{T_\varepsilon}' = \begin{bmatrix} 0{,}0834 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}02861 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1048 \end{bmatrix}$$

Wstawiając odkształcenia gł. do równań fizycznych sprawdzimy czy otrzymamy naprężenia główne:

$$\sigma_1 = 2G\varepsilon_1 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 312{,}75 - 187{,}54 = 125{,}21 \approx 125{,}19\ [\mathrm{MPa}]$$
$$\sigma_2 = 2G\varepsilon_2 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = -107{,}29 - 187{,}54 = -294{,}83 \approx -294{,}77\ [\mathrm{MPa}]$$
$$\sigma_3 = 2G\varepsilon_3 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = -397{,}0 - 187{,}54 = -580{,}54 \approx -580{,}42\ [\mathrm{MPa}]$$

Jak widać istniejące różnice wynikają z przybliżeń obliczeniowych. Powyższe trzy równania to równania Hooke'a zapisane w układzie kierunków głównych, które to kierunki są takie same dla T_σ i dla T_ε – jest tak dla materiałów izotropowych, w tym zadaniu zrobiliśmy właśnie takie (milczące) założenie o izotropii. O współliniowości kierunków głównych T_σ i T_ε można się przekonać znajdując wektory własne. Zapisując znalezione wektory wierszami, otrzymamy macierz przejścia α z układu x_i do układu kierunków głównych, które – powtórzmy jeszcze raz – są takie same dla T_σ i T_ε gdy mamy materiał izotropowy.

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0{,}1161 & -0{,}5108 & 0{,}8518 \\ 0{,}1714 & 0{,}8551 & 0{,}4894 \\ -0{,}9783 & 0{,}0892 & 0{,}1868 \end{bmatrix}$$